Монография посвящена классификации наиболее важных классов конечных групп по свойствам их обобщенно квазинормальных подгрупп. Приводится решение в ненильпотентном случае задачи В.С. Монахова и О.И. Тавгеня об описании групп, в которых любые две третьи максимальные подгруппы перестановочны. Показано, что многие важные классы групп допускают описание в терминах *Q*-вложенных подгрупп и достигнуто обобщение большого числа результатов, полученных независимо в теориях *c*-нормальных и *S*-квазинормальных подгрупп. Значительная часть материала может быть использована в исследованиях по теории конечных групп и их классов.

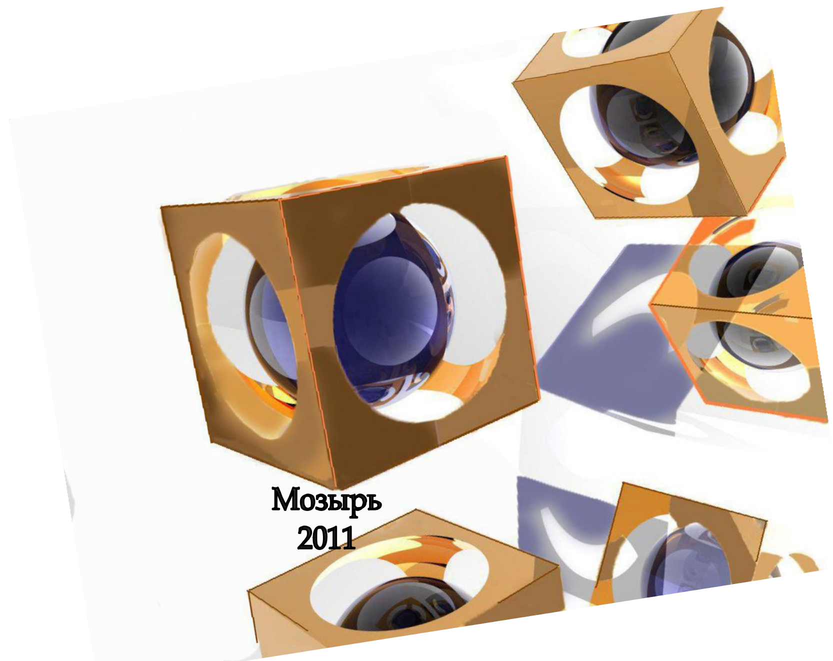
Монография предназначена для математиков: аспирантов и научных работников. Может служить основой спецкурсов для студентов математических отделений университетов.

ISBN 978-985-477-453-4

9 789854 774534

Н. В. Гуцко
Ю. В. Луценко

ОБОБЩЕННО КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП



Мозырь
2011

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический
университет имени И. П. Шамякина»

Н. В. Гуцко, Ю. В. Луценко

ОБОБЩЕННО КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

МОНОГРАФИЯ

Мозырь
2011

УДК 512.542
ББК 22.144
Г97

Авторы:
Н. В. Гуцко
кандидат физико-математических наук
Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина
Ю. В. Луценко
кандидат физико-математических наук
Брянский государственный университет
имени академика И. Г. Петровского

Рецензенты:
профессор кафедры алгебры и геометрии
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины
доктор физико-математических наук, профессор
А. Н. Скиба;
заведующий кафедрой высшей математики
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины
доктор физико-математических наук, профессор
В. Н. Семенчук.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»

Гуцко, Н. В.
Г97 Обобщенно квазинормальные подгруппы в теории конечных групп : монография / Н. В. Гуцко, Ю. В. Луценко. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2011. – 216 с.
ISBN 978-985-477-453-4.

Монография посвящена классификации наиболее важных классов конечных групп по свойствам их обобщенно квазинормальных подгрупп. Приводится решение в ненильпотентном случае задачи В.С. Монахова и О.И. Тавгеня об описании групп, в которых любые две трети максимальные подгруппы перестановочны. Показано, что многие важные классы групп допускают описание в терминах Q-вложенных подгрупп и достигнуто обобщение большого числа результатов, полученных независимо в теориях c-нормальных и S-квазинормальных подгрупп. Значительная часть материала может быть использована в исследованиях по теории конечных групп и их классов.

Монография предназначена для математиков: аспирантов и научных работников. Может служить основой спецкурсов для студентов математических отделений университетов.

УДК 512.542
ББК 22.144

ISBN 978-985-477-453-4

СОДЕРЖАНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1 — единичный элемент и единичная подгруппа группы G;

$< \alpha \mid \beta >$ — подгруппа, порожденная всеми α, для которых выполняется β;

π — некоторое множество простых чисел, т. е. $\pi \subseteq \mathbb{P}$;

π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел $\mathbb{P} \backslash \pi$; в частности, $p' = \mathbb{P} \backslash \{p\}$;

$\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G;

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей натурального числа n;

π-группа — группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$;

$\pi(G : H) = \pi(|G : H|)$;

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G;

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;

$< \mathrm{A}, \mathrm{B} >$ — подгруппа группы G, порождённая подгруппами A и B;

$A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;

$[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B;

$A \simeq B$ — A и B изоморфны;

$Aut\ G$ — группа всех автоморфизмов группы G;

$C_G(H/K)$ — централизатор главного фактора H/K группы G;

$C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G;

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$|G|$ — порядок группы G;

G' — коммутант группы G, т. е. подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G;

G_p — силовская p-подгруппа группы G;

$G_{p'}$ — дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т. е. p'-холлова подгруппа группы G;

G_π — π-холлова подгруппа группы G;

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

$|G : M|$ — непримарный индекс, т. е. индекс $|G : M|$ имеет не менее двух различных простых делителей;

$Hall_\pi(G)$ — множество всех холловских π-подгрупп группы G;

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G;

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G;

$H \triangleleft G$ — H является нормальной подгруппой группы G;

H $char$ G — подгруппа H характеристична в группе G, т. е. $\alpha(H) \subseteq H$ для любого автоморфизма $\alpha \in Aut\ G$;

H^G — нормальное замыкание подгруппы H в группе G;

$H_G = Core_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряжённых с H в G;

$M < \cdot\ G$ — M является максимальной подгруппой группы G;

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$N \cdot \triangleleft\ G$ — N является минимальной нормальной подгруппой группы G;

$N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G;

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;

p^α — примарное число, где $p \in \mathbb{P}$;

p-группа — группа G, для которой $\pi(G) = \{p\}$;

$Syl_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G;

$|x|$ — порядок элемента x группы G;

$Z(G)$ — центр группы G;

Z_p — циклическая группа порядка p;

$Z_{\mathfrak{F}}(G)$ — $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G, т. е. произведение всех $\mathfrak{F}$-гиперцентральных подгрупп группы G.

ВВЕДЕНИЕ

Важность понятия перестановочных подгрупп, то есть подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$, для теории групп связано, прежде всего, с тем, что для перестановочных подгрупп A и B их произведение AB само является подгруппой в основной группе. Основная идея теории перестановочных подгрупп заключается в анализе следующей общей задачи: *пусть Σ_1 и Σ_2 — две системы подгрупп группы G. Что можно сказать о строении группы G, если каждая подгруппа из Σ_1 перестановочна с каждой подгруппой из Σ_2?* Такой подход к изучению групп восходит к двум классическим работам. Прежде всего, напомним, что, как установлено в работе Ф. Холла [137], конечная группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда в G имеется такая система силовских подгрупп Σ_1 (по одной для каждого простого делителя порядка группы G), что любые две подгруппы из Σ_1 перестановочны. В вышедшей двумя годами позже работе О. Оре [171] было доказано, что если подгруппа H конечной группы G квазинормальна в G, т. е. H перестановочна со всеми подгруппами из G, то H субнормальна. Несколько позже Ито и Сеп в работе [144] усилили результат Оре в другом направлении. Они доказали, что для каждой квазинормальной подгруппы H группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. Тем не менее, как показано в работе Томпсона [197], факторгруппа H/H_G в общем случае не является абелевой, даже если группа H нильпотентна.

Интерес к изучению и применениям квазинормальных подгрупп не ослабевает и в последующие после публикаций ([102, 103, 144, 165, 171, 189, 197]) годы. Отметим, например, недавние публикации Алежандре [50], Асаада [62], Косси и Стоунхьюера [95, 96, 97], Стоунхьюера и Цахера [188, 192, 193], где исследовались квазинормальные циклические подгруппы, в частности квазинормальные минимальные подгруппы основной группы.

Следует отметить, что наряду с изучением квазинормальных подгрупп многими авторами предпринимались попытки изучения различных типов обобщенно квазинормальных подгрупп. В одной из первых публикаций в этом направлении (Э.М. Пальчик [27]) описывались свойства подгрупп перестановочных со всеми бипримарными подгруппами основной группы. В работе Майера [165] исследовались подгруппы перестановочные со всеми максимальными подгруппами. В работах Го Веньбиня, К.П. Шама и А.Н. Скибы [119, 128, 130] были изучены основные свойства и даны некоторые приложения X-перестановочных подгрупп (подгруппа H называется X-перестановочной или X-квазинормальной в G, если для любой подгруппы $A \leq G$ найдется такой элемент $x \in X$, что $HA^x = A^xH$ (А.Н. Скиба [128])). Указанное направление нашло отражение в исследованиях Гомельской алгебраической школы, возглавляемой членом-корреспондентом НАН Беларуси Л.А. Шеметковым.

Большое число публикаций связано с факторизационными обобщениями квазинормальных подгрупп [50, 196, 69, 70, 72, 75, 79, 80, 82, 83, 85, 84, 86, 93, 95, 96, 97, 98, 138, 188, 192, 193]. В частности, в недавней работе Бейдлемана и Хайнекена [83] установлено, что если $G = AB$, где каждая подгруппа группы A перестановочна с каждой подгруппой из G, то секция $(A \cap B)/(A \cap B)_G$ является нильпотентной группой, что обобщает отмеченный выше результат Ито и Сепа. Но все-таки наибольшее число публикаций в теории обобщенно квазинормальных подгрупп связано с S-квазинормальными подгруппами. Напомним, что подгруппа H группы G является S-перестановочной или S-квазинормальной в G, если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G. Оказалось, что S-квазинормальные подгруппы наследуют ряд ключевых свойств квазинормальных подгрупп. В частности, Кегель [149] и Дескинс [102] показали, что если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G, то она субнормальна в группе G и факторгруппа H/H_G нильпотентна. Более того, оказалось, что в разрешимой группе G для S-квазинормальных подгрупп верно даже включение $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$ при условии, что H перестановочна со всеми системными нормализаторами из G (Шмид [177]).

Вместе с тем оказалось, что S-квазинормальные подгруппы обладают и рядом свойств, существенно отличающих их от квазинормальных подгрупп. В частности, в отличие от квазинормальных подгрупп S-квазинормальные подгруппы образуют подрешетку решетки всех подгрупп основной группы (Кегель [149]). Это важное свойство S-квазинормальных подгрупп лежит в основе их многочисленных применений, и, в частности, это позволяет ввести следующее понятие: пусть H — подгруппа конечной группы G и H_{sG} — подгруппа из H, порожденная всеми теми подгруппами группы H, которые S-квазинормальны в G. Тогда H_{sG} называется *s-ядром* подгруппы H в группе G. Это понятие было введено в работе А.Н. Скибы [186], где также были рассмотрены приложения s-ядер при изучении различных классов групп.

Данная монография содержит 3 главы и список использованных источников, в который включены все известные и доступные нам источники, имеющие прямое отношение к проблематике данной монографии.

Глава 1 носит вспомогательный характер. Здесь определены наиболее важные этапы в изучении различных типов обобщенно квазинормальных подгрупп. Основное внимание уделяется также понятиям и некоторым известным результатам, используемым в основном тексте монографии.

В главу 2 вводится следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие S-квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп: подгруппа H конечной группы G называется *Q-вложенной в G*, если в G существует такая квазинормальная подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.

Большое внимание уделяется построению примеров, показывающих, что в общем случае множество всех Q-вложенных подгрупп шире множества всех S-квазинормальных подгрупп и множества всех c-нормальных подгрупп, и описанию наиболее общих свойств Q-вложенных подгрупп. Показано, что многие важные классы групп допускают описание в терминах Q-вложенных подгрупп и достигнуто обобщение большого числа результатов, полученных независимо в теориях c-нормальных и S-квазинормальных подгрупп.

Глава 3 посвящена факторизациям групп холловыми, субнормальными, нильпотентными и дисперсивными по Оре подгруппами в терминах Q-вложенных подгрупп.

Мы используем обозначения и терминологию, принятые в книгах [44, 139, 38, 101]. Буквами p, q, r обозначаются простые числа. Все рассматриваемые здесь группы предполагаются конечными. В монографии принята сквозная нумерация разделов.

Искреннюю благодарность выражаем всем, кто содействовал выходу данной монографии. Особенно признательны своему учителю, доктору физика-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе, за руководство нашими исследованиями в теории конечных групп, а также за внимание и многочисленные полезные советы, способствовавшие завершению работы над монографией.

1 КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ОБОБЩЕННО КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Подгруппы H и T группы G называются перестановочными, если $HT = TH$. Подгруппа H группы G называется перестановочной [189], или квазинормальной [171] в G, если H перестановочна с каждой подгруппой группы G.

Квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств, чем был и вызван широкий интерес к анализу квазинормальных и частично квазинормальных подгрупп вцелом. Изучение квазинормальных подгрупп было начато в классической работе Оре [171], где было доказано, что любая квазинормальная подгруппа является субнормальной. В 60–70-х годах прошлого столетия появился ряд ключевых работ по теории перестановочных подгрупп, которые предопределили основные направления развития теории перестановочных подгрупп в последующие годы. В частности, уточняя отмеченный выше результат Оре, Ито и Сеп в работе [144] доказали, что для каждой квазинормальной подгруппы H группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. Позже Майер и Шмид доказали [165], что для квазинормальных подгрупп H верно включение $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$. Результат Оре получил также развитие в работах Кегеля [149] и Дескинса [102]. Кегель доказал, что любая π-квазинормальная подгруппа является субнормальной и показал, что подгруппы перестановочные с силовскими подгруппами образуют решетку [149]. Напомним, что подгруппы, перестановочные с силовскими подгруппами, впервые изучались в работе С.А. Чунихина [42] (см. также монографию [43]). Отметим, что подгруппы такого типа были названы в работе Кегеля [149] π-квазинормальными. Первый из этих двух результатов Дескинс обобщил следующим образом: если G порождается своими π-элементами и π-подгруппа H группы G π-квазинормальна в G, то факторгруппа H/H_G нильпотентна. В этой работе Дескинс высказал предположение о том, что для квазинормальной в G подгруппы Q факторгруппа Q/Q_G абелева. Отрицательное решение этой задачи было получено Томпсоном в работе [197] (см. также Накамура [168]). В дальнейшем оказалось, что в разрешимой группе G для S-квазинормальных подгрупп верно $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$, если H перестановочна со всеми системными нормализаторами из G (П. Шмид [177]). Стоунхьюер в работе [189] обобщил результат Оре на случай бесконечных групп. Он доказал, что каждая квазинормальная подгруппа конечно порожденной группы субнормальна. Отметим, что после выхода этих работ квазинормальные подгруппы стали активно использоваться в исследованиях многих авторов, например, Т.Е. Бергер, Ф. Гросс, Р.К. Бредвей [87, 90], Г. Бусетто [92], Р. Майер [163], К. Накамура [169], С.Е. Стоунхьюер [191, 190] и другие. В частности, П. Шмидт доказал [178, теорема 5.1.1], что подгруппа H является квазинормальной в группе G тогда и только тогда, когда H субнормальна в G и является модулярным элементом (в смысле Г.И. Куроша) решетки всех подгрупп группы G.

Интерес к изучению и применениям квазинормальных подгрупп не ослабевает и в последующие после публикаций ([51, 81, 102, 103, 144, 165, 171, 189, 197]) годы. Отметим, например, недавние публикации М. Дж. Алежандре, А. Баллестера-Болинше, Дж. Косси и М.С. Педреза-Агуйлера [50, 170], М. Асаада [62], А. Баллестера-Болинше, Дж. Бейдлемана и Х. Хайнекена [67], А. Фельдмана [136], китайских математиков Х. Лью, В. Ли и Х. Йи [160], Дж. Косси и С.Е. Стоунхьюера [95, 96, 97], С.Е. Стоунхьюера и Г. Цахера [188, 192, 193], Дж. Косси, С.Е. Стоунхьюера и Г. Цахера [98], где исследовались квазинормальные циклические подгруппы и квазинормальные минимальные подгруппы основной группы. В частности, Дж. Косси и С.Е. Стоунхьюер в совместной работе [95] доказали, что в случае, когда группа G является p-группой для некоторого простого p и A — циклическая силовская подгруппа группы G, то нормальное замыкание A^G является модулярной группой.

Значительные успехи, достигнутые в изучении перестановочных подгрупп, в 1960–1980 годах послужили основой для дальнейшего анализа следующей общей проблемы: *что можно сказать о структуре группы G при условии, что каждая подгруппа из Σ_1 перестановочна с каждой подгруппой из Σ_2, где Σ_1 и Σ_2 — некоторые системы подгрупп группы G?* Отметим наиболее известные результаты, относящиеся к анализу данного вопроса.

1.1 S-квазинормальность и некоторые ее обобщения

Большое число публикаций в теории обобщенно квазинормальных подгрупп связано с S-квазинормальными подгруппами (см., в частности, [47, 52, 53, 54, 64, 60, 61, 78, 149, 155, 156, 159, 102, 5, 174, 182, 186, 177]). Напомним, что подгруппа H группы G является S-перестановочной, или S-квазинормальной, в группе G, если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G. Оказалось, что S-квазинормальные подгруппы наследуют ряд ключевых свойств квазинормальных подгрупп. В частности, Кегель [149] и Дескинс [102] показали, что если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G, то она субнормальна в G и факторгруппа H/H_G нильпотентна. Более того, в разрешимой группе G для S-квазинормальной подгруппы верно $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$ при дополнительном условии, что H перестановочна со всеми системными нормализаторами из группы G (см. П. Шмид [177]).

Вместе с тем оказалось, что S-квазинормальные подгруппы обладают и рядом свойств, существенно отличающих их от квазинормальных подгрупп. В частности, в отличие от квазинормальных подгрупп S-квазинормальные подгруппы образуют подрешетку решетки всех подгрупп основной группы (О.Н. Кегель [149]). Это важное свойство S-квазинормальных подгрупп лежит в основе их многочисленных применений, и, в частности, это позволяет ввести понятия *s-ядра* и *S-квазинормального замыкания.* Отметим, что понятие s-ядра было введено А.Н. Скибой в работе [186], где также были рассмотрены приложения s-ядер при изучении различных классов групп. Напомним, что *s-ядром* подгруппы H в группе G называется подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами группы H, которые S-квазинормальны в G. Понятие S-квазинормального замыкания было введено Го Веньбинем и А.Н. Скибой в недавней публикации [5], при этом *S-квазинормальным замыканием* подгруппы H в группе G называется пересечение всех S-квазинормальных подгрупп группы G, содержащих подгруппу H. В этой же работе был доказан критерий сверхразрешимости групп по свойствам их обобщенных подгрупп Фиттинга. Напомним, что обобщенной подгруппой Фиттинга $F^*(G)$ группы G называется множество всех элементов x из G, которые индуцируют внутренний автоморфизм на каждом главном факторе из G (см. [89, с. 126]). Отметим, что в работе [61] М. Асаада и П. Ксорго изучались свойства группы G при условии, что каждая подгруппа простого порядка обобщенной подгруппы Фиттинга является S-квазинормальной в G.

Концепция S-квазинормальных подгрупп тесно связана с понятием обобщенного центрального элемента. Напомним, что элемент $\langle x\rangle$ группы G называется обобщенным центральным элементом из G, если подгруппа $\langle x\rangle$ перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G. Теория обобщенного центрального элемента и обобщенного центра изложена в книге [88, гл. 1, секция 5]. См. также работу Р. Агравала [48].

А. Баллестер-Болинше и М.С. Педраза-Агуйлера в работе [78] ввели следующее определение: подгруппа H конечной группы G называется S-квазинормально вложенной в G, если для каждого простого p, делящего порядок H, силовская p-подгруппа из H является также силовской p-подгруппой некоторой S-квазинормальной подгруппы группы G. В работе [55] для изучения групп с заданными системами

S-квазинормально вложенных подгрупп авторы используют концепцию Q-центрального элемента. Следуя терминологии Л.А. Шеметкова [180], элемент x конечной группы G называется Q-центральным в G, если существует центральный главный фактор H/K группы G такой, что $x \in H \setminus K$ (см. также работы [52, 54, 53, 182]). В частности, в работе [55] доказана следующая теорема: *пусть H — нормальная подгруппа конечной группы G. Предположим, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из H S-квазинормально вложены в G. Тогда H имеет упорядоченную силовскую башню и каждый нефраттиниевый G-главный фактор из H является циклическим.*

Отметим, что следствиями данной теоремы являются основные результаты работ А. Баллестер-Болинше и М.С. Педраза-Агуйлеры [78], Я. Ли и Я. Ванга [156]. Понятно, что если подгруппа H группы G нормальна в G, то в группе G всегда найдется такая нормальная подгруппа T, что выполнено следующее условие:

$$G = HT \text{ и } T \cap H \le H_G. \qquad (*)$$

Таким образом, условие $(*)$ является еще одним обобщением нормальности. Такая идея была впервые рассмотрена в работе [171], где, в частности, было доказано: *группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы удовлетворяют условию* $(*)$ (в связи с этим см. также работу Бэра [66]). В дальнейшем в работе [203] подгруппы, удовлетворяющие условию $(*)$, были названы c-нормальными. В этой же работе была построена теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп. В дальнейшем понятие c-нормальности нашло применения и в работах многих других авторов (см., например, работы [63, 82, 175, 183, 41, 203, 205, 158, 134], а также обзор А.Н. Скибы [184]). В частности, в работе [203] изучались основные свойства c-нормальных подгрупп. Влияние c-нормальности минимальных подгрупп на строение основной группы изучалось также в работе [82]. Свойства c-нормальных максимальных и минимальных подгрупп силовских p-подгрупп исследовались в работах [158, 205, 134]. В работе [63] изучалось влияние c-нормальности некоторых подгрупп простого порядка группы G на строение основной группы.

Несмотря на то что S-квазинормальность и c-нормальность являются вполне различными обобщениями нормальности, существует много аналогичных результатов, которые были получены независимо для S-квазинормальных и c-нормальных подгрупп. Например, в статье Сринивазана [187] представлен следующий результат: *пусть G — группа* *и E — нормальная подгруппа в G со сверхразрешимой факторгруппой G/E. Если все максимальные подгруппы из силовских подгрупп группы E являются S-квазинормальными в G, то G сверхразрешима.* С другой стороны, аналогичная теорема для c-нормальных подгрупп была доказана в статье Я. Ванга [203].

А.Н. Скибой в работе [186] был проведен анализ некоторых из этих результатов на основе концепции слабо S-квазинормальных подгрупп. Пусть H — подгруппа группы G. Тогда, согласно [186], подгруппа H называется слабо S-квазинормальной, если в G существует такая субнормальная подгруппа T, что $TH = G$ и $H \cap T \leq H_{sG}$. Фактически все классификационные результаты, содержащие либо условие S-квазинормальности, либо условие c-нормальности, могут быть нетривиальным образом обобщены на основе концепции слабо S-квазинормальности (см. [186]). Следующая теорема А.Н. Скибы служит частичной иллюстрацией этого: *пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из $F^*(E)$ имеет такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H из P с порядком $|H| = |D|$ и с порядком $2|D|$ (если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) является слабо S-квазинормальной в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.* Следствиями данной теоремы являются многие известные результаты и, в частности, главные результаты работ [7, 56, 77, 82, 91, 122, 131, 116, 158, 174, 183, 187, 203]. Среди последних публикаций в этом направлении отметим работы А.Н. Скибы и О.В. Титова [24, 39, 40], а также китайских математиков Б. Ли и М. Джа [153].

В заключение этого раздела отметим, что наряду с S-квазинормальными подгруппами исследовались b-квазинормальные подгруппы, т. е. подгруппы перестановочные со всеми бипримарными подгруппами группы G (см., например, [27, 28, 29, 30]). В частности, в одной из первых работ в этом направлении [27] Э.М. Пальчик исследовал свойства b-квазинормальных подгрупп. Результаты Б. Хупперта, полученные в работе [141], дали толчок большому числу публикаций, связанных с исследованием влияния на строение основой группы максимальных подгрупп силовских подгрупп и с исследованием перестановочности таких подгрупп (см., например, [2, 3, 28, 29, 30, 62, 187, 204]). Здесь же отметим работы [34, 162, 164], где рассматривались m-перестановочные подгруппы [164], т. е. подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами.

1.2 Полунормальные подгруппы

Многими авторами предпринимались попытки исследования и применений и других типов обобщенно квазинормальных подгрупп. Прежде отметим работы [31, 107, 194, 202], где авторами исследовалось влияние на строение группы систем полунормальных подгрупп. Напомним, что подгруппа H группы G называется *полунормальной*, если H перестановочна со всеми подгруппами из некоторого добавления к H в G [194]. Впервые теория полунормальных подгрупп была представлена в 1988 году в работе [194] Х. Су, в которой в терминах полунормальных подгрупп были получены достаточные условия для сверхразрешимости. Позже в работе [202] Р. Ванг использовал полунормальные подгруппы для того, чтобы получить достаточные условия для нильпотентности. Т. Фогуель в работе [107] исследовал простые группы с позиции наличия в них собственных нетривиальных полунормальных подгрупп, а также доказал частичный аналог теоремы Шура-Цассенхауза для полунормальных подгрупп. Следует отметить, что отдельные свойства полунормальных подгрупп рассматривались также и в работе [31], где, в частности, была установлена сверхразрешимость группы, в которой все силовские подгруппы полунормальны. В дальнейшем в работе [26] В.С. Монахова и В.В. Подгорной исследовались группы, у которых каждая нециклическая силовская подгруппа является полунормальной, и было доказано, что такие группы также сверхразрешимы.

Среди последних публикаций в этом направлении отметим работы В.С. Монахова [25, 22], В.В. Подгорной [32], А.В. Шнырпаркова [46], С.Е. Прайгера [173], китайских математиков К. Жанга и Л. Ванга [208], Я. Ли, Л. Ванга и Я. Ванга [157], К. Ванга [200, 201]. В частности, в работе [25] В.С. Монахов установил признаки π-разрешимости конечных групп с полунормальной π-холловой подгруппой и доказал нильпотентность третьего коммутанта группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами. В работе [22] В.Н. Княгиной и В.С. Монахова исследовались группы, имеющие полунормальные подгруппы Шмидта четного порядка. В частности, была доказана разрешимость группы G, если все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта основной группы полунормальны. В недавних работах [46, 32] авторами исследуется строение конечных групп с максимальными m-полунормальными подгруппами, а также устанавливается сверхразрешимость конечных групп, в которых все вторые максимальные подгруппы полунормальны.

1.3 Группы с перестановочными i-максимальными подгруппами

Связь между i-максимальными подгруппами (где $i \geq 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении был получен в работе [140] Хуппертом, который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все её 2-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более чем на два простых числа. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах многих авторов (см., например, [1, 37, 48, 109, 146, 145, 195]). Позднее этот результат был значительно расширен. В частности, Манн в работе [166] анализирует структуру групп, чьи 2-максимальные подгруппы субнормальны. В работе [47] Агравал доказал, что группа G является сверхразрешимой, если все её 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами группы G.

Отмеченные выше результаты Хупперта получили свое дальнейшее развитие также и в работе [34] Л.Я. Полякова. В частности, было доказано, что если силовская подгруппа G_p группы G перестановочна со всеми максимальными (в этом случае $i = 1$) подгруппами группы G, то G_p инвариантна в G. Результаты этой работы позволили проследить за изменением свойств группы G по мере увеличения числа i. В частности, Э.М. Пальчик в работе [28] получил сравнительно полную информацию о группе для $i < 6$. В работе [34] Л.Я. Поляков также доказал, что группа является сверхразрешимой, если все её 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми её максимальными подгруппами. Полное описание для таких групп дает результат, полученный в недавней работе [114] Веньбинь Гоу, Е.В. Легчековой и А.Н. Скибой: *каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами из G тогда и только тогда, когда группа G является либо нильпотентной, либо сверхразрешимой группой Шмидта с порядком pq^{α}, где $p > q$*. Отметим также, что в работах [151, 115] авторами было получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а также групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. В недавней публикации Ю.В. Луценко и А.Н. Скибы

[4] получено описание конечных ненильпотентных групп G, любые две 2-максимальные подгруппы которых перестановочны (в частности нормальны в группе G), а также конечных ненильпотентных групп G, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны (в частности нормальны в группе G).

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах (см., например, [23, 133, 130, 128, 152]). В работе [23] авторы изучают группы с некоторыми свойствами перестановочности их 2-максимальных подгрупп, а в работе [130] даны некоторые условия сверхразрешимости и нильпотентности групп посредством X-полуперестановочности либо 2-максимальных подгрупп, либо максимальных подгрупп.

1.4 X-квазинормальные подгруппы

Еще одно обобщение понятия квазинормальной подгруппы было рассмотрено в рамках теории X-перестановочных подгрупп [119, 128, 130, 185]. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\emptyset \neq X \subseteq G$. Тогда A называется *X-перестановочной подгруппой* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$ [130]. Подгруппа A группы G называется X-перестановочной или X-квазинормальной в G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами из G [128]. Заметим, что в предельном случае, когда $X = G$, X-перестановочная подгруппа называется условно перестановочной. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе [119], и они уже нашли ряд интересных приложений (см., например, [7, 118, 119, 121, 56]).

Значение понятия X-квазинормальности связано, прежде всего, с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-квазинормальности для подгрупп (см., в частности, [6, 7, 56, 119, 121, 128]). Например, используя это понятие, можно дать следующую интерпретацию классической теоремы Холла о разрешимых группах (см. [137, II, теорема 2.4]): *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две холловы подгруппы G-квазинормальны.* Здесь следует отметить также следующий критерий разрешимости, основанный на результате, полученном в работе [57]: *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы G-квазинормальны* [6]. Характеризации сверхразрешимых групп с определенными условиями X-квазинормальности для 2-максимальных подгрупп получены в работах [130, 152, 150].

В работе Хупперта [141] было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской системы группы G. Этот результат дал толчок большому числу исследований, в которых изучалось влияние максимальных подгрупп силовских подгрупп на строение основной группы (см. более подробно обзор [184]). В работе [127] доказана теорема, которая дает точное описание сверхразрешимых групп G как групп, в которых максимальные подгруппы силовских подгрупп X-квазинормальны с максимальными подгруппами из G. Отметим, что в работе [199] было дано описание групп, в которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп нормальны. В связи с этим результатом в работе [127] было исследовано строение групп, в которых максимальные подгруппы силовских подгрупп X-квазинормальны со всеми силовскими подгруппами.

Джонсон в работе [147] рассматривал группы G, в которых все неразложимые в пересечение подгруппы группы G имеют своим индексом степень простого числа. Он доказал, что такие группы сверхразрешимы [147]. Позже в книге [206] было получено описание групп, в которых все подгруппы являются группами с условием Джонсона. В одной из последних публикаций в этом направлении [124] была доказана теорема, дающая точное описание групп с условием Джонсона в терминах X-квазинормальности в общем случае.

Заметим также, что одно из наиболее интересных свойств X-перестановочных подгрупп приведено в недавней работе Го Веньбиня, К.П. Шама и А.Н. Скибы [126], в которой доказан аналог теоремы Шура-Цассенхауза для X-квазинормальных подгрупп.

Согласно теореме Кегеля, *если группа G является произведением двух нильпотентных групп, то она разрешима* [148]. Тем не менее такое произведение нильпотентных групп может не являться сверхразрешимой группой. В работе [121] получены некоторые дополнительные условия, при которых произведение двух нильпотентных групп является сверхразрешимой группой.

Характеризации классов групп в терминах X-квазинормальных подгрупп можно найти также в работах [56, 7, 130, 119, 123, 120, 128, 121, 129, 152]. Например, в работе [6] были получены новые характеризации нильпотентных групп, в частности, доказана следующая теорема: *группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда группа G имеет нильпотентную абнормальную подгруппу X такую, что любые две силовские подгруппы из G X-квазинормальны.* Напомним, что подгруппа H группы G называется абнормальной, если $x \in< H, H^x >$

для всех $x \in G$. В работе [130] приводится следующее обобщение X-перестановочности: *подгруппа A является X-полуперестановочной в G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами некоторого добавления к A в G.* В работе [130] дается также описание дисперсивных по Оре групп в терминах X-полуперестановочных подгрупп. В работе [117] получены критерии сверхразрешимости и p-нильпотентности групп в терминах X_s-квазинормальных подгрупп. Напомним, что подгруппа H группы G называется X_s-квазинормальной в G, если для каждой силовской подгруппы P из G существует элемент $x \in X$ такой, что $HP^x = P^xH$.

1.5 Тотально и взаимно перестановочные подгруппы

В ряде работ изучалась группа, представимая в виде $G = AB$, где A и B — некоторые подгруппы. На подгруппы A и B накладывались различные ограничения. Так Асаадом и Шааланом в их совместной работе был получен следующий результат, давший значительный импульс к исследованию групп с заданными системами перестановочных подгрупп [65]: *предположим, что $G = AB$ является произведением двух сверхразрешимых подгрупп A и B. Если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B, то группа G сверхразрешима.* Идеи этой работы и, в частности, отмеченный здесь результат из этой работы были развиты во многих направлениях в исследованиях многих авторов, где на основе перестановочности были описаны многие важные классы конечных и бесконечных групп (см., например, [50, 79, 70, 94, 138, 161]).

В последние годы интерес сконцентрировался на произведениях со свойствами строгой перестановочности и, в частности, тотально и взаимно перестановочных произведений [50, 196, 69, 68, 70, 72, 75, 76, 79, 80, 82, 85, 84, 86, 93, 95, 96, 97, 98, 138, 188, 192, 193].

Напомним, что подгруппы A и B *взаимно перестановочны, если* A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A; подгруппы A и B *тотально перестановочны*, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B. В частности, в недавней работе Бейдлемана и Хайнекена [83] установлено, что если $G = AB$, где каждая подгруппа группы A перестановочна с каждой подгруппой из G, то $(A \cap B)/(A \cap B)_G$ является нильпотентной группой, что обобщает отмеченный выше результат Ито и Сепа. В работах [196, 167] Балестер-Болинше, Бейдлеманом, Коси и Хейнекеном изучалось строение взаимно перестановочного произведения двух нильпотентных групп.

Отметим, что в работах [71, 106, 74] изучались m-перестановочные произведения. Напомним, что группа G называется m-перестановочным произведением подгрупп H и K, если $G = HK$ и H перестановочна с каждой максимальной подгруппой из K и K перестановочна с каждой максимальной подгруппой из H. Например, в работе [106] доказана разрешимость конечной группы G, которая является m-перестановочным произведением двух разрешимых подгрупп.

Говоря о развитии исследований различных типов обобщенно квазинормальных подгрупп, нельзя не отметить понятие CAP-подгруппы. Пусть A — подгруппа группы G, H и K — нормальные подгруппы группы G такие, что $K \leq H$. Тогда подгруппа A покрывает факторгруппу H/K, если $H \leq HK$; подгруппа A изолирует факторгруппу H/K, если $H \cap A \leq K$. Подгруппа A группы G имеет свойства покрытия-изолирования (сокращенно A — CAP-подгруппа группы G), если она либо покрывает, либо изолирует главный фактор группы G (см. определение (10.8) в [103, гл. A]).

Легко видеть, что всякая квазинормальная подгруппа является CAP-подгруппой. Такое обобщение квазинормальных подгрупп нашло свое применение в работе Эскуэрро [105], где были даны некоторые характеризации p-сверхразрешимых и разрешимых групп G, основанные на предположении, что все максимальные подгруппы некоторых силовских подгрупп из G имеют свойство покрытия-изолирования. В работе X. Гоу и К.Р. Шама [133] доказана разрешимость групп при условии, что некоторые ее максимальные или 2-максимальные подгруппы являются CAP-подгруппами. В этом направлении отметим работы [132, 135].

В ряде недавно опубликованных работ также исследовались группы со свойством покрытия-изолирования некоторых систем подгрупп (см., например, [196, 72, 83, 172]).

1.6 Общие понятия и используемые результаты

Напомним, что подгруппы H и T группы G называются *перестановочными*, если $HT = TH$. Подгруппа H группы G называется *перестановочной* [189] или *квазинормальной* [171] в группе G, если H перестановочна с каждой подгруппой группы G. Подгруппа H группы G называется *S-квазинормальной в* G, если $HP = PH$ для всех силовских подгрупп P в G.

Цепью называют совокупность вложенных друг в друга подгрупп. Цепь, состоящая из конечного числа членов и проходящая через единицу, называется рядом подгрупп. Ряд подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = 1$ называется:

субнормальным, если $H_i \lhd H_{i-1}$ для любого $i > 0$;

нормальным, если $H_i \lhd G$ для любого i;

главным, если H_i/H_{i+1} является минимальной нормальной подгруппой в G/H_{i+1} для всех $i = 0, 1, \ldots, t-1$.

1.6.1. Лемма. *Пусть G — группа и $A \leq K \leq G$, $B \leq G$. Тогда*

(1) *Если A и B являются субнормальными подгруппами группы G, то $\langle A, B \rangle$ — субнормальная подгруппа в G* [103, глава A, лемма 14.4].

(2) *Предположим, что A — нормальная подгруппа в G. Тогда K/A субнормальна в G/A тогда и только тогда, когда K субнормальна в G* [103, глава A, лемма 14.1].

(3) *Если A субнормальна в G, то $A \cap B$ субнормальна в B* [103, глава A, лемма 14.1].

(4) *Если A — субнормальная холлова подгруппа группы G, то A* нормальна в G [207].

(5) *Если A субнормальна в G и B — холлова π-подгруппа группы G, то $A \cap B$ — холлова π-подгруппа группы A* [207].

(6) *Если A субнормальна в G и A — π-подгруппа группы G, то $A \leq O_\pi(G)$* [207].

(7) *Если A субнормальна в G и B — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $B \leq N_G(A)$* [103, глава A, лемма 14.5].

(8) *Если A субнормальная разрешимая (нильпотентная) подгруппа группы G, то A содержится в некоторой разрешимой (соответственно, в некоторой нильпотентной) нормальной подгруппе группы G* [207].

(9) *Если A — субнормальная подгруппа группы G и индекс $|G : A|$ — p'-число, то A содержит все силовские p-подгруппы из G* [207].

1.6.2. Лемма [149]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) *Если H S-квазинормальна в G, то H S-квазинормальна в K.*

(2) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H S-квазинормальна в G тогда и только тогда, когда K S-квазинормальна в G.*

(3) *Если H S-квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

1.6.3. Лемма [171]. *Пусть G — группа и $H \leq G$. Тогда если H квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

1.6.4. Лемма [177]. *Пусть H — p-группа для некоторого простого p. Тогда H — S-квазинормальная подгруппа в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

1.6.5. Лемма [44, глава 1, лемма 3.9]. *Если H/K — главный фактор группы G и p — простой делитель $|H/K|$, то $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.*

1.6.6. Лемма [44, глава 3, лемма 11.6]. *Пусть $G = G_1G_2$. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p-подгруппы P, P_1, P_2 соответственно в G, G_1, G_2, что $P = P_1P_2$.*

1.6.7. Лемма [165]. *Для любой квазинормальной подгруппы H группы G имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.*

1.6.8. Лемма [104]. *Если разрешимая группа G имеет 2-силовскую подгруппу P, которая не имеет секции изоморфной Q_8, то*

$$P \cap Z(G) \cap K_\infty(G) = 1.$$

1.6.9. Лемма [175]. *Пусть G — группа с нормальной подгруппой N такой, что $G = QN$ для некоторой подгруппы Q в G. Если M — максимальная подгруппа группы G такая, что $N \leq M$, то $M \cap Q$ — максимальная подгруппа в Q.*

Группу G называют:

p-замкнутой, если силовская p-подгруппа группы G нормальна в группе G;

p-нильпотентной, если p'-холлова подгруппа группы G нормальна в группе G;

p-разрешимой, если существует нормальный ряд, факторы которого либо p-группы, либо p'-группы;

p-сверхразрешимой, если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо циклической группой;

нильпотентной, если все ее силовские подгруппы нормальны;

разрешимой, если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$;

сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все индексы которого являются простыми числами.

Классы групп, т. е. совокупности групп, замкнутые относительно изоморфизмов, обозначаются прописными готическими буквами. Так же обозначаются формации, т. е. классы групп, замкнутые относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что и $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп и G — группа, тогда:

$G^{\mathfrak{F}}$ — *$\mathfrak{F}$–корадикал группы G*, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$;

$G^{\mathfrak{U}}$ — *сверхразрешимый корадикал группы G*, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

$\mathfrak{F}$-абнормальной называется максимальная подгруппа M группы G, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$, где $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация.

$\mathfrak{F}$-гиперцентральной подгруппой в G называется разрешимая нормальная подгруппа N группы G, если N обладает

$$1 \lhd N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_r = N$$

субнормальным рядом таким, что

(1) каждый фактор N_{i+1}/N_i является главным фактором группы G;

(2) если порядок фактора N_{i+1}/N_i есть степень простого числа p_i, то $G/C_G(N_{i+1}/N_i) \in \mathfrak{F}(p_i)$.

Для группы P мы обозначаем $\Omega(P) = \Omega_1(P)$, если $p > 2$, и $\Omega(P) =< \Omega_1(P), \Omega_2(P) >$, если $p = 2$, где $\Omega_i(P) =< x \in P | o(x) = p^i >$.

1.6.10. Лемма [99]. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/K \in \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Если $\Omega(P) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, где P — силовская p-подгруппа в K, то $G/O_{p'}(K) \in \mathfrak{F}$.*

1.6.11. Лемма [186, Лемма 2.16]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс всех сверхразрешимых групп (содержащая класс всех нильпотентных групп), и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E — циклическая подгруппа (если E содержится в $Z(G)$ соответственно), то $G \in \mathfrak{F}$.*

1.6.12. Лемма [44, теорема 24.2]. *$P = G^{\mathfrak{N}}$ — p-группа для некоторого простого числа p и справедливы следующие утверждения:*

(a) *$P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G.*

(b) *P имеет экспоненту p или экспоненту 4 (если p=2 и P — неабелева группа).*

1.6.13. Лемма [44, с. 36]. *Класс всех метанильпотентных групп является насыщенной формацией.*

1.6.14. Лемма [44, с. 35]. *Класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией.*

1.6.15. Лемма [44, с. 35]. *Класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией.*

1.6.16. Лемма [44, с. 35]. *Класс всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией.*

Подгруппа H_{sG}, порожденная всеми теми подгруппами группы H, которые S-квазинормальны в G, называется *s-ядром* подгруппы H в группе G.

1.6.17. Лемма [186]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) *H_{sG} — S-квазинормальная подгруппа в G и $H_G \leq H_{sG}$.*

(2) *$H_{sG} \leq H_{sK}$.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда $(K/H)_{s(G/H)} = K_{sG}/H$.*

(4) *Если H является либо силовской подгруппой в G, либо максимальной подгруппой в G, то $H_{sG} = H_G$.*

Добавлением к подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$.

Минимальной нормальной подгруппой группы $G \neq 1$ называется неединичная нормальная подгруппа группы G, не содержащая собственных неединичных нормальных подгрупп группы G.

Второй максимальной подгруппой или 2-максимальной подгруппой группы G называется максимальная подгруппа некоторой максимальной подгруппы группы G.

1.6.18. Лемма [181, лемма 2.10]. *Пусть G — группа, p — наименьший простой делитель порядка группы $|G|$ и P — нециклическая силовская p-подгруппа группы G. Пусть $E \neq 1$ — нормальная подгруппа из G, содержащаяся в P. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G или каждая максимальная подгруппа из E имеет p-нильпотентное добавление в G, то группа G p-нильпотентна.*

Группа G называется *дисперсивной по Оре*, если существуют подгруппы $P_1, P_2, \ldots, P_t$, такие что P_i — силовская p_i-подгруппа группы G (где $p_1 > p_2 > \ldots > p_t$ — различные простые делители $|G|$) и $P_1P_2 \ldots P_k$ нормальна в G для всех $k = 1, 2, \ldots, t$.

2 ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУПП ПО СВОЙСТВАМ ИХ Q-ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУПП

2.1 Определение, примеры и общие свойства Q-вложенных подгрупп

Напомним, что подгруппа H_{sG}, порожденная всеми теми подгруппами группы H, которые S-квазинормальны в G, называется *s-ядром* подгруппы H в группе G. Это понятие было использовано в работе А.Н. Скибы [186], где также были рассмотрены приложения s-ядер при изучении различных классов групп.

Основным понятием данной главы и работы в целом является следующее обобщение S-квазинормальных подгрупп.

2.1.1. Определение. Пусть H — подгруппа конечной группы G. Тогда H называется *Q-вложенной в G*, если в G существует такая квазинормальная подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.

Легко видеть, что всякая S-квазинормальная подгруппа является Q-вложенной. Рассмотрим следующий пример.

2.1.2. Пример. *Пусть H — S-квазинормальная подгруппа группы G. Тогда $H_{sG} = H$, и мы имеем $G = HG$ и $G \cap H = H = H_{sG}$.*

Следовательно, всякая S-квазинормальная подгруппа является Q-вложенной. В частности, квазинормальная подгруппа также является Q-вложенной.

Еще один важный подкласс класса Q-вложенных подгрупп составляют так называемые c-нормальные подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется c-нормальной в G, если в группе G существует такая нормальная подгруппа T, что $G = HT$ и $T \cap H \leq H_G$ (Оре [171], Ванг [203]). Рассмотрим следующий пример, показывающий, что условие Q-вложенности обобщает условие c-нормальности.

2.1.3. Пример. *Если H — c-нормальная подгруппа в G и T такая нормальная в G подгруппа, что $G = TH$ и $T \cap H \leq H_G$, то H является Q-вложенной в G подгруппой ввиду $H_G \leq H_{sG}$.*

Следующий простой пример показывает, что в общем случае множество всех Q-вложенных подгрупп шире множества всех S-квазинормальных подгрупп и множества всех c-нормальных подгрупп.

2.1.4. Пример. *Пусть $P = M_m(2) =< x, y | x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = = x^{1+2^{m-2}} >$, где $m > 3$. И пусть $A =< x >$, $B =< y >$. Тогда $P = [A]B$ и $|B| = 2$. Ввиду [111, с. 191], $Z(P)$ — циклическая группа порядка 2^{m-2}.*

Ясно, что B — нормальная подгруппа в $Z(P)B$. Пусть Z_3 — группа простого порядка 3 и $G = Z_3 \wr P = [K]P$, где K — база регулярного сплетения G. Тогда подгруппа A является Q-вложенной в G, но не S-квазинормальной и не c-нормальной в G.

Опишем наиболее общие свойства Q-вложенных подгрупп.

2.1.5. Лемма [11, 16, 18]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) *предположим, что H — нормальная в G подгруппа. Тогда K/H Q-вложена в G/H тогда и только тогда, когда K является Q-вложенной подгруппой в G;*

(2) *если H Q-вложена в G, то H Q-вложена в K;*

(3) *предположим, что H нормальна в G. Тогда подгруппа HE/H Q-вложена в G/H для каждой Q-вложенной в G подгруппы E такой, что $(|H|, |E|) = 1$;*

(4) *если H является S-квазинормальной подгруппой в G, то H Q-вложена в G;*

(5) *пусть H — p-подгруппа для некоторого простого p. Предположим, что H Q-вложена, но не S-квазинормальна в G. Тогда в G имеется такая нормальная подгруппа M, что $|G : M| = p$ и $G = HM$;*

Доказательство. (1) **Необходимость.** Предположим, прежде всего, что K/H является Q-вложенной подгруппой в G/H, и пусть T/H — квазинормальная подгруппа в G/H такая, что

$$(K/H)(T/H) = G/H \text{ и } (T/H) \cap (K/H) \leq (K/H)_{s(G/H)}.$$

По лемме 1.6.2(3), T/H субнормальна в G/H. По лемме 1.6.1(2), подгруппа T субнормальна в G. С другой стороны, мы имеем

$$KT = G \text{ и } T \cap K \leq K_{sG},$$

ввиду леммы 1.6.17(3). Следовательно, подгруппа K Q-вложена в G.

Достаточность. Теперь предположим, что для некоторой квазинормальной подгруппы T из G мы имеем

$$KT = G \text{ и } T \cap K \leq K_{sG}.$$

Тогда по лемме 1.6.1(1), HT является субнормальной подгруппой в G, поэтому, по лемме 1.6.1(2), HT/H субнормальна в G/H. С другой стороны,

$$(HT/H)(K/H) = G/H$$

и

$$(HT/H) \cap (K/H) = (HT \cap K)/H =$$

$$= H(T \cap K)/H \le HK_{sG}/H = K_{sG}/H = (K/H)_{s(G/H)},$$

по лемме 1.6.17(3). Таким образом, K/H Q-вложена в G/H.

(2) Пусть T — квазинормальная подгруппа в G такая, что

$$HT = G \text{ и } T \cap H \le H_{sG}.$$

Тогда

$$K = K \cap HT = H(K \cap T)$$

и $K \cap T$ квазинормальна в K. По лемме 1.6.17(2), мы видим, что

$$(K \cap T) \cap H \le H_{sG} \le H_{sK}.$$

Следовательно, H Q-вложена в K.

(3) Предположим, что E Q-вложена в G, и пусть T — квазинормальная подгруппа в G такая, что

$$ET = G \text{ и } T \cap E \le E_{sG}.$$

Очевидно, $H \le T$, значит

$$T \cap HE = H(T \cap E) \le H(E_{sG}) \le (HE)_{sG}.$$

Следовательно, HE Q-вложена в G. Согласно (2), HE/H является Q-вложенной подгруппой в G/H.

(4) Пусть H — S-квазинормальная подгруппа группы G. Тогда $H_{sG} = H$, и мы имеем

$$G = HG \text{ и } G \cap H = H = H_{sG}.$$

Итак, H Q-вложена в G.

(5) Согласно условию, в группе G имеется подгруппа T такая, что

$$HT = G \text{ и } T \cap H \le H_{sG}.$$

По лемме 1.6.3, подгруппа T субнормальна в G, и поэтому $T \le K$, где K — некоторая собственная нормальная подгруппа группы G. Значит, G/K — p-группа, и поэтому в G имеется нормальная максимальная подгруппа M такая, что $HM = G$. Лемма доказана.

2.2 Некоторые базисные леммы

Отметим несколько свойств Q-вложенных подгрупп.

2.2.1. Лемма [142]. *Пусть N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G. Предположим, что в группе N имеется такая подгруппа D, что $1 < |D| < |N|$, и каждая подгруппа H группы N, порядок которой равен порядку подгруппы D, является Q-вложенной подгруппой в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

Доказательство. Прежде предположим, что некоторая подгруппа H из N с $|H| = |D|$ не является S-квазинормальной в G. Поскольку по условию, H — Q-вложенная в G подгруппа, то, согласно лемме 2.1.5(5), в группе G имеется нормальная подгруппа T такая, что

$$|G : T| = p \text{ и } HT = G.$$

Тогда $NT = G$, и поэтому $T \cap N$ — максимальная подгруппа группы N, которая, очевидно, нормальна в G. Следовательно, мы можем считать, что каждая подгруппа H группы N с порядком $|H| = |D|$ является S-квазинормальной в G.

Пусть M — максимальная подгруппа в N. Поскольку M является произведением некоторых S-квазинормальных в G подгрупп группы N, то M S-квазинормальна в G. Ввиду леммы 1.6.4,

$$O^p(G) \leq N_G(M),$$

и поэтому

$$|G : N_G(M)| = p^a \text{ для некоторого } a \in \mathbb{N}.$$

Значит, если $M_1, \ldots, M_t$ — множество всех максимальных подгрупп группы N, то p делит t, что противоречит [139, глава III, лемма 8.5(d)]. Лемма доказана.

2.2.2. Лемма [142]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и пусть G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $P = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда $P = G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа для некоторого простого числа p, и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P — неабелевая группа), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, Q-вложена в G, то $|P/\Phi(P)| = p$.*

Доказательство. Согласно 1.6.12, $P = G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа для некоторого простого числа p, и справедливы следующие утверждения: (1) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G; (2) P имеет экспоненту p или экспоненту 4 (если $p = 2$ и P — неабелевая группа). Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P — неабелевая группа), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, Q-вложена в G. Пусть $\Phi = \Phi(P)$ и X/Φ — подгруппа в P/Φ простого порядка

$$x \in X \setminus \Phi \text{ и } L = \langle x \rangle.$$

Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$, и поэтому, по условию, либо L имеет p-нильпотентное добавление T в G, либо подгруппа L Q-вложена в G. В первом случае мы можем предполагать, что $T \neq G$, и поэтому $T\Phi \neq G$, поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$. Следовательно, $LT = G$

$$\text{и } (T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi.$$

Значит,

$$|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p,$$

и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Теперь предположим, что L является Q-вложенной подгруппой в G. Прежде допустим, что L не является S-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, по лемме 2.1.5(5), группа G имеет нормальную подгруппу T такую, что

$$LT = G \text{ и } |G : T| = p.$$

В этом случае $L \nleq T$. С другой стороны, так как G/T — p-группа, то $L \leq P \leq T$ по условию. Данное противоречие показывает, что подгруппа L является S-квазинормальной в G

$$\text{и } L\Phi/\Phi = X/\Phi$$

является S-квазинормальной подгруппой в G/Φ, по лемме 1.6.2(2). Теперь, по лемме 2.2.1, мы можем заключить, что $|P/\Phi(P)| = p$. Лемма доказана.

Докажем следующую лемму, которая понадобится для доказательства теоремы 2.3.3.

2.2.3. Лемма [11]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа в G. Если каждая минимальная подгруппа из $P \cap G'$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является Q-вложенной в G, и в случае, когда $p = 2$ и P имеет секцию изоморфную*

Q_8, каждая циклическая подгруппа из $P \cap G'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, Q-вложена в G, то G p-нильпотентна.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *В группе G нет такой нормальной максимальной подгруппы M, что $|G : M| = p$.*

Пусть M — нормальная максимальная подгруппа в G такая, что $|G : M| = p$. Тогда M удовлетворяет условию нашей теоремы. Действительно, так как $M_p = P \cap M$ — силовская p-подгруппа в M, то

$$M_p \cap M' \subseteq P \cap G'.$$

Пусть теперь K — произвольная минимальная подгруппа из $M_p \cap M'$. Тогда, согласно условию теоремы, либо K имеет p-нильпотентное добавление T в G и в этом случае

$$M = M \cap KT = K(M \cap T),$$

где $M \cap T$ — p-нильпотентное добавление к подгруппе K в M, либо K Q-вложена в G, а значит, согласно лемме 2.1.5(2), подгруппа K из $M_p \cap M'$ Q-вложена в M. Предположим теперь, что M_p имеет секцию изоморфную Q_8. Тогда P может иметь секцию изоморфную Q_8. Следовательно, ввиду условия теоремы и на основании того, что показано выше, каждая циклическая подгруппа из $M_p \cap M'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в M, Q-вложена в M.

Итак, условие теоремы наследуется подгруппой M и $|M| < |G|$. Поэтому M — p-нильпотентная группа. Тогда

$$M = [M_{p'}]M_p.$$

Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в M, которая нормальна в G, и, очевидно, $M_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы G, то G — p-нильпотентная группа. Полученное противоречие доказывает утверждение (1).

(2) $O^p(G) = G$.

Пусть $O^p(G) \neq G$. Тогда мы можем рассмотреть неединичную факторгруппу $G/O^p(G)$. Пусть $M/O^p(G)$ — максимальная подгруппа в $G/O^p(G)$. Тогда M является максимальной подгруппой в G такой, что M нормальна в G и $|G : M| = p$, что противоречит (1).

(3) *Все минимальные подгруппы из $P \cap G'$, не имеющие p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальны в G, и если P*

имеет секцию изоморфную Q_8, то каждая циклическая подгруппа из $P \cap G'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G.

Пусть A — минимальная подгруппа из $P \cap G'$ и A не имеет p-ниль потентного добавления в G. Тогда, согласно условию теоремы, подгруппа A является Q-вложенной в G. Допустим, что A не является S-квазинормальной в G подгруппой. Тогда, по лемме 2.1.5(5), существует максимальная подгруппа M в G такая, что M — нормальная подгруппа из G и $|G : M| = p$, что противоречит утверждению (1). Значит, всякая минимальная подгруппа из $P \cap G'$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G. Если же P имеет секцию изоморфную Q_8, то аналогично можно показать, что каждая циклическая подгруппа из $P \cap G'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G.

(4) *Группа G является группой Шмидта.*

Так как условие теоремы переносится на подгруппы группы G, то все собственные подгруппы группы G p-нильпотентны, а сама группа G не p-нильпотентна согласно выбору группы G. В силу теоремы [176, теорема 10.3.3] мы видим, что G должна быть минимальной ненильпотентной группой и $G = [P]Q$, где Q — циклическая силовская q-подгруппа из G и $q \neq p$.

(5) *Все минимальные подгруппы из $P \cap G'$, не имеющие p-нильпотентного добавления в G, нормальны в G, и если P имеет секцию изоморфную Q_8, то каждая циклическая подгруппа из $P \cap G'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, нормальна в G.*

Пусть A — минимальная подгруппа из $P \cap G'$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G. Согласно утверждению (3) и леммы 1.6.4, имеем

$$O^p(G) \leq N_G(A).$$

Значит, в силу (2) подгруппа A нормальна в G. Если P имеет секцию изоморфную Q_8, то и каждая циклическая подгруппа из $P \cap G'$ с порядком 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, нормальна в G.

(6) *Всякая подгруппа A из P, имеющая порядок p, содержится в центре группы G.*

Пусть A — подгруппа группы P, имеющая порядок p. Тогда $Aut(A)$, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, является циклической порядка $p-1$. Так как, согласно (5), подгруппа A является нормальной в группе G, то

$$N_G(A)/C_G(A) = G/C_G(A) \simeq T \subseteq Aut(A).$$

Но p — наименьший простой делитель порядка группы G. Значит, $C_G(A) = G$.

(7) *P не имеет секций изоморфных Q_8.*

Пусть P имеет секцию изоморфную Q_8, $\Phi = \Phi(P)$ и X/Φ — подгруппа простого порядка в P/Φ

$$x \in X/\Phi \text{ и } L = < x > .$$

Тогда, согласно лемме 1.6.12(b), либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$, и поэтому, по условию теоремы, либо L имеет p-нильпотентное добавление T в G, либо подгруппа L Q-вложена в G. В первом случае мы можем предполагать, что $T \neq G$, и поэтому поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то

$$(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi.$$

Значит, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$, и поскольку

$$G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi),$$

то $|P/\Phi(P)| = p$. Во втором случае, в силу (5), L — нормальная подгруппа в G. Значит, $X = L\Phi$ нормальна в G. Ввиду леммы 1.6.12(a), имеем

$$X/\Phi = P/\Phi \text{ и } |P/\Phi(P)| = p.$$

Следовательно, $P/\Phi \leq Z(G/\Phi)$ (см. доказательство (6)), и поэтому $G^{\mathfrak{N}} \subseteq \Phi$, что противоречит тому, что

$$\Phi \subset G^{\mathfrak{N}} = P.$$

Заключительное противоречие.

Ввиду (7), P не имеет секцию изоморфную Q_8. Тогда, по лемме 1.6.8, мы имеем

$$\Omega_1(P) \leq P \cap G^{\mathfrak{N}} \cap Z(G) = P \cap Z(G) = 1,$$

получили противоречие утверждению (6), что и завершает доказательство леммы.

2.3 Критерии принадлежности группы насыщенной формации

Основной результат работы А.Н. Скибы и О.В. Титова [40] допускает следующее обобщение.

2.3.1. Теорема [142]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из E имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H из P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в группе G, Q-вложена в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Но прежде мы докажем следующий факт, который является одним из главных этапов в доказательстве теоремы 2.3.1.

2.3.2. Теорема [142, 16]. *Пусть G — группа с нормальной подгруппой E такой, что факторгруппа G/E p-нильпотентна и p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Предположим, что силовская p-подгруппа P из E содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H из P порядка, равного порядку подгруппы D, и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа), не имеющая p-нильпотентного добавления, является Q-вложенной в G. Тогда G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

(1) $O_{p'}(E) = 1$.

Предположим, что $O_{p'}(E) \neq 1$, и рассмотрим факторгруппу $G/O_{p'}(E)$. Покажем, что $G/O_{p'}(E)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. По условию теоремы p делит порядок группы E, значит, p делит порядок группы $E/O_{p'}(E)$.

Пусть $P^*/O_{p'}(E)$ является силовской p-подгруппой в $E/O_{p'}(E)$ и P — такая силовская p-подгруппа группы P^*, что $P^* = PO_{p'}(E)$. Тогда P является силовской подгруппой в E и поэтому, по гипотезе, P имеет подгруппу D такую, что

$$1 < |D| < |P|,$$

и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа) либо имеет p-нильпотентное добавление T в G, либо Q-вложена в G. Пусть $H^*/O_{p'}(E)$ подгруппа в $P^*/O_{p'}(E)$ с порядком $|H^*/O_{p'}(E)| = |D|$. Тогда

$$H^* = [O_{p'}(E)]H,$$

где H является силовской p-подгруппой в H^*. Ясно, что $|H| = |D|$, и либо

$$H^*/O_{p'}(E) = HO_{p'}(E)/O_{p'}(E)$$

имеет p-нильпотентное добавление

$$TO_{p'}(E)/O_{p'}(E) \simeq T/(T \cap O_{p'}(E))$$

в $G/O_{p'}(E)$, либо, ввиду леммы 2.1.5(4), является Q-вложенной в $G/O_{p'}(E)$.

Итак, $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. В силу минимальности (G, E) мы видим, что $G/O_{p'}(E)$ p-нильпотентна, и поэтому G — p-нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G.

(2) *Либо $E = G$, либо $E = P$.*

Предположим, что $P \neq E \neq G$. Покажем, что условия теоремы справедливы для пары (E, E). Пусть P — силовская подгруппа в E. По условию, P имеет подгруппу D такую, что

$$1 < |D| < |P|,$$

и каждая подгруппа H группы P с порядком $|H| = |D|$, и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа) либо имеет p-нильпотентное добавление T в G, либо Q-вложена в G. Пусть имеет место первый случай. Так как

$$E = E \cap HT = H(E \cap T),$$

то $E \cap T$ – p-нильпотентное добавление для H в E. Во втором случае, ввиду леммы 2.1.5(3), H – Q-вложенная в E подгруппа.

Итак, гипотеза выполняется для (E, E) и E p-нильпотентна согласно выбору (G, E). Но, согласно (1), $O_{p'}(E) = 1$. Следовательно, $E = P$, противоречие.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Допустим, что

$$V = O_{p'}(G) \neq 1.$$

Тогда, ввиду (1) и (2), $E = P$. Согласно лемме 2.1.5(4), гипотеза выполняется для $(G/V, EV/V)$, и поэтому, по выбору пары (G, E), имеем G/V — p-нильпотентная группа. Таким образом, G p-нильпотентна, противоречие.

(4) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. Прежде покажем, что G не имеет p-замкнутой подгруппы Шмидта вида

$$H = [H_p]H_q, \text{ где } H_p \leq E.$$

Действительно, в противном случае, по лемме 2.1.5(3), каждая циклическая подгруппа из H с порядком p и порядком 4 (если H_p –

неабелева 2-группа), не имеющая p-нильпотентного добавления в H, Q-вложена в H. Тогда, по лемме 2.2.2,

$$|H_p/\Phi(H_p)| = p,$$

что противоречит минимальности p.

Теперь предположим, что $E = G$. Тогда, согласно (1), G не является p-нильпотентной и, значит, имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта, противоречие. Следовательно, $E = P$. Пусть $L = G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все p-нильпотентные группы, и $\Phi = \Phi(L)$. Понятно, что $L \leq E$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая L. Тогда факторгруппа

$$G/E \simeq M/M \cap E$$

является p-нильпотентной и условия теоремы справедливы для M. Тогда M p-нильпотентна, по выбору группы G, и поэтому, согласно лемме 2.2.2, имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 1.6.11, факторгруппа G/Φ p-нильпотентна. Но тогда $L \leq \Phi$, и поэтому $L = \Phi$, противоречие. Следовательно, $|D| > p$.

(5) *Предположим, что $|P : D| > p$. Тогда G не имеет нормальную максимальную подгруппу M такую, что $|G : M| = p$ и $G = MP$.*

Пусть G имеет нормальную максимальную подгруппу M с индексом $|G : M| = p$. Так как $|P : D| > p$, то условия теоремы выполняются для G относительно подгруппы $E \cap M$, по лемме 2.1.5(3). Но

$$|G||E \cap M| < |G||E|,$$

что противоречит выбору (G, E). Следовательно, имеем (5).

(6) *Предположим, что $|P : D| > p$. Тогда каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G.*

Предположим, что P имеет подгруппу H такую, что $|H| = |D|$, и H не имеет p-нильпотентного добавления в G и не является S-квазинормальной в G. Тогда, по лемме 2.1.5(5), G имеет такую нормальную подгруппу M, что

$$HM = G \text{ и } |G : M| = p,$$

что противоречит (5). Следовательно, каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G.

(7) *Для каждой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P, имеет место $|N| \le |D|$.*

Предположим, что $|D| < |N|$. Если некоторая подгруппа H из N с порядком $|H| = |D|$ имеет p-нильпотентное добавление T в G, то

$$TN = G \text{ и } T \neq G$$

по выбору G. Следовательно, $N \cap T$ является собственной неединичной подгруппой в N, поэтому

$$N = N \cap HT = H(N \cap T).$$

Очевидно, что $N \cap T$ – нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности N. Следовательно, каждая подгруппа H из N с порядком $|H| = |D|$ является Q-вложенной в G, и поэтому, по лемме 2.2.1, некоторая максимальная подгруппа в N является нормальной в G, что невозможно. Таким образом, мы имеем (7).

(8) *P является силовской подгруппой группы G.*

Это очевидно в случае, когда $E = G$. Тогда, ввиду (2), мы можем полагать, что $E = P$. Пусть G_p – силовская p-подгруппа в G и Q – силовская q-подгруппа в G, где $q \neq p$. Допустим, что $P \neq G_p$. Тогда

$$|PQ| < |G|,$$

и, согласно лемме 2.1.5(4), гипотеза выполняется для пары (PQ, P). Следовательно, ввиду выбора пары (G, E) подгруппа PQ нильпотентна, и поэтому $Q \le C_G(P)$. Теперь пусть

$$1 = P_0 \le P_1 \le \ldots \le P_t = P,$$

где P_{i+1}/P_i является главным фактором в G_p, $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Тогда P_{i+1}/P_i является главным фактором в G, поэтому $P \le Z_\infty(G)$. Но тогда группа G p-нильпотентна, поскольку $G/P = G/E$ p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $P = G_p$.

(9) *Предположим, что $p = 2$, $|P : D| > 2$ и некоторая подгруппа H в P с порядком 4 имеет 2-нильпотентное добавление T в G. Тогда H является нециклической подгруппой, $G/T_G \simeq A_4$, каждая подгруппа в H с порядком 2 не S-квазинормальна в G и T_G является 2-группой.*

Так как, ввиду (3), $O_{2'}(G) = 1$, то, по лемме 1.6.1(6), имеем

$$O_{2'}(T_G) = 1.$$

Значит, T_G является 2-группой. Рассматривая представление G/T_G на правые смежные классы по T/T_G, мы видим, что G/T_G изоморфна некоторой подгруппе D симметрической группы S_4 степени 4. Согласно (5), G не имеет подгруппы M с индексом $|G : M| = 2$, поэтому $D \neq S_4$. Итак, D — собственная подгруппа группы S_4, не имеющая подгруппы R с индексом $|D : R| = 2$. Заметим, что S_4 имеет три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются M_1 — силовская 2-подгруппа группы S_4, $M_2 = [C_3]C_2$ и A_4. Понятно, что

$$D \nleq M_1^x \text{ для любого } x \in S_4,$$

иначе G является 2-группой и, следовательно, G p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G.

Пусть теперь D является собственной подгруппой группы M_2. Тогда $|D||2$ или $|D||3$. Если $|D||2$, то группа G является 2-группой и, следовательно, G p-нильпотентна, противоречие. Во втором случае, если $|D||3$, то $G = T$ — p-нильпотентная группа, противоречие. Значит, $D = M_2$, но тогда получаем противоречие (5). Следовательно, либо D является собственной подгруппой группы A_4, либо $D = A_4$. Если D является собственной подгруппой группы A_4, то $|D||2$ или $|D||3$. В первом случае получаем противоречие выбору группы G, а во втором — противоречие утверждению (5). Таким образом,

$$G/T_G \simeq A_4.$$

Ясно, что T является максимальной подгруппой группы G и

$$H \simeq HT_G/T_G$$

— нециклическая подгруппа. Допустим, что некоторая подгруппа V в H с порядком 2 S-квазинормальна в G, и пусть Q – силовская 3-подгруппа в T. Тогда $V \leq N_G(Q)$. С другой стороны, так как T – 2-нильпотентная группа и $|T| = 2^n 3$, то $T \leq N_G(Q)$. Следовательно,

$$|G : N_G(Q)| = 2,$$

что противоречит (5). Итак, имеем (9).

(10) *Если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то $|D| > 4$.*

Так как P – неабелева 2-группа, она имеет циклическую подгруппу $H = \langle x \rangle$ с порядком 4. Допустим, что $|D| = 4$. Тогда, согласно (6), каждая подгруппа из P с порядком 4, не имеющая 2-нильпотентного добавления в G, S-квазинормальна в G. Следовательно, ввиду (9), H является S-квазинормальной подгруппой в G. Так как $\langle x^2 \rangle$ — характеристическая в H подгруппа, то

$$O^p(G) \leq N_G(\langle x^2 \rangle).$$

Поэтому подгруппа $\langle x^2 \rangle$ является S-квазинормальной в G, по лемме 1.6.4. Теперь заметим, что, если G имеет подгруппу $V = A \times B$ с порядком 4, где $|A| = 2$ и A S-квазинормальна в G, тогда B и V также S-квазинормальны в G. Действительно, согласно (9), V является S-квазинормальной в G. С другой стороны, по лемме 1.6.4, для каждого $2'$-элемента z группы G имеем

$$z \in C_G(A) \text{ и } z \in N_G(V),$$

поэтому $z \in C_G(B)$. Следовательно, B S-квазинормальна в G. Значит, некоторая подгруппа Z из $Z(P)$ с порядком $|Z| = 2$ является S-квазинормальной в G, поэтому каждая подгруппа из P с порядком 2 является S-квазинормальной в G, что противоречит (9).

(11) *Если N — абелева минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в E, тогда гипотеза выполняется для $(G/N, E/N)$.*

Если

$$\text{либо } p > 2 \text{ и } |N| < |D|,$$

$$\text{либо } p = 2 \text{ и } 2|N| < |D|,$$

$$\text{либо } |P : D| = p,$$

то утверждение очевидно. Пусть $|P : D| > p$ и

$$\text{либо } p > 2 \text{ и } |N| = |D|,$$

$$\text{либо } p = 2 \text{ и } |N| \in \{|D|, 2|D|\}.$$

Согласно (6), каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является S-квазинормальной в G. Кроме того, ввиду (4), $|D| > p$. Допустим, что $|N| = |D|$. Тогда N является нециклической подгруппой, и, следовательно, каждая подгруппа из G, содержащая N, также нециклическая. Пусть

$$N \leq K \leq P, \text{ где } |K : N| = p.$$

Так как K — нециклическая, то она имеет максимальную подгруппу $L \neq N$. Если одна из подгрупп L или N имеет p-нильпотентное добавление в G, то K имеет p-нильпотентное добавление в G. В противном случае, $K = LN$ является S-квазинормальной подгруппой в G, так как она является произведением двух S-квазинормальных подгрупп. Таким образом, если P/N абелева, то гипотеза выполняется для $(G/N, E/N)$, по лемме 2.1.5(2)).

Теперь допустим, что P/N — неабелева 2-группа. Тогда P — неабелева, поэтому $|D| > 4$, ввиду (10). Пусть

$$N \leq K \leq V, \text{ где } |V : N| = 4 \text{ и } |V : K| = 2.$$

Пусть K_1 — максимальная подгруппа в V такая, что $V = K_1K$. Допустим, что K_1 циклическая. Тогда $N \nsubseteq K_1$, поэтому $V = K_1N$, что влечет $|N| = 4$. Но тогда $|D| = 4$, противоречие. Следовательно, K_1 — нециклическая подгруппа, и, как показано выше, K_1 либо S-квазинормальна в G, либо имеет 2-нильпотентное добавление в G. Таким образом, снова получили, что гипотеза выполняется для $(G/N, E/N)$, по лемме 2.1.5(2).

Теперь допустим, что $|D| = 2|N|$. Если $|N| > 2$, то, как и выше, можем показать, что каждая подгруппа из P/N с порядком 4 является либо Q-вложенной в G/N, либо имеет 2-нильпотентное добавление в G/N. Допустим, что $|N| = 2$ и P/N — неабелева группа. Тогда P — неабелева группа и $|D| = 4$, что противоречит (10). Следовательно, имеем (11).

(12) $E = G$.

Допустим, что $E = P$ и N — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в E. Тогда, по (11), гипотеза выполняется для $(G/N, E/N)$. Следовательно, ввиду выбора пары (G, E), G/N p-нильпотентна и $N \nsubseteq \Phi(G)$. Ввиду (3), N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Покажем теперь, что $N = O_p(G)$. Действительно, пусть M – такая максимальная подгруппа в G, что

$$G = [N]M.$$

Тогда

$$O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M).$$

Поскольку

$$O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N),$$

то получаем, что $O_p(G) \cap M$ – нормальная подгруппа в G, и поэтому

$$O_p(G) \cap M = 1.$$

Следовательно, $N = O_p(G) = P$, согласно (8). Но, ввиду леммы 2.2.2, это невозможно, поскольку P – минимальная нормальная подгруппа в G. Таким образом, имеем (12).

(13) *Некоторая максимальная подгруппа из P не имеет p-нильпотентного добавления в G* (следует из (8) и леммы 1.6.18).

(14) *G является p-разрешимой группой.*

Согласно (11), необходимо только показать, что $P_G \neq 1$. Предположим, что это не верно. Тогда, ввиду лемм 1.6.1(6) и 1.6.2(3), каждая неединичная подгруппа из P не является S-квазинормальной в группе G. Прежде предположим, что

$$|P : D| = p.$$

Ввиду (13), по крайней мере, одна максимальная подгруппа из P, скажем M, не имеет p-нильпотентного добавления в G. Поскольку $M_{sG} = 1$, то по условию M имеет субнормальное дополнение T в G. Тогда $T_{p'}$ является субнормальной подгруппой в G. Но $T_{p'} = G_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы G и поэтому, по лемме 1.6.1(4), эта подгруппа нормальна в G. Следовательно, G p-нильпотентна, противоречие. Следовательно, мы можем предположить, что

$$|P : D| > p.$$

В этом случае, ввиду (6), каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является S-квазинормальной в G подгруппой. Это влечет, что каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$ имеет p-нильпотентное добавление в G, и поэтому каждая максимальная подгруппа в P имеет p-нильпотентное добавление в G, противоречие. Таким образом, имеем (14).

Заключительное противоречие.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда, ввиду (1), (13) и (14), $N \leq P$. Следовательно, по (11) и выбору группы G, факторгруппа G/N p-нильпотентна. Таким образом,

$$N \not\subseteq \Phi(G) \text{ и } N = O_p(G) = F(G)$$

является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Допустим, что $|P : D| = p$, и пусть M – максимальная подгруппа в G такая, что $G = [N]M$. Для каждой максимальной подгруппы A из P, содержащей N, имеем $AM = G$, поэтому $M \simeq G/N$ — p-нильпотентное добавление к A в G. Таким образом, некоторая максимальная подгруппа V из P, не содержащая N, не имеет p-нильпотентного добавления в G. Следовательно, по условию, V является Q-вложенной подгруппой в G. Пусть $L = V_{sG}$ и T — квазинормальная подгруппа в G такая, что

$$VT = G \text{ и } T \cap V \leq L.$$

Допустим, что $L = 1$. Тогда $|T| = pq^b$ и, ввиду [139, IV, лемма 2.8], T p-нильпотентна, что противоречит выбору группы V. Итак, $L \neq 1$. По леммам 1.6.1(6) и 1.6.2(3),

$$L \leq O_p(G) = N.$$

Следовательно, $L \leq N \cap V$.

Допустим, что $N \leq T$. Тогда

$$T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V,$$

и поэтому

$$T \cap V = N \cap V.$$

Таким образом, из

$$T \cap V \leq L \leq N \cap V$$

имеем, что $T \cap V = L$. Ясно, что $N \cap V$ — нормальная подгруппа в P. С другой стороны, $L = N \cap V$ является S-квазинормальной в G подгруппой, и поэтому для любой силовской q-подгруппы Q из G имеем $Q \leq N_G(L)$. Это влечет, что L — неединичная подгруппа в P, которая нормальна в G. Следовательно,

$$N \leq L \leq V,$$

что невозможно. Значит, $N \nleq T$. Так как T субнормальна в G, она содержит все силовские q-подгруппы из G, по лемме 1.6.1(9). Следовательно, G/T_G — p-группа. Таким образом,

$$G \simeq G/N \cap T_G$$

является p-нильпотентной группой, противоречие.

Поэтому, мы можем предполагать, что $|P : D| > p$. Тогда, ввиду (6), каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления G, S-квазинормальна. Так как каждая S-квазинормальная подгруппа из G содержится в $O_p(G) = N$, то каждая подгруппа H из P, отличная от N, с порядком $|H| = |D|$ имеет p-нильпотентное добавление в G. Значит, каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G, что невозможно, ввиду (13). Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2.3.1.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Если X — холлова подгруппа из E, то условия теоремы справедливы для пары (X, X). Если, кроме того, X — нормальная подгруппа группы G, то условия теоремы также выполняются для пар $(G/X, E/X)$ и (G, X).*

Пусть X — холлова подгруппа из E и P — нециклическая силовская подгруппа из X. По условию, P имеет подгруппу D такую, что

$$1 < |D| < |P|,$$

и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$, и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа) либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо является Q-вложенной подгруппой в G. В первом случае так как

$$X = X \cap HT = H(X \cap T),$$

то $X \cap T$ — сверхразрешимое добавление для H в X. Во втором случае H является Q-вложенной подгруппой в X, по лемме 2.1.5(3). Таким образом, условия теоремы выполняются для пары (X, X).

Теперь пусть X — холлова подгруппа из E, которая нормальна в G. Тогда

$$(G/X)/(E/X) \simeq G/E \in \mathfrak{F}.$$

Пусть P^*/X — нециклическая силовская p-подгруппа из E/X, где p — делитель $|E/X|$, P — силовская p-подгруппа из P^* такая, что $P^* = PX$. Тогда P — нециклическая силовская подгруппа из E и, по условию, P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$, и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$, и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева 2-группа) либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо является Q-вложенной подгруппой в G. Пусть H^*/X — подгруппа из P^*/X, порядок которой

$$|H^*/X| = |D|.$$

Тогда $H^* = XH$, где H — силовская p-подгруппа в H^*. Ясно, что $|H| = |D|$, и поэтому

$$H^*/X = HX/X$$

либо имеет сверхразрешимое добавление

$$TX/X \simeq T/T \cap X$$

в G/X, либо является Q-вложенной в G/X, по лемме 2.1.5(4). Таким образом, условия теоремы выполняются для пары $(G/X, E/X)$. Следовательно, $G/X \in \mathfrak{F}$, по выбору группы G, поэтому условия теоремы верны для пары (G, X).

(2) *Если X — неединичная нормальная холлова подгруппа группы E, то $X = E$.*

Поскольку X является характеристической подгруппой в E, то она нормальна в G, и, согласно (1), условия теоремы выполняются для пары (G, X). Следовательно, $E = X$, согласно выбору пары (G, E).

(3) *$E = P$ является p-группой для некоторого простого p.*

Пусть p — наименьший простой делитель порядка $|E|$. Тогда, по теореме 2.3.2, E — p-нильпотентная группа. Следовательно, ввиду (2), имеем (3).

(4) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что

$$V = O_{p'}(G) \neq 1.$$

Согласно (3) и леммы 2.1.5(4), условия теоремы выполняются для пары $(G/V, EV/V)$. Следовательно, ввиду (1) и выбора пары (G, E), имеем $G/V \in \mathfrak{F}$. Таким образом,

$$G \simeq G/E \cap V \in \mathfrak{F},$$

противоречие.

(5) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. В этом случае условия теоремы выполняются для любой пары (G, V), где V — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в E, такая, что $G/V \in \mathfrak{F}$. Если $V \neq E$, тогда

$$|G||V| < |G||E|,$$

что противоречит выбору пары (G, E). Следовательно, G не имеет циклический главный фактор вида E/V, где $V \neq E$.

Прежде заметим, что $p > 2$ (см. (4) в доказательстве теоремы 2.3.2). Предположим, что некоторая подгруппа H из P с $|H| = p$ имеет сверхразрешимое добавление T в G. Тогда

$$G/P = TP/P \simeq T/P \cap T$$

сверхразрешима, поэтому G сверхразрешима, ввиду [186, теорема 1.4], что противоречит выбору группы G. Следовательно, каждая подгруппа H в P с $|H| = p$ является Q-вложенной в G. Предположим, что некоторая подгруппа H порядка p из P не является S-квазинормальной в G. Тогда, по лемме 2.1.5(5), группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что

$$HM = G \text{ и } |G : M| = p.$$

Тогда $M \cap P \neq P$ нормальна в G, и ввиду изоморфизма

$$G/M \simeq P/(M \cap P)$$

получаем, что группа $E = P$ имеет циклический G-главный фактор $P/(M \cap P)$, противоречие. Следовательно, каждая подгруппа H порядка p группы P S-квазинормальна в G.

Предположим, что

$$P \nsubseteq O^p(G).$$

Тогда из G-изоморфизма

$$O^p(G)P/O^p(G) \simeq P/P \cap O^p(G)$$

следует, что G имеет циклический главный фактор вида E/V, противоречие. Значит, $P \leq O^p(G)$.

Теперь пусть G_p — силовская p-подгруппа в G. Рассмотрим ряд

$$1 \leq \Omega_1(P) \leq \Omega_2(P) \leq \ldots \leq \Omega_t(P) = P.$$

Поскольку все члены данного ряда характеристичны в P, то ряд может быть приведен к G_p-главному ряду группы P:

$$1 = P_0 \leq P_1 \leq \ldots \leq P_t = P. \qquad (*)$$

По лемме 1.6.4 и [91, теорема 1(i)], каждый фактор $\Omega_i(P)/\Omega_{i-1}(P)$ элементарен и, по [186, лемма 2.4], каждая подгруппа в $\Omega_i(P)/\Omega_{i-1}(P)$ нормализуется каждым p'-элементом группы G. Следовательно, ряд $(*)$ является главным рядом группы G, поэтому

$$E = P \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G),$$

противоречие. Таким образом, имеем (5).

Заключительное противоречие (см. доказательство теоремы 2.3.2).

2.3.3. Теорема [11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, и N — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если для каждого простого делителя p порядка группы N и для каждой силовской p-подгруппы P из N каждая минимальная подгруппа из P, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, Q-вложена в G, а при $p = 2$ и в случае, когда P имеет секцию, изоморфную Q_8, каждая циклическая группа порядка 4 из P, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, Q-вложена G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример, для которого $|G||N|$ минимально. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе X группы N (относительно X).*

Действительно, X/X принадлежит классу всех сверхразрешимых групп. Заметим, что всякая силовская подгруппа из X является силовской в N. Пусть K — произвольная минимальная подгруппа из силовской p-подгруппы X_p группы X. Тогда, согласно условию теоремы, либо K имеет сверхразрешимое добавление T в G, и в этом случае

$$X = X \cap KT = K(X \cap T),$$

где $X \cap T$ — сверхразрешимое добавление к подгруппе K в X, либо K Q-вложена в G, а значит, согласно лемме 2.1.5(2), подгруппа K Q-вложена в X. Предположим теперь, что силовская p-подгруппа X_p из X имеет секцию, изоморфную Q_8. Тогда P имеет секцию, изоморфную Q_8. В этом случае, как выше видим, что каждая циклическая подгруппа из X_p с порядком 4, не имеющая сверхразрешимого добавления в X, Q-вложена в X. Итак, условие теоремы выполняется для холловой подгруппы X группы N (относительно X).

(2) *Условие теоремы выполняется для каждой факторгруппы G/X (относительно N/X), где X — нормальная холлова подгруппа группы N.*

Действительно,

$$(G/X)/(N/X) \simeq G/N \in \mathfrak{F}$$

и, ввиду леммы 2.1.5(1), условие теоремы выполняется для G/X (относительно N/X).

(3) *Если X — неединичная нормальная холлова подгруппа группы N, то $X = N$.*

Так как X — характеристическая подгруппа группы N, то она нормальна в G, и поэтому, ввиду (2), условие теоремы справедливо для G/X (относительно N/X). Значит, по выбору группы G и ее подгруппы N имеет место $G/X \in \mathfrak{F}$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G (относительно X), и поэтому $X = N$ согласно выбору пары (G, N).

(4) *Всякая минимальная подгруппа H группы P, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, S-квазинормальна в G.*

Пусть H — минимальная подгруппа группы P, и H не имеет сверхразрешимого добавления в G. Тогда, согласно условию теоремы, H Q-вложена в G. Допустим, что H не является S-квазинормальной в G подгруппой. Тогда, ввиду леммы 2.1.5(5), группа G содержит такую нормальную подгруппу M, что

$$G = HM \text{ и } |G : M| = p.$$

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно подпрямых произведений и содержит все сверхразрешимые группы, то

$$G/N \cap M \in \mathfrak{F}.$$

Пусть $D_p = P \cap D$ — силовская p-подгруппа из $D = N \cap M$. Так как $D_p \subseteq P$, то условие теоремы выполняется для G (относительно D). Но, поскольку M является собственной подгруппой группы G и $G = HM$, то $|D| < |N|$, и поэтому

$$|G||D| < |G||N|,$$

что противоречит выбору группы G и ее нормальной подгруппы N. Следовательно, всякая минимальная подгруппа H группы P, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, S-квазинормальна в G.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую p-подгруппу P группы N, где p — наименьший простой делитель $|N|$.

(5) $N = P$.

По лемме 2.2.3, подгруппа N p-нильпотентна. Значит, N имеет нормальную холлову p'-подгруппу E. Согласно (3), имеет место $E = N$. Следовательно, p не делит порядок группы N. Полученное противоречие доказывает утверждение (5).

(6) $|P| > p$. (Это прямо вытекает из леммы 1.6.11).

(7) $G^{\mathfrak{F}} = P$.

Понятно, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq P$, и поэтому условие теоремы верно для G (относительно $G^{\mathfrak{F}}$), что в силу выбора группы G и ее подгруппы N влечет $G^{\mathfrak{F}} = P$.

(8) $p > 2$.

Пусть $p = 2$. Покажем, что P является минимальной нормальной подгруппой группы G. Если R — силовская r-подгруппа из G и $r \neq 2$, то, по лемме 2.2.3, подгруппа RP является 2-нильпотентной. Следовательно, R является подгруппой в $C_G(P)$, и, значит, R нормальна в G, поэтому $G/C_G(P)$ — 2-группа. Значит,

$$G/C_G(P) \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно,

$$G/Z(P) = G/P \cap C_G(P) \in \mathfrak{F},$$

и поэтому условие теоремы справедливо для G (относительно $P \cap C_G(P)$). Значит,

$$Z(P) = P \cap C_G(P) = P$$

согласно выбору пары $(G,\ N)$. Следовательно, P является абелевой группой. Ввиду (7) и согласно лемме 1.6.12, P является минимальной нормальной подгруппой группы G.

Поскольку $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, то $G = [P]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Пусть L — минимальная подгруппа группы P. Тогда, согласно условию, либо L имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо L Q-вложена в G. В первом случае так как

$$P = P \cap LT = L(P \cap T),$$

то $P \cap T$ — собственная неединичная подгруппа группы P. Но $P \cap T$ — нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности группы P. Значит, подгруппа L группы P Q-вложена в G.

Тогда, ввиду (4), подгруппа L квазинормальна с любой силовской подгруппой группы G. Пусть M_q — силовская q-подгруппа группы M. Тогда M_q является силовской q-подгруппой группы G, и поэтому

$$LM_q = M_qL.$$

Так как L является субнормальной подгруппой в G, по лемме 1.6.3, то L субнормальна в LM_q. Но L — силовская p-подгруппа в LM_q, и поэтому L является нормальной подгруппой в LM_q. Значит,

$$M_q \leq N_G(L)$$

для любого простого делителя q порядка группы M. Следовательно,

$$M \leq N_G(L),$$

и поэтому

$$LM = ML.$$

Следовательно, ML является подгруппой группы G. Тогда, ввиду максимальности M, имеем $G = ML$, и поэтому $|G : M| = p$. С другой стороны,

$$|G : M| = |P| > p.$$

Полученное противоречие доказывает, что $p > 2$.

(9) *Формации $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая максимальная подгруппа M из G, что $G = MP$.*

Так как

$$G/P \simeq M/M \cap P \in \mathfrak{F},$$

то, по лемме 2.1.5(2), условие теоремы верно для M относительно подгруппы $M \cap P$. Поскольку M — собственная подгруппа группы G, то согласно выбору группы G, имеем $M \in \mathfrak{F}$.

Заключительное противоречие

Ввиду (9) и по лемме 2.2.2, имеет место

$$|P/\Phi(P)| = p.$$

Значит, по лемме 1.6.11, имеем

$$G/\Phi(P) \in \mathfrak{F}.$$

Но тогда $P \leq \Phi(P)$, и поэтому $P = \Phi(P)$, получили противоречие с тем, что

$$\Phi(P) \subset G^{\mathfrak{F}} = P.$$

Теорема доказана.

2.4 Некоторые приложения теорем 2.3.1 и 2.3.2

Теоремы 2.3.1 и 2.3.2 имеют большое число следствий. В литературе можно найти следующие частные случаи данных теорем.

2.4.1. Следствие (Xiuyun Guo и K.P. Shum [134]). *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа в P является c-нормальной в G, то группа G p-нильпотентна.*

2.4.2. Следствие (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [175]). *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Если каждая подгруппа группы P с простым порядком и каждая циклическая подгруппа порядка 4 является c-нормальной в G, то G — p-нильпотентная группа.*

2.4.3. Следствие (Xiuyun Guo and K.P. Shum [134]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все p-нильпотентные группы, G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$, p — наименьший простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из P является c-нормальной в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.4. Следствие (S. Srinivasan [187]). *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны в G, то G — сверхразрешимая группа.*

2.4.5. Следствие (W. Guo, K.P. Shum and A.N. Skiba [122]). *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, нормальны в G, то G — сверхразрешимая группа.*

2.4.6. Следствие (J. Buckley [91]). *Пусть G — группа нечетного порядка. Если все подгруппы группы G с простым порядком являются нормальными в G, то группа G сверхразрешима.*

2.4.7. Следствие (Y. Wang [203]). *Если каждая подгруппа группы G с простым порядком и каждая циклическая подгруппа порядка 4 является c-нормальной в G, то G — сверхразрешимая группа.*

2.4.8. Следствие (A. Al-Sheikahmad [56]). *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, c-нормальны в G, то G — сверхразрешимая группа.*

2.4.9. Следствие (Y. Wang [203]). *Пусть G — группа и E — нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/E. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы E являются c-нормальными в G, то G — сверхразрешимая группа.*

2.4.10. Следствие (A. Ballester-Bolinches and Y. Wang [82]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы с порядком 4 в $G^{\mathfrak{F}}$ являются c-нормальными в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.11. Следствие (A.N. Skiba [183]). *Пусть E — нормальная подгруппа группы G такая, что факторгруппа G/E сверхразрешима. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из E имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$, и все подгруппы H из P с порядком $|H| = |D|$ являются c-нормальными в G. Тогда G — сверхразрешимая группа.*

2.4.12. Следствие (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [175]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс сверхразрешимых групп, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы E является c-нормальной в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.13. Следствие (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [175]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс сверхразрешимых групп, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если каждая подгруппа из E с простым порядком и каждая циклическая подгруппа с порядком 4 является c-нормальной в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.14. Следствие (S. Srinivasan [187]). *Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы G является S-квазинормальной в G, то группа G сверхразрешима.*

2.4.15. Следствие (M. Asaad [59]). *Если каждая подгруппа группы G с простым порядком и каждая циклическая подгруппа с порядком 4 является S-квазинормальной в G, то группа G сверхразрешима.*

2.4.16. Следствие (M. Asaad, M. Ramadan and A. Shaalan [64]). *Пусть G — группа и E — разрешимая нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/E. Предположим, что все максимальные подгруппы некоторой силовской подгруппы из E являются S-квазинормальными в G. Тогда группа G сверхразрешима.*

2.4.17. Следствие (A. Shaalan [179]). *Пусть G — группа и E — нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/E . Предположим, что все минимальные подгруппы из E и все ее циклические подгруппы с порядком 4 являются S-квазинормальными в G. Тогда группа G сверхразрешима.*

2.4.18. Следствие (M. Asaad [58]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из E является S-квазинормальной в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.4.19. Следствие (A. Ballester-Bolinches and M.C. Pedraza-Aguilera [77]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что силовская 2-подгруппа группы G абелева. Если все минимальные подгруппы из E квазинормальны в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

2.5 Критерии p-нильпотентности конечных групп

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на силовские подгруппы некоторых выделенных подгрупп этой группы. Отметим, в частности, что в работе Хупперта [141], было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее Сринивазан доказал [187], что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имеется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов (см., в частности, [62, 73, 158, 203, 205]).

Целью данного раздела является доказательство критериев p-нильпотентности группы в зависимости от Q-вложенности максимальных подгрупп их силовских подгрупп.

2.5.1. Теорема [18]. *Пусть p — нечетное простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, Q-вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) $O_{p'}(G)$=1.

Действительно, предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$, и рассмотрим факторгруппу $G/O_{p'}(G)$. Покажем, что $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условию нашей теоремы. По условию теоремы p делит порядок группы G, значит, p делит порядок группы $G/O_{p'}(G)$.

Пусть $P/O_{p'}(G)$ — силовская p-подгруппа в $G/O_{p'}(G)$ и $P_1/O_{p'}(G)$ — произвольная максимальная в $P/O_{p'}(G)$ подгруппа. Покажем, что подгруппа $P_1/O_{p'}(G)$ Q-вложена в $G/O_{p'}(G)$. Если P_0 — силовская p-подгруппа в P, то

$$P = P_0O_{p'}(G)$$

и P_0 является силовской p-подгруппой в G. Покажем, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Заметим, что

$$P_1 \cap P_0 \neq P_0.$$

Действительно, если $P_1 \cap P_0 = P_0$, то $P_0 \subseteq P_1$, а, значит,

$$P_1/O_{p'}(G) = P_0O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = P/O_{p'}(G),$$

что противоречит выбору подгруппы $P_1/O_{p'}(G)$. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что

$$P_1 \cap P_0 \subset T \subset P.$$

Тогда

$$P_1 = O_{p'}(G)(P_1 \cap P_0) \subseteq TO_{p'}(G) \subseteq P_0O_{p'}(G) = P.$$

Но P_1 — максимальная в P подгруппа, и поэтому либо

$$P_1 = TO_{p'}(G),$$

либо

$$TO_{p'}(G) = O_{p'}(G)P_0.$$

Если $P_1 = TO_{p'}(G)$, то

$$T \subseteq P_1 \cap P_0 \subset T,$$

что невозможно. Итак,

$$TO_{p'}(G) = O_{p'}(G)P_0,$$

и поэтому

$$P_0 = P_0 \cap TO_{p'}(G) = T(P_0 \cap O_{p'}(G)) \subseteq T(P_1 \cap P_0) = T.$$

Полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Согласно условию теоремы, либо $P_1 \cap P_0$ — Q-вложенная подгруппа в G, либо $P_1 \cap P_0$ имеет p-нильпотентное добавление B в G. В первом случае, по лемме 2.1.5(3), подгруппа $(P_1 \cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ Q-вложена в $G/O_{p'}(G)$. Но

$$(P_1 \cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = P_1/O_{p'}(G),$$

и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа $P_1/O_{p'}(G)$ из $P/O_{p'}(G)$ Q-вложена в $G/O_{p'}(G)$.

Во втором случае так как $G = (P_1 \cap P_0)B$, то

$$P_1/O_{p'}(G) = (P_1 \cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$$

имеет p-нильпотентное добавление

$$BO_{p'}(G)/O_{p'}(G) \simeq B/O_{p'}(G) \cap B$$

в $G/O_{p'}(G)$. Итак, каждая максимальная подгруппа из $P/O_{p'}(G)$ либо имеет p-нильпотентное добавление в $G/O_{p'}(G)$, либо Q-вложена в $G/O_{p'}(G)$.

Так как

$$N_{G/O_{p'}(G)}(P/O_{p'}(G)) = N_{G/O_{p'}(G)}(P_0O_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = N_G(P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$$

и

$$N_G(P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G) \simeq N_G(P_0)/N_G(P_0) \cap O_{p'}(G),$$

а также, по условию теоремы, $N_G(P_0)$ p-нильпотентная подгруппа, то $N_{G/O_{p'}(G)}(P/O_{p'}(G))$ является p-нильпотентной подгруппой.

Итак, $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условию нашей теоремы. В силу минимальности G, мы видим, что факторгруппа $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна, и поэтому G — p-нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G.

(2) *Если R — собственная подгруппа в G и $P \leq R < G$, то R является p-нильпотентной подгруппой.*

Так как

$$N_R(P) \leq N_G(P),$$

то $N_R(P)$ является p-нильпотентной подгруппой.

Пусть K — максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P группы G. Согласно условию теоремы, либо K — Q-вложенная подгруппа в G, либо K имеет p-нильпотентное добавление B в G. В первом случае, по лемме 2.1.5(2), подгруппа K Q-вложена в R. Во втором случае

$$R = R \cap KB = K(R \cap B).$$

Таким образом, K имеет p-нильпотентное добавление $R \cap B$ в R. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой R, и поэтому R p-нильпотентна, согласно выбору группы G.

(3) *G=PQ является разрешимой группой, где Q — силовская q-подгруппа из G и $q \neq p$.*

Так как G не является p-нильпотентной группой, то по результату Томпсона [198] существует характеристическая подгруппа H в P такая, что $N_G(H)$ не является p-нильпотентной группой. Так как нормализатор $N_G(P)$ p-нильпотентен, мы можем выбрать характеристическую подгруппу H в P такую, что $N_G(H)$ не является p-нильпотентным, но $N_G(K)$ является p-нильпотентным для каждой характеристической подгруппы K в P такой, что

$$H < K \leq P.$$

Так как

$$N_G(P) \leq N_G(H)$$

и $N_G(H)$ не является p-нильпотентной группой, мы имеем

$$N_G(P) < N_G(H).$$

Тогда в силу (2) мы получаем $N_G(H) = G$. Это приводит к тому, что $O_p(G) \neq 1$ и нормализатор $N_G(K)$ p-нильпотентен для каждой характеристической подгруппы K из P такой, что

$$O_p(G) < K \leq P.$$

Теперь, опять используя результат Томпсона [198], мы видим, что $G/O_p(G)$ является p-нильпотентной подгруппой и, более того, G является p-разрешимой группой со следующим рядом:

$$1 < O_p(G) < O_{pp'}(G) < O_{pp'p}(G) = G.$$

Так как G p-разрешима, то для любого $q \in \pi(G)$ и $q \neq p$ в группе G существует такая силовская q-подгруппа Q из G, что $G_1{=}PQ$ является подгруппой из G, ввиду [111, теорема 6.3.5]. В силу (2) подгруппа G_1 p-нильпотентна, если $G_1 < G$. Поскольку $O_{p'}(G) = 1$, то, согласно [176, теорема 9.3.1], имеем

$$Q \leq C_G(O_p(G)) \leq O_p(G),$$

противоречие. Значит, $G = PQ$, и, согласно [198, теорема 4.3.3], G — разрешимая группа.

(4) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N \nsubseteq \Phi(G)$ и $N = O_p(G)$.*

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G и $N \leq O_p(G)$. Тогда мы видим, что факторгруппа G/N удовлетворяет условию нашей теоремы. В силу минимальности G мы видим, что G/N p-нильпотентна. Так как класс всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией, по лемме 1.6.16, то N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $N \nleq \Phi(G)$. Более того, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = [N]M$. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно,

$$O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M).$$

Поскольку

$$O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N),$$

то $O_p(G) \cap M$ нормальна в G, и поэтому

$$O_p(G) \cap M = 1.$$

Значит, $N = O_p(G)$.

(5) $|N| > p$.

Действительно, пусть $|N| = p$. Тогда $Aut(N)$, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, является циклической порядка $p-1$. Если $p < q$, тогда NQ — p-нильпотентна и

$$Q \leq C_G(N) = C_G(O_p(G)),$$

противоречие, поскольку

$$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G).$$

С другой стороны, если $q < p$, то так как

$$C_G(N) = C_G(O_p(G)) = O_p(G) = N,$$

мы видим, что

$$M \simeq G/N = N_G(N)/C_G(N).$$

Так как факторгруппа $N_G(N)/C_G(N)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $Aut(N)$ группы N, то M и, в частности Q, является циклической группой. Так как Q — циклическая группа и $q < p$, то G является p-нильпотентной группой и P — нормальная подгруппа в G. Следовательно, $N_G(P) = G$ p-нильпотентна, что является противоречием. Итак, $|N| > p$.

Заключительное противоречие.

Пусть P^* — силовская p-подгруппа из M. Тогда $P = NP^*$. Заметим, что $P^* \neq 1$. Действительно, пусть $P^* = 1$, тогда $P = N$ и

$$N_G(P) = N_G(N) = G$$

является p-нильпотентной группой, что противоречит выбору группы G. Пусть P_1 — максимальная подгруппа из P такая, что $P^* \leq P_1$. Если каждая максимальная подгруппа группы P имеет p-нильпотентное добавление в G, то ввиду леммы 1.6.18, группа G p-нильпотентна, что противоречит выбору G.

Так как для максимальной подгруппы P_1 группы P, которая содержит N, мы имеем $P_1M = G$ и $M \simeq G/N$ — p-нильпотентная группа, то каждая такая максимальная подгруппа из P обладает p-нильпотентным добавлением. Значит, некоторая максимальная подгруппа V группы P, не содержащая N, не имеет p-нильпотентного добавления в G. Следовательно, по условию теоремы V Q-вложена в G. Пусть T — квазинормальная подгруппа группы G такая, что

$$G = VT \text{ и } V \cap T \leq V_{sG}.$$

Покажем, что $V \cap T = 1$. Действительно, пусть $V \cap T \neq 1$.

Так как $V \cap T$ S-квазинормальна в G, то, по лемме 1.6.2(3), $V \cap T$ — субнормальная p-подгруппа в G. Ввиду леммы 1.6.1(6),

$$T \cap V \leq O_p(G) = N,$$

и поэтому

$$T \cap V \leq N \cap V.$$

Допустим, что $N \leq T$. Тогда

$$T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V,$$

и поэтому

$$T \cap V = N \cap V.$$

Ясно, что $N \cap V$ — нормальная в P подгруппа, и поэтому, согласно лемме 1.6.4, $T \cap V$ — неединичная нормальная в G подгруппа. Значит,

$$N \leq T \cap V \leq V,$$

противоречие. Следовательно, $N \nsubseteq T$.

Так как T субнормальна в G, то все силовские q-подгруппы группы G содержатся в T, где $q \neq p$. Значит, G/T_G — p-группа. Следовательно,

$$G \simeq G/N \cap T_G$$

— q-замкнутая группа. Таким образом, G является p-нильпотентной группой, что противоречит выбору группы G. Значит, $V \cap T = 1$.

Пусть $T_G \neq 1$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $N \leq T_G$. Но порядок силовской p-подгруппы в T равен p (так как T является дополнением к максимальной подгруппе V силовской p-подгруппы P группы G). Следовательно, $|N| = p$, что противоречит (5). Итак, $T_G = 1$. Значит, ввиду леммы 1.6.7, имеет место

$$T^G \subseteq Z_\infty(G) \neq 1.$$

Но тогда $N \leq Z_\infty(G)$, что влечет $|N| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Напомним, что подгруппа H группы G называется слабо квазинормальной в G, если существует такая подгруппа T группы G, что $HT = G$ и $T \cap H$, T — квазинормальные в G подгруппы.

2.5.2. Следствие [17]. *Пусть p — нечетное простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, слабо квазинормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

2.5.3. Следствие. *Пусть p — нечетное простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой и каждая* *максимальная подгруппа из P слабо квазинормальна в G, то группа G p-нильпотентна.*

2.5.4. Следствие (X. Guo, K.P. Shum [134, теорема 3.1]). *Пусть p — нечетное простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой и каждая максимальная подгруппа из P c-нормальна в G, то G p-нильпотентна.*

2.5.5. Следствие. *Пусть p — нечетное простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, c-нормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

В доказательстве теоремы 2.5.1 предположение, что $N_G(P)$ является p-нильпотентной подгруппой, существенно. Рассмотрим, например, группу $G = A_5$ и $p = 5$. В этом случае так как каждая максимальная подгруппа силовской 5-подгруппы единична, то каждая максимальная подгруппа силовской 5-подгруппы Q-вложена в G, но G не является 5-нильпотентной группой. С другой стороны, если p является наименьшим простым делителем порядка группы, то результат сохраняется. Таким образом, имеем следующий результат.

2.5.6. Теорема [18]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок p-разрешимой группы G, и P — силовская p-подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа в P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является Q-вложенной в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Факторгруппа G/N p-нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы N из G.*

Применяя лемму 2.1.5 и используя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2.5.1, видим, что условие теоремы наследуется факторгруппой G/N. Но $|G/N| < |G|$, и поэтому в силу выбора группы G имеем (1).

(2) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N и $N \nsubseteq \Phi(G)$.*

Это прямо вытекает из (1) и того факта, что класс всех p-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений, согласно лемме 1.6.16, и всегда из p-нильпотентности факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует p-нильпотентность самой группы G.

(3) *Подгруппа P не является циклической.*

Поскольку p является наименьшим простым делителем порядка группы G, то (3) следует из [176, теорема 10.1.9].

(4) $O_{p'}(G)$=1 (см. доказательство теоремы 2.5.1).

Заключительное противоречие.

Пусть P_1 — произвольная максимальная подгруппа в P. Если каждая максимальная подгруппа группы P имеет p-нильпотентное добавление в G, то, ввиду леммы 1.6.18, группа G p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G.

Ввиду (2) существует максимальная подгруппа M в G такая, что

$$G = [N]M \text{ и } N \cap M = 1,$$

причем

$$N = C_G(N) = O_p(G)$$

(см. доказательство теоремы 2.5.1). Так как для максимальной подгруппы P_1 группы P, которая содержит N, мы имеем

$$P_1M = G \text{ и } M \simeq G/N$$

— p-нильпотентная группа, то каждая такая максимальная подгруппа из P обладает p-нильпотентным добавлением. Значит, некоторая максимальная подгруппа V группы P, не содержащая N, не имеет p-нильпотентного добавления в G. Следовательно, по условию теоремы, группа G имеет такую квазинормальную подгруппу T, что

$$G = VT \text{ и } D = V \cap T \leq V_{sG}.$$

Заметим, что $D \neq 1$. Пусть $D = 1$. Тогда T является p-нильпотентной подгруппой в G. Так как T — квазинормальная подгруппа в G, то, по лемме 1.6.3, подгруппа T субнормальна в G. Тогда $T_{p'}$ является субнормальной подгруппой в G. Но $T_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы G, и поэтому, по лемме 1.6.1(4), эта подгруппа нормальна в G. Следовательно, G p-нильпотентна. Это противоречит выбору группы G. Итак, $D \neq 1$.

Так как $V \cap T$ S-квазинормальна в G, то, по лемме 1.6.2(3), $V \cap T$ — субнормальная p-подгруппа в G. Ввиду леммы 1.6.1(6),

$$T \cap V \leq O_p(G) = N,$$

и поэтому

$$T \cap V \leq N \cap V.$$

Допустим, что $N \leq T$. Тогда

$$T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V,$$

и поэтому

$$T \cap V = N \cap V.$$

Ясно, что $N \cap V$ — нормальная в P подгруппа, и поэтому, согласно лемме 1.6.4, $T \cap V$ — неединичная нормальная в G подгруппа. Значит,

$$N \leq T \cap V \leq V,$$

противоречие. Следовательно, $N \nsubseteq T$.

Так как T субнормальна в G, то все силовские q-подгруппы группы G содержатся в T. Значит, G/T_G — p-группа. Следовательно,

$$G \simeq G/N \cap T_G$$

— q-замкнутая группа. Таким образом, G является p-нильпотентной группой, что противоречит выбору группы G. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

2.5.7. Следствие [17]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, слабо квазинормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

2.5.8. Следствие. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа в P является слабо квазинормальной в G, то G — p-нильпотентная группа.*

2.5.9. Следствие (X. Guo, K.P. Shum [134, теорема 3.4]). *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если каждая максимальная подгруппа из P c-нормальна в G, то G p-нильпотентна.*

2.5.10. Следствие. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P — силовская p-подгруппа из G. Если каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, c-нормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

2.6 Критерии p-сверхразрешимости конечных групп

Для сверхразрешимых и p-нильпотентных групп получено большое число их описаний, значительная часть из которых приведена в книге [206] (в этой связи см. также обзор [184] и работы [119, 130, 186]). В то же время p-сверхразрешимые группы остаются мало изученными и в настоящее время. Нами доказаны две теоремы в данном направлении.

2.6.1. Теорема [20]. *Пусть N — нормальная разрешимая подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, не являющаяся Q-вложенной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *p делит $|N|$, и каждая силовская p-подгруппа группы N не является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Если N — p'-группа, то из p-сверхразрешимости факторгруппы G/N следует p-сверхразрешимость группы G, что противоречит выбору G. Значит, p делит $|N|$. Пусть P — некоторая силовская p-подгруппа в N. Предположим, что P — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда P — элементарная группа. Прежде предположим, что каждая максимальная в P подгруппа является Q-вложенной в G. Понятно, что $|P| > p$. Следовательно, если E — максимальная в P подгруппа, то

$$N_G(E) \neq G.$$

Пусть T — такая квазинормальная в G подгруппа, что

$$ET = G \text{ и } T \cap E \leq E_{sG}.$$

По лемме 1.6.3, T является субнормальной подгруппой группы G. Если $T \neq G$, то из $PT = G$ получаем $G = [P]T$. Следовательно,

$$|P| = |G : T| \leq |E| < |P|.$$

Полученное противоречие показывает, что $T = G$, и поэтому

$$E = T \cap E \leq E_{sG} = E.$$

Следовательно, каждая максимальная подгруппа E из P является S-квазинормальной в G. Но тогда

$$O^p(G) \leq N_G(E) \neq G.$$

Следовательно, число всех максимальных подгрупп группы P делится на p, что противоречит [139, глава III, теорема 8.5 (d)]. Полученное противоречие показывает, что некоторая максимальная подгруппа E группы P не является Q-вложенной в G. Значит, по условию, в G имеется p-сверхразрешимое добавление T к E. Но $TE = G$ p-сверхразрешимой группой не является. Значит, $T \neq G$, и поэтому, как было рассмотрено выше, имеем

$$|G : T| = |R| = |E|,$$

противоречие. Этим доказано утверждение (1).

(2) *Для любой минимальной нормальной в G подгруппы R, содержащейся в N, факторгруппа G/R p-сверхразрешима.*

Ввиду (1) и разрешимости группы N, имеем $R \neq N$, и поэтому RN/R — неединичная нормальная разрешимая подгруппа в G/R такая, что факторгруппа

$$(G/R)/(RN/R) \simeq G/RN \simeq (G/N)/(RN/N)$$

является p-сверхразрешимой.

Пусть P/R — силовская q-подгруппа в N/R, q делит $|N/R|$, и P_1/R — произвольная максимальная в P/R подгруппа. Если P_0 — силовская q-подгруппа в P, то

$$P = RP_0,$$

и P_0 является силовской q-подгруппой в N. Покажем, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Прежде заметим, что

$$P_1 \cap P_0 \neq P_0.$$

Действительно, в противном случае $P_0 \leq P_1$, а значит,

$$P_1/R = RP_0/R = P/R,$$

что противоречит выбору подгруппы P_1/R. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что

$$P_1 \cap P_0 < T < P_0.$$

Тогда

$$P_1 = R(P_1 \cap P_0) \leq TR \leq RP_0 = P.$$

Но P_1 — максимальная в P подгруппа, и поэтому

$$\text{либо } P_1 = TR,$$

$$\text{либо } TR = RP_0.$$

Если $P_1 = TR$, то
$$T \leq P_1 \cap P_0 < T,$$
что невозможно. Итак, $TR = RP_0$, и поэтому
$$P_0 = P_0 \cap TR = T(P_0 \cap R) \leq T(P_1 \cap P_0) = T.$$

Вновь полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Согласно условию, либо подгруппа $P_1 \cap P_0$ является Q-вложенной подгруппой в G, либо $P_1 \cap P_0$ имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. В первом случае, подгруппа
$$P_1/R = (P_1 \cap P_0)R/R$$
является Q-вложенной в G/R, по лемме 2.1.5(1, 3). Во втором случае,
$$TR/R \simeq T/R \cap T$$
является p-сверхразрешимым добавлением к P_1/R в G/R. Это показывает, что условие теоремы выполняется и для факторгруппы G/R. Следовательно, по выбору группы G мы заключаем, что G/R — p-сверхразрешимая группа.

(3) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $R = C_N(R) = O_p(N)$, содержащуюся в N, и $G = [R]M$, где M — такая p-сверхразрешимая максимальная в G подгруппа, что*
$$p||M| \text{ и } O_p(M/M \cap C_G(R)) = 1.$$

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G и $R \leq N$. Тогда, согласно (2), факторгруппа G/R является p-сверхразрешимой. Так как класс всех p-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, по теореме 1.6.14, то R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G такая, что $R \leq N$. Кроме того, $R \nsubseteq \Phi(G)$ и R является p-группой. Понятно также, что $|R| \neq |p|$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $R \nleq M$. Тогда
$$G = [R]M \text{ и } C = C_G(R) = [R](C \cap M).$$

Ясно, что $C \cap M$ является нормальной подгруппой группы G, и поэтому
$$C_N(R) = N \cap [R](C \cap M) = [R](N \cap C \cap M),$$
где $N \cap C \cap M$ — нормальная в G подгруппа. Но тогда
$$N \cap C \cap M = 1,$$

т. е. $R = C_N(R)$. А поскольку, согласно [139, глава I, теорема 4.1], мы имеем $F(N) \leq C_N(R)$, то

$$R = C_N(R) = O_p(N).$$

Ясно, что M — p-сверхразрешимая группа. Кроме того, согласно 1.6.5, мы имеем

$$O_p(G/C_G(R)) = 1$$

и

$$O_p(M/M \cap C) = 1.$$

Заметим, что p делит $|M|$. Действительно, если p не делит $|M|$, то N/R — p'-группа, т. е. R — силовская p-подгруппа в N, что невозможно в силу (1). Итак, p делит $|M|$.

(4) $N = G$.

Согласно лемме 2.1.5(2), условие теоремы верно для N. Допустим, что $N \neq G$. Тогда поскольку $|N| < |G|$, то в силу выбора группы G, N — p-сверхразрешимая группа. Поскольку, согласно (3), мы имеем

$$R = C_N(R) = O_p(N),$$

то $O_{p'}(N) = 1$. Значит, N — сверхразрешимая группа и, следовательно, R — нормальная силовская в N подгруппа, что противоречит (1). Следовательно, $N = G$.

(5) *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $r \neq p$ и F — максимальная в Q подгруппа, то либо $F = 1$, либо $G = DF$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы D.*

Согласно условию, подгруппа F либо Q-вложена в G, либо имеет p-сверхразрешимое добавление в G. Предположим, что $F \neq 1$. Допустим, что подгруппа F Q-вложена в G, и пусть T — такая квазинормальная подгруппа в G, что

$$FT = G \text{ и } F \cap T \leq F_{sG}.$$

По лемме 1.6.3, T является субнормальной подгруппой группы G. Ввиду лемм 1.6.2(3) и 2.1.5(1), подгруппа F_{sG} субнормальна в G и поэтому, согласно лемме 1.6.1(4), имеет место

$$F_{sG} \leq O_r(G) \leq C_G(R),$$

что в силу (3) и (4) влечет $F_{sG} = 1$. Значит,

$$T \cap F = 1,$$

и поэтому для силовской r-подгруппы T_r из T мы имеем $|T_r| = r$. В силу леммы 2.1.5(2), это означает, что условие теоремы верно для T. Так как

$$F \neq 1 \text{ и } T \cap F = 1,$$

то $T \neq G$, и поэтому, согласно выбору группы G, T — p-сверхразрешимая группа. Ясно, что

$$|G : T| = r^{\alpha}$$

для некоторого натурального числа α, и потому $R \leq T$. Поскольку $C_G(R) = R$, мы видим, что $O_{p'}(T) = 1$. Следовательно, T — сверхразрешимая группа и R — нормальная силовская подгруппа в T. Так как T — субнормальная в G подгруппа и R характеристична в T, то R нормальна в G, что противоречит (1).

Таким образом, F не является Q-вложенной в G, и поэтому для некоторой p-сверхразрешимой подгруппы D мы имеем $FD = G$, что и, как в предыдущем абзаце, позволяет заключить, что D — сверхразрешимая группа.

(6) *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $|Q| \neq r < p$ и G_p — силовская p-подгруппа в G, то $r \nmid |G : N(G_p)|$.*

Так как $|Q| \neq r$, то, ввиду (5), каждая максимальная в Q подгруппа имеет сверхразрешимое добавление в G. Пусть $\{Q_1, \ldots, Q_t\}$ — набор всех максимальных в Q подгрупп. И пусть T_i — такая сверхразрешимая подгруппа группы G, что

$$Q_i T_i = G, i = 1, \ldots, t.$$

Пусть P — силовская p-подгруппа в T_1. Понятно, что P является силовской p-подгруппой в G. Значит, P нормальна в T_1. Так как Q действует транзитивно на множестве силовских p-подгрупп группы G, то для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$ в Q найдется такой элемент x_i, что P^{x_i} — силовская p-подгруппа в T_i. С каждым $i \in \{1, \ldots, t\}$ сопоставим некоторый полный набор $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ представителей левых смежных классов по подгруппе Q_i в Q такой, все элементы которого принадлежат T_i. И пусть S — объединение всех таких наборов.

Заметим, что поскольку $P^{x_i} \trianglelefteq T_i$, то каждый элемент из $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ имеет вид g^{x_i}, где $g \in N_G(P)$. Ясно, что подгруппа Q порождается множеством S. Так как при этом

$$g^{-1} g^{x_i} \in Q' \subseteq \Phi(Q),$$

то в действительности Q порождается некоторым набором элементов из $N_G(P)$. Этим доказано утверждение (6).

(7) *Порядок группы G делится, по крайней мере, на три простых числа.*

Допустим, что G — $\{p, q\}$-группа, и пусть Q — некоторая силовская q-подгруппа группы G, содержащаяся в M. Так как, согласно (3) и (4), имеет место $O_p(M) = 1$, то

$$F(M) = O_q(M).$$

Прежде предположим, что $|Q| = q$, и пусть P_2 — силовская p-подгруппа в M. Тогда

$$P_2 \simeq M/C_M(Q) = M/Q$$

является циклической группой. Это, в частности, означает, что подгруппа M сверхразрешима, и поэтому $q > p$. Пусть $P = RP_2$. Тогда P — силовская p-подгруппа в G. Если P_1 — максимальная подгруппа в P такая, что $P_2 \leq P_1$, то

$$P_1 = P_1 \cap RP_2 = P_2(P_1 \cap R).$$

Ясно, что $R \nsubseteq P_1$.

Предположим, что P_1 является Q-вложенной в G подгруппой. Пусть

$$L = P_{1sG}$$

и T — такая квазинормальная в G подгруппа, что

$$P_1T = G \text{ и } T \cap P_1 \leq L.$$

Предположим, что $L = 1$. Тогда

$$|T| = pq^b,$$

и поэтому, согласно лемме 2.1.5(2), условие теоремы остается верным для T. Следовательно, T — p-сверхразрешимая группа. Поскольку $O_q(G) = 1$, то, в силу 1.6.1(4), мы имеем

$$O_q(T) = 1 = O_{p'}(T) = 1.$$

Значит, T — сверхразрешимая группа. Но тогда, в силу $q > p$, мы видим, что силовская q-подгруппа из T является нормальной в T, а значит, она содержится в $O_q(T) = 1$. Это противоречие показывает, что $L \neq 1$. В силу лемм 1.6.1(6) и 1.6.2(3),

$$L \leq O_p(G) = R,$$

и поэтому
$$L \leq R \cap P_1.$$

Заметим, что $R \leq T$. Действительно, так как T субнормальна в G, по лемме 1.6.3, и, очевидно, T содержит некоторую силовскую q-подгруппу Q группы G, то
$$R \leq Q^G \leq T_G.$$

Таким образом,
$$T \cap P_1 \leq R \cap P_1 \leq T \cap P_1,$$
что влечет $T \cap P_1 = R \cap P_1$. Следовательно, в силу
$$T \cap P_1 \leq L \leq R \cap P_1$$
мы получаем
$$T \cap P_1 = L.$$
Понятно, что $R \cap P_1$ является нормальной в P подгруппой. С другой стороны,
$$L = R \cap P_1$$
— S-квазинормальная G подгруппа, и поэтому для некоторой силовской q-подгруппы Q группы G мы имеем
$$Q \leq N_G(L).$$
Значит, L — нетривиальная в P подгруппа, которая является нормальной в G. Следовательно,
$$R \leq L \leq P_1,$$
противоречие.

Таким образом, P_1 не является Q-вложенной подгруппой в G, и в соответствии с условием в группе G имеется такая p-сверхразрешимая подгруппа T, что $G = P_1T$. Покажем, что силовская q-подгруппа T_q нормальна в T. Действительно, если $O_{p'}(T) \neq 1$, то поскольку $\pi(G) = \{p, q\}$ и $|Q| = q$, мы имеем
$$O_{p'}(T) = T_q \trianglelefteq T.$$

Предположим, что $O_{p'}(T) = 1$. Тогда группа T сверхразрешима. Так как $q > p$, то
$$T_q \leq O_{p'}(T),$$
что приводит к противоречию. Следовательно, рассматриваемый нами случай невозможен. Таким образом, T_q является нормальной подгруппой

в T. Так как T_q — силовская q-подгруппа в G, мы видим, что T_q и Q сопряжены, то есть $T_q = Q^g$ для некоторого $g \in G$. Понятно, что $M = N_G(Q)$, что влечет $M^g = N_G(T_q)$. Теперь, используя приведенное выше, мы видим, что

$$T \subseteq N_G(T_q) = M^q.$$

Пусть $T \neq M^g$. Так как $G = P_1T$, мы имеем

$$M^g = M^g \cap P_1T = T(M^g \cap P_1),$$

и, значит, найдутся силовская p-подгруппа M_p в M^g и силовская подгруппа T_p в T такие, что

$$M_p = T_p(M^g \cap P_1).$$

Но, как мы уже знаем, M_p — циклическая группа. Следовательно,

$$\text{либо } M^g \cap P_1 = M_p,$$

$$\text{либо } T_p = M_p.$$

Пусть имеет место последний случай. Пусть P_3 — силовская p-подгруппа в T такая, что $P_3 \leq M_p$. Тогда мы имеем $P_3 \leq P_1$, и поэтому

$$|G : Q| \leq |P_1|.$$

Но $T = P_3Q_1$ для некоторой силовской q-подгруппы Q_1 из T, и поэтому мы имеем

$$G = P_1T = P_1P_3Q_1 = P_1Q_1,$$

что влечет

$$|G : Q| \leq |P_1|.$$

Однако, тогда

$$|G : Q_1| = |P| > |P_1|.$$

Это противоречие показывает, что

$$M^g \cap P_1 \neq M_p.$$

Следовательно,

$$T_p = M_q, \text{ и } T = M^g.$$

Наконец, поскольку $G = MR$, то для любого $g \in G$ мы имеем $g = mr$, где $m \in M$ и $r \in R$. Следовательно,

$$M^g = M^{mr} = M^r = P_2^r(Z_q)^r.$$

Так как P_1 — максимальная подгруппа в P, то P_1 является нормальной подгруппой в P. Однако поскольку $P_2 \leq P_1$, мы имеем $P^r \leq P_1$. Следовательно,

$$G = P_1T = P_1M^g = P_1P_2^r(Z_q)^r = P_1(Z_q)^r,$$

и поэтому

$$|G| = |P_1|q < |P|q.$$

Полученное противоречие показывает, что $|Q| > q$.

Пусть E — максимальная подгруппа в Q. Предположим, что подгруппа E является Q-вложенной в G, и пусть T — такая квазинормальная в G подгруппа, что

$$ET = G \text{ и } E \cap T \leq E_{sG}.$$

Поскольку

$$E_{sG} \leq O_q(G) = 1,$$

то T — дополнение к E в G, и поэтому условие теоремы верно для T. Следовательно, T — p-сверхразрешимая группа. Но это, как и выше рассмотренное, приводит к противоречию. Следовательно, подгруппа E не является Q-вложенной в G, и поэтому, согласно условию для некоторой p-сверхразрешимой подгруппы T группы G, мы имеем $ET = G$. Ясно, что $R \leq T$. Следовательно, $O_{p'}(T) = 1$, что влечет сверхразрешимость группы T. Но тогда $p > q$, и поэтому, согласно (6), подгруппа P нормальна в G, что противоречит (3). Это противоречие заканчивает доказательство (7).

(8) *Во множестве $\pi(G) \diagdown \{p\}$ найдется такое число q, что силовская q-подгруппа группы G не является циклической.*

Действительно, предположив противное, видим, что M — сверхразрешимая группа. Пусть q — наибольшее число в $\pi(G) = \pi(M)$. Так как

$$O_p(M) = 1,$$

то $p \neq q$. Так как группа G является p-разрешимой, то $PQ = QP$ для некоторых силовских p-подгруппы P и q-подгруппы Q из G. Легко видеть, что условие теоремы выполняется в группе PQ. Но $|PQ| < |G|$, и поэтому PQ — p-сверхразрешимая группа. Так как $R \leq PQ$, то

$$O_{p'}(PQ) = 1.$$

Таким образом, PQ — сверхразрешимая группа, и поэтому

$$Q \subseteq O_{p'}(PQ) = 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что верно (8).

Заключительное противоречие.

Покажем, что силовская p-подгруппа группы G нормальна в G. Согласно (8), для некоторого $q \in \pi(G)$, где $q \neq p$, силовская q-подгруппа Q группы G не является циклической. Пусть Q_1 — максимальная в Q подгруппа. Тогда, согласно (5), $G = Q_1T$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы T. Так как, очевидно, $R \subseteq T$, то p — наибольшее число в $\pi(G)$. Пусть T_p — силовская p-подгруппа в T. Ясно, что T_p — силовская p-подгруппа в G. Значит,

$$T_p \trianglelefteq T.$$

Кроме того, согласно (6),

$$q \nmid |G : N(T_p)|,$$

что влечет нормальность подгруппы T_p в группе G. Но это невозможно в силу (3). Теорема доказана.

2.6.2. Теорема [20]. *Пусть N — p-разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, не являющаяся S-квазинормальной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Теорема доказывается аналогично теореме 2.6.1.

2.6.3. Следствие [12]. *Пусть p — простое число, G — p-разрешимая группа и H — нормальная подгруппа группы G такая, что G/H принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп. Если каждая максимальная подгруппа силовской подгруппы из H Q-вложена в G, то G принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп.*

2.6.4. Следствие. *p-разрешимая группа G является p-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G имеет p-сверхразрешимое добавление в G.*

2.6.5. Следствие. *p-разрешимая группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G имеет p-нильпотентное добавление в G.*

Доказательство. Предположим, что данное утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда группа G монолитична и, ее единственная минимальная нормальная подгруппа R такова, что

$$R = C_G(R) = O_p(G)$$

(см. доказательство теоремы 2.6.1). Согласно теореме 2.6.2, G — p-сверхразрешимая группа. Значит, $|R| = p$, и поэтому G/R — абелева группа. Значит, R — силовская p-подгруппа в G, и поэтому, согласно условию, группа G p-нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство данного следствия.

2.7 Группы, в которых 2-максимальные подгруппы слабо Q-вложены

Вторые максимальные подгруппы были введены Хуппертом в работе [140], где было доказано также, что группа сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа нормальна. Данный результат стимулировал появление большого числа теорем, заключающихся в нахождении критериев принадлежности группы к выделенному классу групп, и, в частности, критериев сверхразрешимости на основе условий, налагаемых на 2-максимальные подгруппы. Задача описания сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп была решена в работе [130] в рамках построенной в ней теории X-квазинормальных подгрупп.

В данном разделе решена задача исследования сверхразрешимости групп в терминах 2-максимальных подгрупп в рамках теории слабо Q-вложенных подгрупп.

2.7.1. Определение. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда H называется слабо Q-вложенной в G, если в группе G существуют такие квазинормальные в G подгруппы C и T, что $C = HT$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.*

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

2.7.2. Теорема [21]. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *G сверхразрешима.*

(2) *Каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G : E|$ имеет циклическое добавление в E^G, и существует такая нормальная подгруппа T, что $ET = E^G$ и $T \cap E \leq E_G$.*

(3) *Каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G : E|$ имеет циклическое добавление в E^G, и слабо Q-вложена в G.*

Прежде отметим наиболее общие свойства слабо Q-вложенных подгрупп.

2.7.3. Лемма [21]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда:*

(1) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H слабо Q-вложена в G/H тогда и только тогда, когда K является слабо Q-вложенной подгруппой в G.*

(2) *Если H слабо Q-вложена в G, то H слабо Q-вложена в K.*

Лемма доказывается аналогично лемме 2.1.5.

Докажем следующую лемму, которая является одним из главных этапов в доказательстве теоремы 2.7.2 и представляет самостоятельный интерес.

2.7.4. Лемма [21]. *Пусть G — группа и p — простое число. Группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда любая максимальная подгруппа M из G является слабо Q-вложенной в G либо $|G : M|$ — степень числа p.*

Доказательство. Необходимость. Прежде предположим, что G разрешима, и пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G. Докажем, что в этом случае M слабо Q-вложена. Если M нормальна в G, то она слабо Q-вложена в G. Пусть M — ненормальная подгруппа в G и T/K — главный фактор группы G такой, что $K \leq M$, тогда

$$TM = G = M^G \text{ и } T \cap M = M_G = M_{sG},$$

по лемме 1.6.17(4). Следовательно, M слабо Q-вложена в G.

Достаточность. Теперь предположим, что для каждой максимальной подгруппы M из G либо $|G : M|$ — степень числа p, либо M является слабо Q-вложенной подгруппой в G. Докажем, что G разрешима.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G. Поскольку гипотеза верна для G/L, то, по индукции G/L, разрешима. Следовательно, можем предположить, что L — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа из G. По лемме Фраттини, для любого простого числа q, делящего $|L|$, и для некоторой силовской q-подгруппы Q из L существует максимальная подгруппа M группы G такая, что

$$LM = G \text{ и } N_G(Q) \leq M.$$

Ясно, что $M_G = 1$ и q не делит $|G : M|$. Если

$$|G : M| = p^{\alpha},$$

то p делит $|L|$. Значит,

$$N_G(P) \leq M$$

и p не делит $|G : M|$, противоречие. Следовательно, G имеет максимальную подгруппу M такую, что $|G : M|$ не является степенью простого числа p и $M_G = 1$. Следовательно, по гипотезе, M слабо Q-вложена в G. Таким образом, G имеет квазинормальные подгруппы C и T такие, что

$$C = MT \text{ и } T \cap M \leq M_G = 1.$$

Тогда, ввиду максимальности M, либо $C = G$, либо $C = M$. Если $C = M$, то M квазинормальна и, по лемме 1.6.2(3), M субнормальна в G. Следовательно, M нормальна в G. Тогда $M_G = M$, противоречие. Значит, $C = G$. Следовательно, $|T|$ делит $|G : M|$. Пусть X — минимальная субнормальная подгруппа из G, содержащаяся в T. Поскольку $F(G) = 1$, то X — простая неабелева группа, по лемме 1.6.1(6), и, следовательно, $X \leq L$. Тогда L представимо в виде прямого произведения простых неабелевых групп изоморфных подгруппе X. Так как q не делит $|G : M|$ и $|X|$ делит $|G : M|$, имеем $(q, |L|) = 1$. Данное противоречие показывает, что G разрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.7.2.

(1) $\Rightarrow$ (2). Прежде предположим, что G сверхразрешима, и пусть E — некоторая 2-максимальная подгруппа из G с непримарным индексом

$$|G : E| = pq, \text{ где } p > q.$$

Докажем индукцией по порядку $|G|$, что E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T в G, что

$$ET = E^G \text{ и } T \cap E \leq E_G.$$

Предположим, что $D = E_G \neq 1$. Тогда по индукции E/D имеет циклическое добавление $\langle aD \rangle$ в $(E/D)^{(G/D)}$. Тогда имеем

$$(E/D)\langle aD \rangle = (E\langle a \rangle)/D = (E/D)^{(G/D)} = E^G/D,$$

и поэтому $E\langle a \rangle = E^G$. С другой стороны, существует такая нормальная в G/D подгруппа T/D, что

$$(E/D)(T/D) = (E/D)^{(G/D)} \text{ и } (T/D) \cap (E/D) \leq (E/D)_{(G/D)}.$$

Следовательно, по лемме 1.6.17(3),

$$(E/D)(T/D) = (ET)/D = (E/D)^{(G/D)} = E^G/D \text{ и } (T/D) \cap (E/D) =$$

$$= (T \cap E)/D \leq (E/D)_{(G/D)} = E_G/D.$$

Таким образом, $ET = E^G$ и $E \cap T \leq E_G$.

Теперь предположим, что $D = 1$. Тогда

$$\pi = \pi(F(G)) \subseteq \{p, q\}.$$

Поскольку G сверхразрешима, то $G/F(G)$ абелева. Следовательно,

$$E^G \leq F(G)E.$$

Пусть r — наибольший простой делитель порядка $|G|$ и G_r — силовская r-подгруппа G_r. Поскольку G сверхразрешима, то G_r нормальна в G и $G_r \leq F(G)$. Если L — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в G_r, то $L \nsubseteq E$ и r не делит $|G : EL|$.

Предположим, что $G_r = F(G)$. Тогда

$$E^G \leq G_r E = LE.$$

Следовательно, E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T, что

$$ET = E^G \text{ и } T \cap E \leq E^G.$$

Теперь предположим, что $\pi = \{p, q\}$, и пусть Q — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в силовской q-подгруппе из $F(G)$. Тогда

$$G = [LQ]E,$$

и поэтому

$$E^G = E(E^G \cap LQ).$$

Таким образом, E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T, что

$$ET = E^G \text{ и } T \cap E \leq E_G.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Теперь предположим, что каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G : E|$ имеет циклическое добавление в E^G и слабо Q-вложена в G. Покажем, что G

сверхразрешима. Допустим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда

(1) G *— непростая группа.*

Предположим, что G — простая неабелева группа. Пусть M — максимальная подгруппа из G и π — множество всех простых делителей $|G:M|$. Тогда некоторая максимальная подгруппа E из M имеет непримарный индекс $|G:E|$. Действительно, если $|\pi|>1$, то утверждение очевидно. Пусть

$$|G:M|=p^a$$

для некоторого простого p и пусть E — максимальная подгруппа из M, содержащая силовскую p-подгруппу из M. Тогда индекс $|G:E|$ является непримарным и, по условию, E слабо Q-вложена в G. Пусть C и T — квазинормальные в G подгруппы такие, что

$$TE=C \text{ и } T\cap E\leq E_{sG}.$$

По лемме 1.6.2(3), C, E_{sG} и T — субнормальные подгруппы из G. Поскольку G — простая группа, имеем

$$C=T=G \text{ и } E=E_{sG}=1.$$

Но тогда $|M|$ — простое число, и, значит, G сверхразрешима. Полученное противоречие доказывает (1).

(2) G *имеет единственную минимальную нормальную подгруппу* L, *и* $L=G^{\mathfrak{U}}\not\subseteq\Phi(G)$ *является* $\mathfrak{U}$*-корадикалом из* G.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда, по лемме 2.7.3(1), гипотеза верна для G/L, поэтому G/L сверхразрешима ввиду выбора группы G. Поскольку $\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией, то имеем (2).

(3) G *разрешима.*

Ввиду (1) и (2), G имеет нормальную максимальную подгруппу M. Пусть $|G:M|=p$. Тогда каждая максимальная подгруппа E из M, для которой $|M:E|$ не является степенью числа p, является слабо Q-вложенной в G по условию. По лемме 2.7.3(2), подгруппа E слабо Q-вложена в M. Следовательно, M разрешима, ввиду теоремы 2.7.4. Значит, G разрешима.

(4) $G=[L]M$ *для некоторой максимальной подгруппы* M *из* G, *где* $L=C_G(L)=O_p(G)$ *для некоторого простого* $p\neq|L|$.

Ввиду (3), L — p-группа для некоторого простого p. Согласно (2),

$$L=C_G(L)=O_p(G)$$

и $|L| > p$, поскольку G не является сверхразрешимой.

(5) *L не является силовской p-подгруппой из G.*

Предположим, что L — силовская p-подгруппа из G, и пусть E — нормальная максимальная подгруппа из M. Тогда E имеет непримарный индекс $|G : E|$ и, по условию, E слабо Q-вложена в G и имеет циклическое добавление X в E^G. Предположим, что $E = 1$, и пусть V — максимальная подгруппа из L. Тогда по условию, V является слабо Q-вложенной в G подгруппой. Пусть C и T — квазинормальные в G подгруппы такие, что

$$C = VT \text{ и } T \cap V \leq V_{sG}.$$

Поскольку L — силовская p-подгруппа из G, то подгруппы V_{sG}, C и T нормальны в G, по лемме 2.7.3. Следовательно, $T = L$ и $V = 1$. Но тогда $|L| = p$, что противоречит (4). Таким образом, $E \neq 1$. Пусть $|M : E| = q$ и Q — силовская q-подгруппа из M. Ясно, что Q — силовская q-подгруппа из G, поэтому

$$A = E^G Q = QE^G$$

является подгруппой группы G. Поскольку E нормальна в M, то $E^G \leq LE$. Предположим, что

$$1 \neq L \cap E^G \neq L.$$

Тогда $1 \neq L \cap A \neq L$ и

$$LA = LE^G Q = LM = G.$$

Значит, $L \cap A$ нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности L. Следовательно,

$$\text{либо } L \cap E^G = 1,$$

$$\text{либо } L \leq E^G.$$

Предположим, что $L \cap E^G = 1$. По лемме 1.6.2(3), E^G субнормальна в G, и поэтому

$$L \leq N_G(E^G).$$

Следовательно,

$$LE^G = L \times E^G$$

и, более того, $E^G \leq C_G(L) = L$. Полученное противоречие показывает, что

$$L \leq E^G \text{ и } E^G = LE = XE.$$

Поскольку L — силовская p-подгруппа из $LE = XE$, то L изоморфна силовской p-подгруппе из X, и поэтому L — циклическая группа, что противоречит (4).

(6) *M имеет ненормальную максимальную подгруппу E такую, что $|M : E| = q \neq p$.*

Предположим, что каждая максимальная подгруппа E из M с индексом

$$|M : E| = q \neq p$$

нормальна в M. Тогда M — q-нильпотентна для всех таких q. Следовательно, M p-замкнута. Но ввиду (4), имеем $O_p(M) = 1$. Следовательно, L является силовской p-подгруппой в G, что противоречит (5).

Заключительное противоречие.

Пусть E — ненормальная максимальная подгруппа из M такая, что

$$|M : E| = q \neq p.$$

Пусть $D = E^G$ и T — циклическое добавление к E в D. Предположим, что $M \leq D$. Тогда очевидно, что $D = G$. Следовательно,

$$G = ET = MT.$$

Ясно, что

$$K = M \cap T \neq 1.$$

Значит,

$$K^G = K^{TM} = K^M \leq M_G = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $M \nsubseteq D$. Следовательно,

$$E = D \cap M$$

— субнормальная подгруппа из M. Но E — максимальная подгруппа в M, поэтому E нормальна в M. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствиями теоремы 2.7.2 являются следующие известные результаты.

2.7.5. Следствие (B. Huppert [140]). *Группа G сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа нормальна в G.*

2.7.6. Следствие (R.K. Agrawal [47]). *Группа G сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна в G.*

3 ФАКТОРИЗАЦИИ ГРУПП С ЗАДАННЫМИ Q-ВЛОЖЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Известно, что группа $G = HK$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами H и K не всегда является сверхразрешимой. Отметим следующие случаи, ведущие к сверхразрешимости группы $G = HK$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами H и K: подгруппы H и K имеют взаимно простые индексы ([108], 1971 год); группа G имеет нильпотентный коммутант ([66], 1957 год); подгруппы из H перестановочны со всеми подгруппами из K, а подгруппы из K перестановочны со всеми подгруппами из H, ([65], 1989 год). Подобная тематика разрабатывалась и в статье А.Н. Скибы, Вэньбинь Го и К.П. Шама [121]. Целью данной главы является получение новых критериев метанильпотентности, разрешимости и сверхразрешимости факторизуемых групп на основе условия Q-вложенности некоторых подгрупп.

3.1 Новая характеризация метанильпотентных групп

Напомним, что группа G называется метанильпотентной, если существует нормальная нильпотентная подгруппа N группы G такая, что факторгруппа G/N нильпотентна. В данном разделе мы доказываем следующую новую характеризацию метанильпотентных групп.

3.1.1. Теорема [143]. *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппа A субнормальна в G, B — холлова абелева подгруппа в G и каждая силовская подгруппа из A является Q-вложенной в G.*

Для доказательства этого результата нам понадобятся следующие леммы.

3.1.2. Лемма [143]. *Пусть $G = AB$, где A — субнормальная подгруппа группы G, B — нильпотентная подгруппа группы G, и каждая силовская подгруппа из A имеет субнормальное дополнение в группе G. Тогда группа G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *A и каждая собственная подгруппа группы G, содержащая A, нильпотентны.*

Пусть $A \leq M \leq G$, где $M \neq G$. Тогда

$$M = M \cap AB = A(M \cap B),$$

где $M \cap B$ — нильпотентная в G подгруппа и A — субнормальная подгруппа в M. Пусть A_p — силовская подгруппа группы A и T — субнормальное дополнение для A_p в G. Тогда

$$M = M \cap A_pT = A_p(M \cap T),$$

где, ввиду леммы 1.6.1(3), $M \cap T$ субнормально в M. Значит, условия теоремы справедливы для M, и поскольку $|M| < |G|$, то, по выбору группы G, M — нильпотентная группа. Ясно, что A нильпотентна.

(2) *G разрешима.*

По условию, A субнормальна в G, и поэтому, ввиду (1) и по лемме 1.6.1(8), A содержится в некоторой разрешимой нормальной подгруппе N группы G. Но тогда

$$G/N \simeq B/B \cap N$$

нильпотентна, и поэтому G разрешима.

(3) *G/P нильпотентна для каждой нормальной p-подгруппы P группы G, содержащей силовскую p-подгруппу из A.*

Покажем, что условия теоремы справедливы для G/P. Ясно, что

$$(AP/P)(BP/P) = G/P,$$

где BP/P нильпотентна и AP/P субнормальна в G/P. Пусть Q/P — силовская q-подгруппа группы $AP/P \simeq A/A \cap P$. Тогда $(q, |P|) = 1$ и $Q = A_qP$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q группы A. Поскольку A — субнормальна в G и, ввиду (1), A нильпотентна, то A_q субнормальна в G, и поэтому

$$Q = A_q \times P.$$

Пусть T — субнормальное дополнение для A_q в G. Пусть

$$D = Q \cap TP = Q_1 \times P_1,$$

где Q_1 — силовская q-подгруппа из D и $P_1 \leq P$. Ясно, что $Q_1 \leq A_q$. Так как $(q, |P|) = 1$, то $Q_1 \leq T_q$ для любой силовской q-подгруппы T_q из T, и поэтому

$$Q_1 \leq T \cap A_q = 1.$$

Значит, $D = P_1$ и, следовательно,

$$TP/P \cap Q/P = 1.$$

Отсюда следует, что TP/P — субнормальное дополнение для Q/P в G/P. По выбору группы G мы заключаем, что G/P нильпотентна.

(4) *$A \leq F(G)$ и $F(G)$ — r-группа для некоторого простого числа r.*

Пусть P — силовская r-подгруппа группы A. Тогда, ввиду (1), P — субнормальная в G подгруппа, и поэтому, по лемме 1.6.1(6), $P \leq O_r(G)$. Согласно (3), $G/O_r(G)$ нильпотентна. Так как G не является нильпотентной группой, то

$$A \leq F(G) = O_r(G).$$

(5) *$|G| = p^a q$ для некоторых простых чисел p и q, и силовская p-подгруппа группы G нормальна.*

Пусть M — нормальная подгруппа группы G такая, что $A \leq M$ и G/M — простая группа. Ввиду (2), $|G : M| = q$ — простое число. Согласно (1), M нильпотентна. Поскольку каждая силовская подгруппа P из M характеристична в M, то P нормальна в G, и поэтому, ввиду (4), $M = P$.

(6) *A — p-группа.*

Это прямо следует из (4) и (5).

Заключительное противоречие.

Пусть T — субнормальное дополнение к подгруппе A в G. Тогда, по лемме 1.6.1(5), силовская q-подгруппа Q группы B содержится в T. Пусть $D = AQ$. Тогда, ввиду леммы 1.6.1(3),

$$T \cap D = Q(T \cap A) = Q$$

субнормальна в D. Значит, $D = A \times Q$, и поэтому $A \leq N_G(Q)$. Следовательно, $B \leq N_G(Q)$. Тогда Q нормальна в G. Следовательно, в силу (5), G нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3.1.3. Лемма [143]. *Если $G = AB$, где каждая силовская подгруппа из A является Q-вложеной в G, а B — холлова нильпотентная подгруппа в G, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что данная лемма не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Тогда каждая минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A, не является абелевой. Действительно, если для некоторой абелевой минимальной нормальной подгруппы L мы имеем $L \leq A$, то, согласно лемме 2.1.5, условие данной леммы верно для G/L, и поэтому по выбору группы G G/L разрешима. Но тогда G — разрешимая группа, что противоречит ее выбору.

Предположим, $A = G$ и пусть P — произвольная силовская подгруппа в G. Пусть $D = P_{qG}$. Согласно лемме 1.6.2(3), подгруппа D является субнормальной в G, и поэтому $D \leq F(G)$ по лемме 1.6.1(8). Но мы уже знаем, что в G нет абелевых минимальных нормальных подгрупп, и поэтому $D = F(G) = 1$. Но согласно условию подгруппа P Q-вложена в G, и поэтому в G найдется такая квазинормальная подгруппа T, которая является дополнением к P в G. Понятно, что T субнормальна в G, и поэтому T — нормальная в G подгруппа, согласно лемме 1.6.1. Итак, каждая силовская подгруппа из G имеет нормальное дополнение в G, и поэтому G — нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3.1.1.

Необходимость. Допустим, что $G = AB$, где A — субнормальная подгруппа группы G, B — холлова абелева подгруппа в G и каждая силовская подгруппа из A Q-вложена в G. Покажем, что группа G метанильпотентна. Предположим, что это не верно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Согласно лемме 3.1.3, группа G является разрешимой. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся p-группой для некоторого простого числа p. Тогда если либо $N \leq A$, либо $(p, |A|) = 1$, то факторгруппа G/N метанильпотентна.*

Понятно, что A/N субнормальна в G/N и подгруппа $BN/N \simeq B/B \cap N$ является холловой абелевой в группе G/N и

$$G/N = (A/N)(BN/N).$$

Пусть P/N — силовская p-подгруппа в AN/N. Пусть Q — такая силовская подгруппа в AN такая, что $P = QN$. Согласно 1.6.6, $Q = A_pN_p$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q из A и для силовской q-подгруппы N_q из N. Поскольку группа G разрешима, то N — абелева p-группа для некоторого простого числа p, и поэтому либо $N \leq A$, либо $(p, |A|) = 1$. Следовательно, A_qN/N — силовская q-подгруппа в AN/N. Применив теперь лемму 2.1.5(1), мы видим, что A_qN/N Q-вложена в G/N. Таким образом, условие теоремы верно для G/N, и поэтому, согласно выбору группы G, факторгруппа G/N метанильпотентна.

(2) *Для любой силовской p-подгруппы P из A имеет место $P_{qG} = P_G$.*

Пусть $D = P_{qG}$. Подгруппа D субнормальна в G, и поэтому, согласно 1.6.1(6), имеет место

$$D \leq O_p(G) \leq P.$$

Значит, если P является силовской подгруппой в G, то $D = P_G$. Предположим, что P не является силовской подгруппой в G. Тогда поскольку $G = AB$, то $P \leq B_p^x$, где B_p — силовская подгруппа в B и $x \in G$. Понятно, что B_p^x является силовской подгруппой в G. Так как B абелева, то D нормальна в B_p^x. Пусть G_q — силовская q-подгруппа в G, где $q \neq p$. Тогда DG_q — подгруппа в G, D нормальна в DG_q, и поэтому D — нормальная в G подгруппа, что влечет равенство $P_{qG} = P_G$.

(3) $A_G \neq 1$.

Предположим, что $A_G = 1$. Так как согласно условию B является абелевой группой, то имеет место

$$(A \cap B)^G = (A \cap B)^{BA} = (A \cap B)^A \leq A,$$

и поэтому $A \cap B = 1$. Поскольку $G = AB$, то, согласно 1.6.6, для любого простого числа p найдутся такие силовские p-подгруппы A_p, B_p и G_p в A, B и G соответственно, что $G_p = A_pB_p$. Но по условию подгруппа B является холловой, и поэтому из равенства $A \cap B = 1$ следует, что A является холловой подгруппой в G. Но по условию подгруппа A субнормальна в G, и поэтому, ввиду 1.6.1(4), подгруппа A нормальна в G. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *В группе G имеется в точности одна минимальная нормальная подгруппа L, содержащаяся в A, и L является p-группой для некоторого простого числа p.*

Действительно, согласно (3), одна из минимальных нормальных подгрупп L группы G содержится в A. Кроме того, так как класс всех метанильпотентных групп является насыщенной формацией, согласно лемме 1.6.13, то L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Наконец, заметим, что поскольку группа G разрешима, то L является p-группой для некоторого простого числа p.

(5) *Каждая силовская q-подгруппа из A, где $q \neq p$, имеет квазинормальное дополнение в G.*

Пусть Q — силовская q-подгруппа в A, где $q \neq p$. Согласно условию в G имеется такая квазинормальная подгруппа T, что

$$G = QT \text{ и } Q \cap T \leq Q_{qG}.$$

Но, ввиду (2) и (4), имеет место $Q_{qG} = 1$, и поэтому T — квазинормальное дополнение к Q в G.

Заключительное противоречие.

Пусть A_p — силовская p-подгруппа в A и $P = (A_p)_{sG} = A_G$. Рассмотрим факторгруппу $G/P = (A/P)(BP/P)$. По условию G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что

$$TA_p = G \text{ и } T \cap A_p \leq P.$$

Тогда

$$(A_p/P)(TP/P) = G/P$$

и

$$A_p/P \cap TP/P = P(A_p \cap T)/P = P/P,$$

и поэтому TP/P — квазинормальное дополнение для A_p/P в G/P. С другой стороны, если Q/N — силовская q-подгруппа в A/N, где $q \neq p$, то, ввиду (5), Q/P имеет квазинормальное дополнение в G/P (см. доказательство утверждения (3) в доказательстве леммы 3.1.2).

Значит, по лемме 3.1.2, G/P нильпотентна, и поэтому G метанильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство метанильпотентности группы G.

Достаточность. Предположим, что G метанильпотентна. Покажем, что каждая силовская подгруппа из G Q-вложена в G. Предположим, что это не верно и G — контрпример минимального порядка. Тогда G имеет силовскую подгруппу P, которая не является Q-вложенной в G. Пусть N — произвольная минимальная нормальная подгруппа в G и F — подгруппа Фиттинга группы G. Предположим, что $N \leq P$. Тогда P/N Q-вложена в G/N, и поэтому, по лемме 2.1.5(1), P Q-вложена в G, противоречие.

Значит, $P_G = 1$, и поэтому

$$F \cap P \leq P_{qG} = P_G = 1.$$

Так как по условию группа G метанильпотентна и FP/F — силовская подгруппа в G, то FP/F имеет нормальное дополнение T/F в G/F. Но поскольку F и T/F — p'-группы, то T — нормальное дополнение для P в G. Следовательно, P Q-вложена в G. Полученное противоречие показывает, что каждая силовская подгруппа из G Q-вложена в G. Теорема доказана.

3.1.4. Следствие. *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является Q-вложенной в группе G.*

3.1.5. Следствие (Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов [24]). *Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппа A субнормальна в G, B — холлова абелева подгруппа в G и каждая силовская подгруппа из A слабо квазинормальна в G.*

3.2 Новая характеризация разрешимых групп

В данном разделе установлена разрешимость группы на основе условия Q-вложенности максимальных подгрупп ее факторов. В частности, доказана следующая теорема

3.2.1. Теорема [143]. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A, B — подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B Q-вложены в G.*

Для доказательства теоремы 3.2.1 нам понадобится следующая лемма.

3.2.2. Лемма [143]. *Если каждая максимальная подгруппа группы G имеет дополнение, которое является квазинормальной в G подгруппой, то G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна, и пусть группа G — контрпример минимального порядка. Тогда $|G|$ не является простым числом, и поэтому G — не простая группа. Пусть N — произвольная собственная нормальная подгруппа группы G и M/N — максимальная подгруппа в G/N. И пусть T — квазинормальная в G подгруппа такая, что

$$G = MT \text{ и } M \cap T = 1.$$

Тогда TN/N — квазинормальная в G/N подгруппа,

$$(TN/N)(M/N) = G/N$$

и

$$(TN/N) \cap (M/N) = (TN \cap M)/N = N(T \cap M)/N = N/N.$$

Так как класс всех нильпотентных групп является насыщенной формацией, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Пусть N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда

$$C_G(N) \leq N.$$

Пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что $N \leq M$. И пусть T — квазинормальная в G подгруппа такая, что

$$G = TM \text{ и } T \cap M = 1.$$

По лемме 1.6.1(7), $N \leq N_G(T)$, и поэтому

$$NT = N \times T.$$

Но тогда
$$T \leq C_G(N) \leq N.$$
Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3.2.1.

Необходимость. Предположим сначала, что $G = AB$, где A, B — подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B Q-вложены в G. Покажем, что G — разрешимая группа. Предположим обратное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $A \cap B$, то G/N разрешима* (это прямо следует из леммы 2.1.5(1)).

(2) $A \neq G \neq B$.

Действительно, предположим, что $A = G$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда условие теоремы справедливо для $G/R = (G/R)(G/R)$, и, ввиду (1), G/R разрешима. Значит, R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G,
$$R \nleq \Phi(G) \text{ и } R = A_1 \times \ldots \times A_t,$$
где $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t$ — простая неабелева группа.

Пусть p — простой делитель порядка $|R|$ и M — максимальная подгруппа из G, содержащая $N = N_G(P)$, где P — силовская p-подгруппа группы R. Тогда, по лемме Фраттини, $G = RM$, и поэтому $M_G = 1$.

Пусть T — квазинормальная в G подгруппа такая, что
$$G = TM \text{ и } M \cap T \leq M_{sG}.$$
По лемме 1.6.17(4),
$$M \cap T \leq M_{sG} = M_G = 1.$$
Следовательно, T — дополнение для M в G. Ясно, что p не делит $|G : M|$, и, значит, $(p, |T|) = 1$. Отсюда следует, что $T \cap R = 1$, и поэтому, по лемме [103, глава A, лемма 14.3], $TR = T \times R$. Значит,
$$T \leq C_G(R) = 1,$$
поскольку R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и R неабелева. Следовательно, $G = TM = M$. Получили противоречие.

(3) *A, B — разрешимые группы* (это следует из (2) и выбора группы G).

Заключительное противоречие.

Пусть R — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Покажем, что AR/R нильпотентна. Если $A \leq R$, то это очевидно. Пусть теперь $A \nsubseteq R$ и $R \cap A \leq M$, где M — максимальная подгруппа группы A. Пусть T — квазинормальная в G подгруппа такая, что

$$G = MT \text{ и } M \cap T \leq M_{sG}.$$

Тогда

$$A = A \cap MT = M(A \cap T)$$

и $A \cap T$ — квазинормальная подгруппа в A. Поскольку $T \cap M$ квазинормальная в G подгруппа, то $T \cap M$ субнормальна в G. Ввиду (3), $T \cap M$ разрешима и, следовательно, $T \cap M \leq R$. Тогда мы имеем

$$(R \cap A)(T \cap A) \cap M = (R \cap A)(T \cap A \cap M) = (R \cap A)(T \cap M) \leq R \cap A.$$

Следовательно, по лемме 3.2.2, $A/R \cap A$ — нильпотентная группа, и поэтому

$$AR/R \simeq A/R \cap A$$

нильпотентна. Аналогично можно показать, что BR/R нильпотентна. Следовательно,

$$G/R = (AR/R)(BR/R)$$

разрешима по [149, теорема 2], и поэтому G разрешима, противоречие.

Достаточность. Предположим, что G разрешима, и пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда по [103, глава A, лемма 15.6], M/M_G имеет нормальное дополнение в G/M_G, и поэтому M/M_G Q-вложена в G/M_G. Значит, по лемме 2.1.5(1), M Q-вложена в G. Теорема доказана.

3.2.3. Следствие. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы Q-вложены в G.*

3.2.4. Следствие (Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов [24]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A, B — подгруппы группы G такие, что каждая максимальная подгруппа из A и каждая максимальная подгруппа из B слабо квазинормальна в G.*

3.3 Критерии сверхразрешимости и дисперсивности по Оре факторизуемых групп

Целью данного раздела является доказательство критериев сверхразрешимости и дисперсивности по Оре факторизуемых групп на основе условия Q-вложенности максимальных подгрупп силовских подгрупп одного из факторов.

3.3.1. Теорема [143]. *Если $G = AB$, где подгруппа A квазинормальна в G, B дисперсивна по Оре и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы A является Q-вложенной в G, то группа G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Каждая собственная подгруппа M группы G, содержащая A, дисперсивна по Оре.*

Пусть $A \leq M \leq G$, где $M \neq G$. Тогда

$$M = M \cap AB = A(M \cap B),$$

где $M \cap B$ дисперсивна по Оре и A квазинормальна в M. Так как, по лемме 2.1.5(2), любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы из A Q-вложена в M и $|M| < |G|$, то по выбору группы G мы имеем (1).

(2) *Пусть H — нееденичная нормальная подгруппа в G, являющаяся p-группой для некоторого простого числа p. Допустим, что либо H содержит силовскую p-подгруппу P из A, либо P циклична, либо $H \leq A$. Тогда G/H дисперсивна по Оре.*

Если $A \leq H$, то

$$G/H = BH/H \simeq B/B \cap H$$

дисперсивна по Оре. Пусть теперь $A \nsubseteq H$. Так как $|G/H| < |G|$, то нам лишь нужно показать, что условия теоремы справедливы для G/H. Ясно, что

$$G/H = (HA/H)(BH/H),$$

где HA/H квазинормальна в G/H и BH/H дисперсивна по Оре. Пусть Q/H — силовская q-подгруппа из AH/H и M/H — произвольная максимальная подгруппа в Q/H.

Пусть Q_1 — силовская q-подгруппа из Q такая, что $Q = HQ_1$. Ясно, что Q_1 — силовская q-подгруппа группы AH. Значит, $Q = A_qH$ для некоторой силовской q-подгруппы A_q из A. Предположим, что Q/H не является циклической подгруппой. Тогда A_q не циклична. Покажем, что M/H Q-вложена в G/H. Если $H \leq A$, то это прямо следует из леммы 2.1.5. Допустим, что либо силовская p-подгруппа P из A циклическая, либо $P \leq H$. Тогда $p \neq q$.

Покажем, что $M \cap A_q$ — максимальная в A_q подгруппа. Так как $M \neq Q$ и $A_qH = Q$, то $M \cap A_q \neq A_q$. Предположим, что для некоторой подгруппы T из G мы имеем

$$M \cap A_q \leq T \leq A_q, \text{ где } M \cap A_q \neq T \neq A_q.$$

Тогда
$$M = H(M \cap A_q) \leq HT \leq HA_q = Q.$$

Так как M — максимальная в Q подгруппа, то либо $M = TH$, либо $TH = HA_q$. Если $M = TH$, то

$$T \leq M \cap A_q,$$

что противоречит выбору подгруппы T. Значит, $TH = HA_q$, и поэтому мы имеем

$$A_q = A_q \cap TH = T(A_q \cap H) \leq T(M \cap A_q) = T,$$

противоречие. Следовательно, $M \cap A_q$ — максимальная в A_q подгруппа и по условию $M \cap A_q$ Q-вложена в G. Значит,

$$M/H = (M \cap A_q)H/H$$

Q-вложена в G/H. Следовательно, условия теоремы справедливы для факторгруппы G/H.

(3) *Если p — простое число и $(p, |A|) = 1$, то $O_p(G) = 1$.*

Пусть $H = O_p(G) \neq 1$. Тогда, ввиду (2), G/H дисперсивна по Оре. С другой стороны, если π — множество всех простых делителей $|A|$, то, по лемме 1.6.1(6), $A \leq E$, где E — нормальная π-подгруппа в G, и поэтому

$$G/E \simeq B/B \cap E$$

дисперсивна по Оре. Но тогда $G \simeq G/H \cap E$ дисперсивна по Оре, противоречие. Значит, справедливо (3).

(4) *G разрешима.*

По условию A S-квазинормальна в G, и поэтому, ввиду леммы 1.6.1(8), A содержится в некоторой разрешимой нормальной подгруппе E группы G. Так как $G/E \simeq B/B \cap E$ дисперсивна по Оре, то G разрешима.

(5) $A_G \neq 1$.

Предположим, что $A_G = 1$. Тогда, согласно [149], A нильпотентна. Пусть P — силовская p-подгруппа группы A. Поскольку A субнормальна в G, то P субнормальна в G. Значит, по лемме 1.6.1(4), $P \leq O_p(G)$. Но, ввиду (2), $G/O_p(G)$ дисперсивна по Оре, поэтому, ввиду выбора группы

G, $P = A$. Пусть q — наименьший простой делитель $|G/O_p(G)|$. Тогда G имеет нормальную максимальную подгруппу M такую, что

$$P \leq M \text{ и } |G : M| = q.$$

Пусть r — наибольший простой делитель $|G|$, R — силовская r-подгруппа группы M. Тогда, ввиду (1), R нормальна в M, и поэтому $R \lhd G$. Если $r \neq q$, то R — силовская r-подгруппа группы G, и поэтому G/R дисперсивна по Оре. Отсюда следует, что G дисперсивна по Оре, противоречие. Следовательно, $r = q$. Но тогда $G/O_p(G)$ r-группа.

Пусть B_r — силовская r-подгруппа в B. Тогда B_r — силовская r-подгруппа в G. Поскольку AB_q — подгруппа группы G и, ввиду (1), AB_q дисперсивна по Оре, то B_q нормальна в AB_q. Так как B дисперсивна по Оре, то B_q нормальна в B, и поэтому $B_q \lhd G$. Следовательно, группа G дисперсивна по Оре. Полученное противоречие доказывает (5).

Заключительное противоречие.

Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A. Пусть H — p-группа и P — силовская p-подгруппа группы A. Ввиду (2), G/H дисперсивна по Оре. Пусть q — наименьший простой делитель $|G/H|$. Тогда G имеет нормальную максимальную подгруппу M, такую что

$$P \leq M \text{ и } |G : M| = q.$$

Пусть r — наибольший простой делитель $|G|$, R — силовская r-подгруппа группы M. Тогда, ввиду (1), R нормальна в M, и поэтому $R \lhd G$. Рассуждая, как показано выше, видим, что $r = q$. Но тогда G/H — r-группа. Значит, $H = A$, и поэтому G дисперсивна по Оре, согласно теореме 2.3.2. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3.3.2. Следствие (Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов [24]). *Если $G = AB$, где подгруппа A квазинормальна в G, B дисперсивна по Оре и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы A слабо квазинормальна в G, то группа G дисперсивна по Оре.*

Для доказательства теоремы 3.3.4 нам понадобится следующая лемма.

3.3.3. Лемма [143]. *Предположим, что $G = [P]M$, где P — силовская p-подгруппа в G, M — разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы из P являются Q-вложенными в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна, и пусть группа G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Если N минимальная нормальная подгруппа из G, то G/N — p-сверхразрешимая группа.*

Действительно,

$$G/N = [PN/N](MN/N),$$

где PN/N — силовская p-подгруппа в G/N, MN/N — разрешимая группа. Пусть K/N — некоторая максимальная подгруппа в PN/N.

Покажем, что подгруппа K/N Q-вложена в G/N. Поскольку P является силовской p-подгруппой в G, то

$$K = K \cap PN = N(K \cap P).$$

Прежде всего покажем, что $K \cap P$ — максимальная подгруппа в P. Заметим, что $K \cap P \neq P$. Действительно, если $K \cap P = P$, то

$$P \subseteq K \text{ и } K/N = PN/N,$$

что противоречит выбору подгруппы K/N. Теперь допустим, что существует подгруппа T такая, что $K \cap P \subset T \subset P$. Тогда

$$K = N(K \cap P) \subseteq TN \subseteq PN.$$

Так как K является максимальной подгруппой в P, то либо $K = TN$, либо $TN = NP$. Если $K = TN$, то $T \subseteq K \cap P \subset T$, что невозможно. Следовательно, $TN = PN$, так как

$$P = P \cap TN = T(P \cap N) \subseteq T(P \cap K) = T.$$

Полученное противоречие показывает максимальность подгруппы $K \cap P$ группы P.

По условию, $K \cap P_p$ Q-вложена в G. Тогда по лемме 2.1.5(2),

$$(K \cap P_p)N/N$$

Q-вложена в GN/N, так как K/N — Q-вложенная подгруппа. Итак, условие теоремы выполняется для G/N. Ввиду выбора группы G, G/N — p-сверхразрешимая группа.

(2) *N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N — p-группа.*

Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией (см. теорема 1.6.14), то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Так как G p-сверхразрешима, то либо N является p'-группой, либо N — p-группа. Если N — p'-группа, тогда G p-сверхразрешима. Следовательно, N является p-группой.

(3) $N = P$.

Так как $N \nleq \Phi(G)$, то существует подгруппа L в G такая, что $G = [N]L$. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно,

$$O_p(G) = O_p(G) \cap NL = N(O_p(G) \cap L).$$

Поскольку

$$O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N),$$

то $O_p(G) \cap L$ нормальна в G. Следовательно,

$$O_p(G) \cap L = 1.$$

Таким образом,

$$N = O_p(G) = P.$$

Заключительное противоречие.

Пусть K — максимальная подгруппа в P. Тогда по условию G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что

$$KT = G \text{ и } T \cap K \leq K_{sG}.$$

Так как $K \leq N$, то $NT = G$. Если $N \cap T = 1$, то $KT \neq G$. Следовательно, $N \cap T \leq N$. Если $N \cap T < N$, то получаем противоречие с минимальностью N. Таким образом, $N \cap T = N$. Тогда $N \leq T$ и $T = G$. Поскольку K является Q-вложенной в G подгруппой, то

$$K \cap T = K \leq K_{sG}.$$

Значит, K S-квазинормальна в G. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3.3.4. Теорема [143]. *Если $G = AB$, где подгруппа A субнормальна в G, B — абелева холлова подгруппа в G и любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы группы A является Q-вложенной в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Каждая собственная подгруппа M группы G, содержащая A, сверхразрешима.*

Пусть $A \leq M \leq G$, где $M \neq G$. Тогда

$$M = M \cap AB = A(M \cap B),$$

где $M \cap B$ нильпотентна и A субнормальна в M. Так как, по лемме 2.1.5(2), любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы из A Q-вложена в M и $|M| < |G|$, то, по выбору группы G, мы имеем (1).

(2) *Пусть H — неединичная нормальная подгруппа в G. Предположим, что H p-группа. Допустим, что H содержит силовскую p-подгруппу P из A, или P циклична, или $H \leq A$. Тогда G/H сверхразрешима* (см. доказательство утверждения (2) теоремы 3.3.1).

(3) *Одна из силовских подгрупп группы A не является циклической.*

Действительно, легко видеть, что любая силовская подгруппа из G содержится либо в некоторой подгруппе, сопряженной с A, либо в некоторой подгруппе, сопряженной с B, и поэтому если все силовские подгруппы из A являются циклическими группами, то каждая силовская подгруппа из G циклична, и поэтому группа G сверхразрешима, согласно [139, глава 6, теорема 10.3], что противоречит выбору группы G.

(4) *Группа G разрешима.*

Предположим, что $A \neq G$. Тогда, в силу (1), A сверхразрешима, и поэтому A содержится в некоторой нормальной разрешимой подгруппе R из G, согласно леммы 1.6.1(8). Но

$$G/R = RB/R \simeq B/B \cap E$$

сверхразрешима, поэтому G — разрешимая группа.

Теперь предположим, что $A = G$. Если существует такое простое число p и такая максимальная подгруппа M в некоторой силовской подгруппе G_p из G, что $M_{qG} \neq 1$, то $O_p(G) \neq 1$, что влечет разрешимость группы G, в силу (2). Значит, мы можем предположить, что для любой силовской подгруппы G_p из G и для любой ее максимальной подгруппы M имеет место $M_{qG} = 1$. Тогда M имеет квазинормальное дополнение T в G и порядок силовской p-подгруппы из T равен p. В силу леммы 2.1.5(2), условие теоремы верно для T, и поэтому T — сверхразрешимая группа в силу выбора группы G, но это вновь влечет разрешимость группы G.

(5) A — *сверхразрешимая группа.*

Пусть $A = G$ — разрешимая группа, в которой для любой ее нециклической силовской подгруппы G_p все ее максимальные подгруппы Q-вложены в G. Тогда поскольку класс всех сверхразрешимых группы является насыщенной формацией, ввиду леммы 1.6.15, в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N и

$$N = C_G(N) \nsubseteq \Phi(G).$$

Согласно [139, глава 3, лемма 3.3 (a)], это влечет $N \subseteq \Phi(G_p)$. Поскольку $N \nsubseteq \Phi(G)$, то $G = [N]E$ для некоторой максимальной подгруппы E из G. Значит, $M_{qG}E = EM_{qG}$. Поскольку $N \nsubseteq M$, то $M_{qG} \neq N$. Если $M_{qG} \neq 1$, то, ввиду максимальности подгруппы E, $M_{qG} = G$, что влечет

$$N = N \cap M_{qG}E = M_{qG}(N \cap E) = M_{qG},$$

противоречие. Следовательно, $M_{qG} = 1$, и поэтому подгруппа M имеет квазинормальное дополнение T в G.

Понятно, что порядок силовской p-подгруппы из T равен p. Следовательно, ввиду леммы 2.1.5(2), условие теоремы верно для T, и поэтому T — сверхразрешимая группа в силу выбора группы G. Пусть q — наибольший простой делитель порядка группы T и T_q — силовская q-подгруппа в T. Допустим, что $q \neq p$. Тогда T_q — силовская q-подгруппа в G, и поэтому $T_q \lhd G$, поскольку T субнормальная в G подгруппа. Но тогда

$$T_q \leq C_G(N) = N,$$

противоречие. Следовательно, $q = p$ — наибольший простой делитель порядка группы G. Ввиду 1.6.5,

$$O_p(G/C_G(N)) = O_p(G/N) = 1.$$

Следовательно, в силу (2), $N = G_p$, что, как и выше, приводит к противоречию.

(6) $A_G \neq 1$.

Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы A и A_p — силовская p-подгруппа в A. Согласно (5), группа A сверхразрешима, и поэтому $A_p \lhd A$. Поскольку по условию подгруппа A субнормальна в G, то $A_p \leq O_p(G)$, согласно лемме 1.6.1(6). Ввиду (2), $G/O_p(G)$ — сверхразрешимая группа, и поэтому $O_p(G)$ не является циклической группой в силу выбора группы G. Это означает, что $A_p \nsubseteq B^x$ для всех $x \in G$. Значит, A_p — силовская подгруппа в G, то есть $A_p = O_p(G)$.

(7) *Пусть N — такая минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в A. Тогда $N = A_p = G_p$ — силовская подгруппа в G, где p — наибольший простой делитель порядка группы A.*

Пусть N — такая минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в A, и p — наибольший простой делитель группы A.

Если p делит $|B|$, то $G_p \leq B$, где G_p — силовская p-подгруппа группы G, и поэтому по условию G_p — циклическая группа. Но поскольку $N \leq G_p$, то N — циклическая группа, и поэтому, ввиду (2), G сверхразрешима. Полученное противоречие с выбором группы G показывает, что p не делит $|B|$. Значит, ввиду (5),

$$O_p(G) = O_p(A) = A_p,$$

где A_p — силовская p-подгруппа группы A. Поскольку

$$O_p(A) \subseteq C_G(N) = N,$$

то $N = A_p$ — силовская подгруппа в G.

(8) *Группа G p-сверхразрешима* (это прямо следует из леммы 3.3.3).

Заключительное противоречие.

Согласно (2), G/N — сверхразрешимая группа, а, согласно (8), $|N| = p$. Следовательно, G — сверхразрешимая группа. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

4.3.5 Следствие (Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов [24]). *Если $G = AB$, где подгруппа A субнормальна в G, B — абелева холлова подгруппа в G и любая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы группы A слабо квазинормальна в G, то G сверхразрешима.*

SUMMARY

In this book a classification of the most important classes of finite groups by properties of their generaly quasinormal subgroups is resulted. All the groups considered are finite. Here the following results are considered:

1) new criterias of belonging of a group to a saturated formation are obtained;

2) the criterias for the p-nilpotancy and p-supersolubility of finite groups are proved depending on Q-embeddancy of maximal subgroups of their Sylow subgroups;

3) the criterion for supersolubility of finite groups in terms of 2-maximal subgroups are proved;

4) some new criterias for the metanilpotency and solubility of factorizable groups are received on basis of the condition of Q-embeddancy of maximal and Sylow subgroups of their factors.

The works of the authors [8–21, 116, 145–146] were used as the basis of this book. We consider only finite groups and use the definitions and the notations of [44, 139, 38, 101].

Chapter 1 of the book has a subsidiary nature. Here the most important steps in the learning of difference types of their generaly quasinormal subgroups are defined. Great attention is paid to the definitions and some known results using in the text of this book.

Ore consider [171] two generalizations of normality that still pique the unwaning interest of researchers. Note first of all that quasinormal subgroups were introduced in [171] into the practice of mathematicians for the first time. Following [171], we say that a subgroup H of a groups G is *quasinormal in* G if H commutes with every subgroup of G (i.o. $HT = TH$ for all subgroups T of G). It turned out that quasinormal subgroups possess a series of interesting properties [102, 144, 165, 171, 177, 189, 197] and that artually they are not much different from normal subgroups. Note, in particular, that according to [165] for each quasinormal subgroups H we have $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, and by [178, Theorem 2.1.3], quasinormal subgroups are precisely those subnormal subgroups of G that are modular elements in the lattice of all subgroups of G.

It is clear that if a subgroup H of G is normal in G, then G must have some subgroup T that satisfies the condition

$$G = HT \text{ and both subgroups } T \text{ and } T \cap H \text{ are normal in } G. \qquad (*)$$

Therefore, $(*)$ is another generalization of normality. This idea appeared firstly in [171] too, where it is shown in particular that *G is soluble if and only if all maximal subgroups of G satisfy* $(*)$ (in this regard, also see the article of Baer [66]). Later the subgroups satisfying $(*)$ were called *c-normal* in [203]. In this book a nice theory of c-normal subgroups was presented and some of its applications were given to the questions of classification of groups with some distinguished systems of subgroups.

Recall that a subgroup H of G is said to be s-permutable or s-quasinirmal [171] in G if $HP = PH$ for all Sylow subgroups P of G.

Surveying these results and many others resuls of such kind we have come to the following two questions:

Question A. *Whether there is such a condition for subgroups which simultaneously generalizes both conditions "to be an s-permutable subgroup" and "to be a c-normal subgroup"?*

Question B. *Whether there is such a condition for subgroups which simultaneously generalizes both conditions "to be a maximal subgroup of a Sylow subgroup" and "to be a subgroup with prime order or order 4"?*

It is appeared that both these questions have a positive decision. In order to give an answer to the first question we shall use the above Ore's idea. In the chapter 2 of this book we exemine the following concept which generalizes the conditions of quasinormality as well as c-normality for subgroups.

Definiton 2.1.1. Let H be a subgroup of G. Then we say that H is Q-embedded in G if G has a quasinormal subgroup T such that $HT = G$ and $T \cap H \leq H_{sG}$.

In this book H_{sG} denotes the s-core of H [186], that is the subgroup of H genarated by all those subgroups of H which are s-permutable in G. The s-core H_{sG} is an analogue of the normal core $H_G = Core_G(H)$ of H in G and clearly $H^G \leq H^{sG}$.

It is clear that every s-permutable subgroup and c-normal subgroup are Q-embedded.

Example 2.1.2. Let H be an s-permutable subgroup of a group G. Then $H_{sG} = H$ and we have $G = HG$ and $G \cap H = H \leq H_{sG}$.

Example 2.1.3. If H is a c-normal subgroup of G and T is a normal subgroup of G such that $G = TH$ and $T \cap H \leq H_G$, then $H_G \leq H_{sG}$ and so H is Q-embedded in G.

Hence a condition "to be Q-embedded subgroup" simultaneously generalizes both conditions "to be an s-permutable subgroup" and "to be a c-normal subgroup".

The following simple example shows that in general the set of Q-embedded subgroups is wider than the set of all s-permutable subgroups and the set of all c-normal subgroups.

Example 2.1.4. Let $m > 3$ and $P = M_m(2) = \langle x, y | x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,$ $x^y = x^{1+2^{m-2}} \rangle$. Let C_p be a group of prime order $p \neq 2$ and $G = C_p \wr P = [K]P$

where K is the base group of the regular wreath product G. Let $A = \langle x \rangle$ and $B = \langle y \rangle$. Finally, let $T = KB$. Then T is an s-permutable subgroup of G, $G = AT$ and $A \cap T = 1$. Hence A is Q-embedded in G. At the same time, clearly, A is neither c-normal nor s-permutable in G.

In fact, all classification results in which one of the conditions "to be a c-normal subgroup" or "to be an s-permutable subgroup" is involved may be non-trivially generalized on the base of the concept of Q-embedded subgroup.

The following two theorems serve a partial illustration to this and they also give the answer to Question B.

Theorem 2.3.1 [142]. *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing all supersoluble groups and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. Suppose that every non-cyclic Sylow subgroup P of E has a subgroup D such that $1 < |D| < |P|$ and all subgroups H of P with order $|H| = |D|$ and every cyclic subgroups of P with order 4 (if $|D| = 2$ and P is a non-abelian 2-group) not having a p-nilpotent supplement in G are Q-embedded G. Then $G \in \mathcal{F}$.*

Theorem 2.3.2 [142, 16]. *Let G be a group with a normal subgroup E such that G/E is p-nilpotent and p is the smallest prime divisor of $|G|$. Suppose that Sylow p-subgroup P of E has a subgroup D such that $1 < |D| < |P|$ and every subgroups H of P with order $|H| = |D|$ and every cyclic subgroups of P with order 4 (if $|D| = 2$ and P is a non-abelian 2-group) not having a p-nilpotent supplement in G are Q-embedded in G. Then G is p-nilpotent.*

The proofs of these two Theorems are completely different and in fact, Theorem 2.3.2 is one of the main steps in the proof ot Theorem 2.3.1.

Note also that main results of many papers can be received as special cases of Theorems 2.3.1 and 2.3.2. But here we state four typical corollaries of Theorem 2.3.1 only.

Corollary 2.4.9 (Y. Wang [203]). *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing $\mathcal{U}$ and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. If all maximal subgroups of E are c-normal in G, then $G \in \mathcal{F}$.*

Corollary 2.4.12 (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel [175]). *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing $\mathcal{U}$ and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. If all minimal subgroups and all cyclic subgroups with order 4 of E are c-normal in G, then $G \in \mathcal{F}$.*

Corollary 2.4.16 (M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan [64]). *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing $\mathcal{U}$ and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. If all maximal subgroups of the Sylow subgroups of E are S-quasinormal in G, then $G \in \mathcal{F}$.*

Corollary 2.4.17 (A. Shaalan [179]). *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing $\mathcal{U}$ and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. If all minimal subgroups of E and all cyclic subgroups with order 4 of E are S-quasinormal in G, then $G \in \mathcal{F}$.*

When we deal with Theorem 2.3.1 or Theorem 2.3.2 we find out at once very unpleasant fact that the hypothesis of the theorem is not carried out in subgroups and in factor groups. Therefore the proofs of these theorems have led to a necessity of finding of some special methods of reasonings.

One of the most important and interesting results of the theory of supersoluble groups is the following characterization of the supersoluble groups which was obtained by B. Huppert in [140]: *A group G is supersoluble if and only if every maximal subgroup of G has prime index.*

Many others characterizations of the supersoluble groups and all known criteria of supersolubility were obtained on the base of this classical result. In particular, using this result B. Huppert proved that a group G is supersoluble if either every 2-maximal subgroup of G (that is a maximal subgroup of some maximal subgroup of G) is normal in G [140] or if G is soluble and every maximal subgroup of any Sylow subgroup of G permutes with the members of some Sylow system of G [141]. These two results stimulated occurrence of a large number of researches connected with a finding criteria of belonging a group to a given class of groups and, in particular, criteria of supersolubility on the basis of conditions imposed on the 2-maximal subgroups or on the maximal subgroups of Sylow subgroups. In connection with such results it seems natural to ask

Question C. *Whether the supersoluble groups can be described by properties of their 2-maximal subgroups?*

It is appeared that question has the positive decision too. We say that a subgroup H of a group G has non-primary index $|G : H|$ if there are at least two different primes dividing $|G : H|$.

The next Example shows also that there are supersoluble groups in which some of their 2-maximal subgroups with non-primary index is not Q-embedded. Note also that there are non-supersoluble groups in which every 2-maximal subgroup is Q-embedded.

Example. Let $A = C_7 \times C_{11}$ and $G = [V]A$ where V is a simple A-module over $\mathbb{F}_3$ with $C_A(V) = 1$. Then G is not supersoluble and every 2-maximal subgroup of G is c-normal in G.

Therefore to receive a decision of Question C we have to add some additional condition on 2-maximal subgroups and to weaken a condition "to be Q-embedded subgroup". Both these ideas are realized in the following theorem which gives a positive answer to Question C.

Theorem 2.7.2 [21, 113]. *Let G be a group. Then the following statements hold:*

1) a group G is supersoluble;

2) every 2-maximal subgroup E of G, with non-primary index $|G : E|$, has a cyclic supplement in E^G and is such normal subgroup T that $ET = E^G$ and $T \cap E \leq E^G$;

3) every 2-maximal subgroup E of G, with non-primary index $|G : E|$, has a cyclic supplement in E^G and weakly Q-embedded in G.

New criterion for supersolubility of finite groups in terms of 2-maximal subgroups are received on basis of the condition of weakly Q-embeddancy of maximal subgroups of their groups.

Definiton 2.7.1. Let H be a subgroup of G. Then we say that H is Q-embedded in G if G has a quasinormal subgroup T such that $HT = G$ and $T \cap H \leq H_{sG}$.

The direct corollary of theorem 2.7.1 is the following results.

Corollary 2.7.5 (B. Huppert [140]). *A group G is supersoluble if every 2-maximal subgroup of G is s-permutable in G.*

Corollary 2.7.6 (R.K. Agrawal [47]). *A group G is supersoluble if every 2-maximal subgroup of G is s-permutable in G.*

In the chapter 3 of this book we use the Q-embedded groups to obtain new characterizations for some class of finite soluble, supersoluble, metanilpotent and dispersive (in sence Ore [171]) groups.

Theorem 3.1.1 [143]. *G is metanilpotent if and only if $G = AB$, where A is a subnormal subgroup in G, B is a Hall abelian subgroup in G and every Sylow subgroup of A is Q-embedded in G.*

Theorem 3.2.1 [143]. *G is soluble if and only if $G = AB$, where A, B are subgroups of G sutisfying every maximal subgroup of A and every maximal subgroup of B are Q-embedded in G.*

Theorem 3.3.1 [143]. *Suppose that $G = AB$ and A is a quasinormal subgroup in G, B is a dispersive. If every maximal subgroup of any non-cyclic Sylow subgroup of A is Q-embedded in G, then G is dispersive.*

Theorem 3.3.4 [143]. *If $G = AB$, where A is a subnormal subgroup in G and B is a Hall subgroup in G, which all Sylow subgroups are cyclic groups and any maximal subgroup of every non-cyclic Sylow subgroup of A is Q-embedded in G, then G is supersoluble.*

All basic results have a theoretical character and may be used in the investigations in theories of finite groups and their classes, and also at reading special courses in universities.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Математические заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

2. Боровиков, М.Т. Группы с перестановочными подгруппами взаимно простых порядков / М.Т. Боровиков // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1990. – Вып. 5. – С. 80–82.

3. Боровиков, М.Т. О p-разрешимости конечной группы / М.Т. Боровиков // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 3–7.

4. Го, В. О конечных ненильпотентных группах, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны или любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2008. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).

5. Го, В. Конечные группы с заданными s-вложенными и n-вложенными подгруппами / В. Го, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 23–26.

6. Го, В. X-перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742–759.

7. Го, В. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. мат. журнал. – 2004. – Т. 45, № 3. – С. 75–92.

8. Гуцко, Н.В. Критерии p-нильпотентности конечных групп / Н.В. Гуцко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы X респ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 12-14 марта 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 229–230.

9. Гуцко, Н.В. Новые критерии метанильпотентности конечных групп / Н.В. Гуцко // X(55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета: сб. ст. УО «ВГУ им. П.М. Машерова»/ Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: А.В. Гладков (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2008. – С. 14–15.

10. Гуцко, Н.В. О p-вложенных подгруппах конечных групп / Н.В. Гуцко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XI респ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель,

17-19 марта 2008 г.: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2008. – Ч. 2. – С. 10–11.

11. Гуцко, Н.В. Признаки принадлежности группы насыщенной формации / Н.В. Гуцко. – Гомель, 2008. – 21 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 13).

12. Гуцко, Н.В. C-квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 37–43.

13. Гуцко, Н.В. C-квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // II Машеровские чтения: материалы регион. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 апр. 2007 г. / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: П.М. Михасев [и др.]. – Витебск, 2007. – С. 130.

14. Гуцко, Н.В. Слабо квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // Классы групп, алгебр и их приложения: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9-11 июля 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики Нац. Акад. наук Беларуси, Луганский гос. пед. ун-т им. Т.Г. Шевченко; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 65–66.

15. Гуцко, Н.В. Критерий p-нильпотентности одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, В.О. Лукьяненко // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. алгебр. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г.: в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т, Ин-т математики Нац. Акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский, А.А. Лепин [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 21.

16. Гуцко, Н.В. Критерий p-нильпотентности для одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, В.О. Лукьяненко, А.Н. Скиба // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5(50). – Ч. 1. – С. 186–191.

17. Гуцко, Н.В. Конечные группы с заданными c-квазинормальными подгруппами / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 23–31.

18. Гуцко, Н.В. Критерии p-нильпотентности конечных групп с хорошо p-вложенными подгруппами / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2008. – 22 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 12).

19. Гуцко, Н.В. О p-сверхразрешимости конечных групп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора

А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова: редкол.: В.А. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 80–81.

20. Гуцко, Н.В. О p-сверхразрешимости одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 16–21.

21. Гуцко, Н.В. Характеризации конечных разрешимых и сверхразрешимых групп по свойствам их p-вложенных подгрупп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 63–69.

22. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

23. Легчекова, Е.В. Конечные группы с перестановочными два- и три-максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 27–29.

24. Легчекова, Е.В. Конечные группы с заданными системами слабо квазинормальных подгрупп / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 1. – С. 27–33.

25. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Матемематические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

26. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 50–53.

27. Пальчик, Э.М. О b-квазинормальных подгруппах / Э.М. Пальчик // Докл. акад. наук БССР. – 1967. – Т. 11, № 11. – С. 967–969.

28. Пальчик, Э.М. О группах, все i-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // Извес. акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1968. – № 1. – С. 45–48.

29. Пальчик, Э.М. О группах, все i-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. II / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // Извес. акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 3. – С. 51–57.

30. Пальчик, Э.М. О конечных группах с перестановочными подгруппами / Э.М. Пальчик // Докл. акад. наук БССР. – 1967. – Т. 11, № 5. – С. 391–392.

31. Подгорная, В.В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.

32. Подгорная, В.В. Сверхразрешимость конечной группы с полунормальными вторыми максимальными подгруппами / В.В. Подгорная // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 154–156.

33. Подгорная, В.В. Факторизации конечных групп дисперсивными и сверхразрешимыми подгруппами / В.В. Подгорная // Вес. Віцебскага дзярж. ун-та. – 1999. – № 4(14). – С. 80–82.

34. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.

35. Самусенко (Подгорная), В.В. О конечных группах с заданными минимальными добавлениями к подгруппам / В.В. Самусенко (Подгорная) // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гом. ун-та, 1998. – Вып. 13. – С. 177–182.

36. Самусенко (Подгорная), В.В. О сверхразрешимости конечных групп с циклическими добавлениями к подгруппам / В.В. Самусенко (Подгорная) // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гом. ун-та, 1999. – Вып. 14. – С. 141–146.

37. Семенчук, В.Н. Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гом. ун-та, 1985. – Вып. 1. – С. 86–96.

38. Скиба, А.Н. H-перестановочные подгруппы / А.Н. Скиба // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37–39.

39. Скиба, А.Н. Конечные группы со слабо квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов. – Гомель, 2006. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 9).

40. Скиба, А.Н. Конечные группы с C-квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 674–688.

41. Титов, О.В. Конечные группы с заданными системами слабо нормальных подгрупп / О.В. Титов // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Серия С, фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 23–29.

42. Чунихин, С.А. Об условиях теорем типа Силова / С.А. Чунихин // Докл. акад. наук СССР. – 1949. – Т. 69, № 6. – С. 735–737.

43. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.

44. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
45. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Математический сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
46. Шнычарков, А.В. Конечные группы с максимальными m-полунормальными подгруппами / А.В. Шныпарков // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Серия С, фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 27–29.
47. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
48. Agrawal, R.K. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. – 1974. – Vol. 17. – P. 159–165.
49. Al-Dababseh, A.F. Finite groups with X-permutable maximal subgroups / A.F. Al-Dababseh, J.J. Jaraden // SABM. – 2007. – Vol. 31(6). – P. 1097–1106.
50. Alejandre, M.J. Permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // J. Algebra. – 2004. – Vol. 276. – P. 453–461.
51. Alejandre, M.J. Finite soluble groups with permutable supnormal subgroups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera // J. Algebra. – 2001. – Vol. 240, № 2. – P. 705–722.
52. Al-Sharo, Kh.A. A characteristics property of finite p-nilpotent groups / Kh.A. Al-Sharo // Comm. Algebra. – 2004. – Vol. 32, № 7. – P. 2655–2657.
53. Al-Sharo, Kh.A. Factorizable groups and formations / Kh.A. Al-Sharo, E.A. Molokova, L.A. Shemetkov // Acta applicandae math. – 2005. – Vol. 85. – P. 3–10.
54. Al-Sharo, Kh.A. On subgroups of prime order in a finite group / Kh.A. Al-Sharo, L.A. Shemetkov // Ukr. Math. – 2002. – Vol. 54, № 6. – P. 915–923.
55. Al-Sharo, Kh.A. An application of the concept of a generalized central element / Kh.A. Al-Sharo, O. Shemetkova // Algebra and discrete math. – 2007. – № 4. – P. 1–10.
56. Al-Sheikahmad, A. Finite groups with given c-permutable subgroups / A. Al-Sheikahmad // Algebra and discrete math. – 2004. – № 3. – P. 74–81.
57. Arad,Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M.B. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234–246.
58. Asaad, M. On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite

groups / M. Asaad // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26. – P. 3647–3652.

59. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1998. – Vol. 51. – P. 289–293.

60. Asaad, M. Characterization of finite groups with some s-quasinormal subgroups / M. Asaad, P. Csorgo // Monatsh. Math. – 2005. – Vol. 146. – P. 263–266.

61. Asaad, M. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups / M. Asaad, P. Csorgo // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 401–404.

62. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80. – P. 113–118.

63. Asaad, M. On c-normality of finite groups / M. Asaad, M.E. Mohamed // J. Aust. Math. Soc. – 2005. – Vol. 78. – P. 297–304.

64. Asaad, M. Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups of a finite group / M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan // Arch. Math. – 1991. – Vol. 56. – P. 521–527.

65. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

66. Baer, R. Classes of finite groups and their propeties / R. Baer // Illinois Math. Journal. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

67. Ballester-Bolinches, A. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J. Beidleman, H. Heineken // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, № 1–2. – P. 63–69.

68. Ballester-Bolinches, A. Totally permutable products of finite groups satisfying SC and PST / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // Monatch. Math. – 2005. – Vol. 145, № 2. – P. 89–94.

69. Ballester-Bolinches, A. On totally permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, R. Esteban-Romero // J. Algebra. – 2005. – Vol. 293, № 1. – P. 269–278.

70. Ballester-Bolinches, A. On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294, № 1. – P. 127–135.

71. Ballester-Bolinche, A. On products of finite supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 7. – P. 3145–3152.

72. Ballester-Bolinches, A. On products of supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

73. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch.Math. – 1999. – Vol. 72, № 3. – P. 161–166.

74. Ballester-Bolinches, A. A note on m-permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Group Theory. – 2000. – Vol. 3, № 4. – P. 381–384.

75. Ballester-Bolinches, A. Finite groups which are products of pairwise totally permutable subgroups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1998. – Vol. 41, № 3. – P. 567–572.

76. Ballester-Bolinches, A. Mutually permutable products of finite groups. II / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera // J. Algebra. – 1999. – Vol. 218, № 2. – P. 563–572.

77. Ballester-Bolinches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. Hungar. – 1996. – Vol. 73. – P. 335–342.

78. Ballester-Bolinches, A. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure and Applied Alg. – 1998. – Vol. 127. – P. 113–118.

79. Ballester-Bolinches, A. Mutually permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1999. – Vol. 213, № 1. – P. 369–377.

80. Ballester-Bolinches, A. On finite products of totally permutable groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera, M.D. Perez-Ramos // Bull. Austral. Math. Soc. – 1996. – Vol. 53, № 3. – P. 441–445.

81. Ballester-Bolinches, A. Permutability in finite soluble groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1993. – Vol. 115. – P. 393–396.

82. Ballester-Bolinches, A. Finite groups with some c-normal minimal subgroups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang // J. Pure and Applied Alg. – 2000. – Vol. 153, № 2. – P. 121–127.

83. Beidleman, J.C. Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heineken // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 18–30.

84. Beidleman, J.C. On the Fitting core of a formation / J.C. Beidleman, H. Heineken // Bull. Austral. Math. Soc. – 2003. – Vol. 68. – P. 107–112.

85. Beidleman, J.C. Totally permutable torsion subgroups / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.

86. Beidleman, J.C. Centre and norm / J.C. Beidleman, H. Heineken, M. Newell // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. – Vol. 69. – P. 457–464.

87. Berger, T.E. A universal example of a core-free permutable

subgroup / T.E. Berger, F. Gross // Rocky Mountain J. Math. – 1982. – Vol. 12. – P. 345–365.

88. Between nilpotent and solvable / edited M. Weinstein. – Braun-Brumfield: Polygonal Publishing House, 1982. – 231 p.

89. Blackburn, N. Finite Groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

90. Bradway, R.H. The nilpotence class of core-free permutable subgroups / R.H. Bradway, F. Gross, W.R. Scott // Rocky Mountain J. Math. – 1971. – Vol. 1. – P. 375–382.

91. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 15. – P. 15–17.

92. Busetto, G. Proprirta di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi / G. Busetto // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1980. – Vol. 63. – P. 269–284.

93. Carocca, A. A note on the product of $\mathcal{F}$-subgroups in finite group / A. Carocca // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1996. – Vol. 39. – P. 37–42.

94. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.

95. Cossey, J. Cyclic permutable subgroups of finite groups / J. Cossey, S.E. Stonehewer // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 71. – P. 169–176.

96. Cossey, J. The embedding of a cyclic permutable subgroup in a finite group / J. Cossey, S.E. Stonehewer // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47. – P. 89–111.

97. Cossey, J. The embedding of a cyclic permutable subgroup in a finite group. II / J. Cossey, S.E. Stonehewer // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2004. – Vol. 47. – P. 101–109.

98. Cossey, J. Minimal quasinormal subgroups of groups / J. Cossey, S.E. Stonehewer, G. Zacher // Ischia Group Theory 2006: proceedings of a conference in honor of Akbar Rhemtulla, Italy 29 March – 1 April 2006 / editer by Trevor Hawkes, Patrizia Longobardi, and Mercede Maj. – P. 13–21

99. Derr, J.B. The influence of minimal p-subgroups on the structure of finite groups / J.B. Derr, W.E. Deskins, N.P. Mukherjee // Arch. Math. – 1985. – Vol. 45. – P. 1–4.

100. Deskins, W.E. A note on the index complex of maximal subgroup / W.E. Deskins // Arch. Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 236–240.

101. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. – 1959. – № 1. – P. 100–104.

102. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

103. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
104. Dornhoff, L. M-groups and 2-groups / L. Dornhoff // Math. Z. – 1967. – Vol. 100. – P. 226–256.
105. Ezquerro, L.M. A contribution to the theory of finite supersoluble groups / L.M. Ezquerro // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1993. – Vol. 89. – P. 161–170.
106. Ezquerro, L.M. On Mutually M-Permutable Products of Finite Groups / L.M. Ezquerro, X. Soler-Escriv // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 4. – P. 1949–1960.
107. Foguel, T. On seminormal subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1994. – Vol. 165. – P. 633–635.
108. Friesen D. Products of normal supersoluble subgroups / D. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.
109. Gagen, T.M. Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups / T.M. Gagen, Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1966. – Vol. 6, № 4. – P. 466–469.
110. Gaschutz, W. Prefrattini Gruppen / W. Gaschutz // Arch. Math. – 1962. – Vol. 13. – P. 418–426.
111. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York–Evanston–London: Harper and Row, 1968. – 527 p.
112. Gross, F Conjugacy of odd Hall subgroups / F. Gross // Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19. – P. 311–319.
113. Guo, W. Characterization of finite supersoluble groups by properties of their 2-maximal subgroups / W. Guo, N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; редкол.: А.В. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 304–306.
114. Guo, W. On finite groups in which every 2-maximal subgroups permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 17 с. – (Препринт/ Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).
115. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. — 17 с. – (Препринт/ Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 11).
116. Guo, W. Finite groups with some primary subgroups $\mathcal{F}$-s-supplemented / W. Guo, L. Miao // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33(5). – P. 2789–2800.

117. Guo, W. X-s-permutable subgroups / W. Guo, L. Shi, X. Yi // J. Math. Research and Exposition. – 2008. – Vol. 28, № 2. – P. 257–265.
118. Guo, W. Conditionally permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba. – Гомель, 2002. — 18 с. – (Препринт/ Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).
119. Guo, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Southeast Asian Bull Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
120. Guo, W. Criterions of existence of Hall subgroups in non-soluble finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.
121. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.
122. Guo, W. G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Israel J. Math. – 2003. – Vol. 138. – P. 125–138.
123. Guo, W. Finite groups with some given system of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283, Issue 11. – P. 1603–1612.
124. Guo, W. On primitive subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Indian J. Pure appl. Math. – Vol. 37(6). – P. 369–376.
125. Guo, W. Shur-Zassenhaus theorem for X-permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // 5th International Algebraic Conference in Ukraine: тез. докл., Одесса, 20–27 июля, 2005 / Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова; редкол.: В.В. Кириченко [и др.]. – Odessa, 2005. – P. 81.
126. Guo, W. Schur-Zassenhaus theorem for X-permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Algebra Colloqiuim. – 2008. – Vol. 15, Issue 2. – P. 185–192.
127. Guo, W. X-permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Ukrain. Math. J. – 2006. – Vol. 58, № 10. – P. 1471–1480.
128. Guo, W. X-permutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian math. J. – 2007. – № 48(4). – P. 742–759.
129. Guo, W. X-quasinormal subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2007. – № 48(4). – P. 593–605.
130. Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
131. Guo, X. The influence of ity of subgroups on the structure of

finite groups II / X. Guo, D.Y. Li // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26. – P. 1913 –1922.

132. Guo, X. On semi-cover-avoiding subgroups of finite groups / X. Guo, P. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 209. – P. 151–158.

133. Guo, X. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – Vol. 181, № 2–3. – P. 297–308.

134. Guo, X. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80, № 6. – P. 561–569.

135. Guo, X. On semi-cover-avoiding maximal subgroups and solvability of finite groups / X. Guo, K.P. Shum, J. Wang // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 3235–3244.

136. Feldman, A. System-permutable Fischer subgroups are injecters / A. Feldman // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2001. – Vol. 101A(1). – P. 71–74.

137. Hall, P. On the Sylow systems of a soluble groups / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1937. – № 43(2). – P. 507–528.

138. Hauck, P. Fitting classes and products of totally permutable groups / P. Hauck, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 2002. – Vol. 252. – P. 114–126.

139. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967. – 793 p.

140. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

141. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.

142. Hutsko, N.V. Finite groups with given nearly S-quasinormal subgroups / N.V. Hutsko, V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Asian-European journal of math. – 2008. – Vol. 1, № 3. – P. 369–382.

143. Hutsko, N.V. On well p-embedded subgroups of finite groups / N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2008. – № 2. – P. 50–64.

144. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168–170.

145. Janko Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

146. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.

147. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson //

Canadian J. Math. – 1971. – Vol. 23. – P. 562–564.

148. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.

149. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

150. Legchekova, H.V. Finite groups with X-permutable 2-maximal and 3-maximal subgroups / H.V. Legchekova // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 25–29.

151. Legchekova, H.V. Finite groups with permutable 2-maximal and 3-maximal subgroups / H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Vol. 50, № 3. – P. 27–29.

152. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50(1). – P. 827–841.

153. Li, B. Weakly s-permutable subgroups of finite groups / B. Li, M. Zha // J. Yangzhou university natural science edition. – 2005. – Vol. 8, № 3. – P. 14 – 17.

154. Li, Sh. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Sh. Li // Math. Proc. R. Ir. Acad. – 2000. – Vol. 100A. – P. 65–71.

155. Li, Y. A characteristic condition of finite nilpotent group / Y. Li // J. Zhejiang Univ. Sci. – 2004. – № 5(7). – P. 749–753.

156. Li, Y. On π-quasinormally embedded subgroups of finite groups. II / Y. Li, Y. Wang // J. Algebra. – 2004. – Vol. 281. – P. 109–123.

157. Li, Y. Finite groups in which S-semipermutability is a transitive relation / Y. Li, L. Wang, Y. Wang // J. Algebra. – 2008. – Vol. 2, № 3. – P. 143–152.

158. Li, Y. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. II / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807–4811.

159. Li, Y. The influence of π-quasinormality of some subgroups of a finite group / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Arch. Math. – 2003. – Vol. 81, № 3. – P. 245–252.

160. Liu, X. Some criteria for supersolubility in products of finite groups / X. Liu, B. Li, X. Yi // Frontiers of Mathematics in China. – 2008. – Vol. 3, № 1. – P. 79–86

161. Maier, R. A completeness property of certain formations / R. Maier // Bull. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 24. – P. 540 – 544.

162. Maier, R. Endliche metanilpotente Gruppen / R. Maier // Arch. Math. – 1972. – Vol. 23. – P. 139–144.

163. Maier, R. Normality conditions for quasinormal subgroups of

finite groups / R. Maier // Math. Z. – 1971. – Vol. 123. – P. 310–314.

164. Maier, R. Zur Vertauschbarkeit und Subnormalitat von Untergruppen / R. Maier // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 2. – P. 110–120.

165. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Z. Math. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.

166. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

167. Mutually permutable products of two nilpotent groups / A. Ballester-Bolinches, [etc.] // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2006. – Vol. 115. – P. 273–279.

168. Nakamura, K. Charakteristische Untergruppen von quasinormalteiler / K. Nakamura // Arch. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 513–515.

169. Nakamura, K. Uber einige Beispiele der quasinormalteiler einer p-gruppe / K. Nakamura // Nagoya Math. J. – 1968. – Vol. 31. – P. 97–103.

170. On some permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre, [etc.] // Rev. Math. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

171. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

172. Petrillo, J. CAP-subgroups in a direct product of finite groups / J. Petrillo // J. Algebra – 2006. – Vol. 306, № 2. – P. 432–438.

173. Praeger, C.E. Seminormal and subnormal subgroups lattices for transitive permutation groups / C.E. Praeger // J. Aust. Math. Soc. – 2006. – Vol. 80. – P. 45–63.

174. Ramadan, M. The influence of s-quasinormality of some subgroups of prime power order on the structure of finite groups / M. Ramadan // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. Math. – 2001. – Vol. 44. – P. 3–9.

175. Ramadan, M. On c-normality of certain subgroups of prime power oder of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel// Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.

176. Robinson, D.J.S. A courser in the theory of group / D.J.S. Robinson. – New York and oth.: Springer-Verlag, 1982. – 484 p.

177. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.

178. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups. Vol. 14: De Gruyter Expositions in Mathematics / R. Schmidt. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994. – 475 p.

179. Shaalan, A. The influence of S-permutability of some subgroups / A. Shaalan // Acta. Math. Hungar. – 1990. – Vol. 56. – P. 87–93.

180. Shemetkov, L.A. A new concept of a generalized central element / L.A. Shemetkov // Классы групп и алгебр: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 окт. 2005 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 22–23.

181. Shemetkov, L.A. On the Ф-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 21 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 28).

182. Shemetkova, O. Finite groups with a system of generalized central elements / O. Shemetkova // Algebra and discrete math. – 2004. – № 4. – P. 59–71.

183. Skiba, A.N. A note on c-normal subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2005. – Vol. 3. – P. 85–95.

184. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(36). – С. 12–32.

185. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37–39.

186. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

187. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.

188. Stonehewer, S.E. Old, Rrecent and New Results on quasinormal subgroups / S.E. Stonehewer // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2005. – Vol. 56. – P. 125–133.

189. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1–16.

190. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups of some finite permutation groups / S.E. Stonehewer // J. Austral. Math. Soc. – 1973. – Vol. 16. – P. 90–97.

191. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups of some finite p-groups / S.E. Stonehewer // Proc. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 28, № 3. – P. 222–236.

192. Stonehewer, S.E. Abelian quasinormal subgroups of groups / S.E. Stonehewer, G. Zacher // Rend. Math. Acc. Lincei. – 2004. – Vol. 15. – P. 69–79.

193. Stonehewer, S.E. Cyclic quasinormal subgroups of arbitrary groups / S.E. Stonehewer, G. Zacher // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2006. – Vol. 115. – P. 165–187.

194. Su, X. Semi-normal subgroups of a finite group / X. Su // Math. Mag. – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.

195. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.

196. The structure of mutually permutable products of finite nilpotent groups / A. Ballester-Bolinches, [etc.] J. Beidleman, J. Cossey, H. Heineken // International journal of algebra and computation. – 2007. – Vol. 17, № 5–6. – P. 895–904.

197. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups / J.G. Thompson // Math. Z. – 1967. – Vol. 96, № 2. – P. 226–227.

198. Thompson, D.J. Normal p-complements for finite groups / D.J. Thompson // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1. – P. 43–46.

199. Wall, G. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G. Wall // Israel J. Math. – 1982. – Vol. 43. – P. 166–168.

200. Wang, K. Finite groups whose maximal subgroups are s-seminormal / K. Wang // J. Sichuan normal university natural science ebition. – 2005. – Vol. 28, № 3. – P. 253–255.

201. Wang, K. On s-seminormal subgroups of finite groups II / K. Wang // J. Sichuan normal university natural science ebition. – 2005. – Vol. 28, № 1. – P. 1–4.

202. Wang, P. Some sufficient conditions of a nilpotent group / P. Wang // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 2. – P. 289–295.

203. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.

204. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 467–478.

205. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193–2200.

206. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982. – 382 p.

207. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / / H. Wielandt. – Ohio, 1971. – 35 p.

208. Zhang, Q. Finite nonabelian simple groups which contain a nontrivial semipermutable subgroup / Q. Zhang, L. Wang // Algebra Colloquium. – 2005. – Vol. 12, № 2. – P. 301–307.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

2. Беркович, Я.Г. Подгрупповая характеризация некоторых конечных групп / Я.Г. Беркович // Докл. акад. наук БССР. – 1996. – Т. 169, № 3. – С. 499–502.

3. Беркович, Я.Г. Строение группы и строение ее подгрупп / Я.Г. Беркович // Докл. акад. наук СССР. – 1968. – Т. 179, № 1. – С. 13–16.

4. Беркович, Я.Г. Конечные неразрешимые группы с абелевыми третьими максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Известия высших учебных заведений. – 1968. – № 7(74). – С. 10–15.

5. Беркович, Я.Г. Конечные группы, у которых все *n*-е максимальные подгруппы являются обобщенными группами Шмидта / Я.Г. Беркович // Мат. заметки. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 129–136.

6. Беркович, Я.Г. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я.Г. Беркович // Докл. акад. наук СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1255–1257.

7. Беркович, Я.Г. Конечные группы, у которых все *n*-максимальные подгруппы являются обобщенными группами Фробениуса / Я.Г. Беркович, Б.М. Погребинский // Мат. анализ и его приложения. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1971. – Т. 3. – С. 70–80.

8. Боровиков, М.Т. Группы с перестановочными подгруппами взаимно простых порядков / М.Т. Боровиков // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1990. – Вып. 5. – С. 80–82.

9. Боровиков, М.Т. О *p*-разрешимости конечной группы / М.Т. Боровиков // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 3–7.

10. Ведерников, В.А. О конечных группах с обобщенной подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме научных сообщений. – Гомель: Изд-во Гомельского гос. пед. ун-та, 1968. – С. 44.

11. Ведерников, В.А. О конечных группах с перестановочными подгруппами / В.А. Ведерников // Докл. акад. наук БССР. – 1967. – Т. 2, № 12. – С. 1057–1059.

12. Го, В. Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Мат. заметки. – 2009. – Т. 86, № 3. – С. 350–359.

13. Го, В. О конечных ненильпотентных группах, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны или любые две

3-максимальные подгруппы перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2008. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).

14. Го, В. Строение конечных ненильпотентных групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 3. – С. 25–28.

15. Го, В. Конечные группы с заданными *s*-вложенными и *n*-вложенными подгруппами / В. Го, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 23–26.

16. Го, В. *X*-перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742–759.

17. Го, В. *G*-накрывающие системы подгрупп для классов *p*-сверхразрешимых и *p*-нильпотентных конечных групп / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сиб. мат. журнал. – 2004. – Т. 45, № 3. – С. 75–92.

18. Гуцко, Н.В. Критерии *p*-нильпотентности конечных групп / Н.В. Гуцко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы X респ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 12–14 марта 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 229–230.

19. Гуцко, Н.В. Новые критерии метанильпотентности конечных групп / Н.В. Гуцко // X(55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета: сб. ст. УО «ВГУ им. П.М. Машерова» / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: А.В. Гладков (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2008. – С. 14–15.

20. Гуцко, Н.В. О *p*-вложенных подгруппах конечных групп / Н.В. Гуцко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XI респ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 17–19 марта 2008 г.: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2008. – Ч. 2. – С. 10–11.

21. Гуцко, Н.В. Признаки принадлежности группы насыщенной формации / Н.В. Гуцко. – Гомель, 2008. – 21 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 13).

22. Гуцко, Н.В. *C*-квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 37–43.

23. Гуцко, Н.В. *C*-квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // II Машеровские чтения: материалы регион. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск,

24–25 апр. 2007 г. / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: П.М. Михасев [и др.]. – Витебск, 2007. – С. 130.

24. Гуцко, Н.В. Слабо квазинормальные подгруппы конечных групп / Н.В. Гуцко // Классы групп, алгебр и их приложения: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июля 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики Нац. Акад. наук Беларуси, Луганский гос. пед. ун-т им. Т.Г. Шевченко; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 65–66.

25. Гуцко, Н.В. Критерий p-нильпотентности одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, В.О. Лукьяненко // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. алгебр. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г.: в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т, Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 21.

26. Гуцко, Н.В. Критерий p-нильпотентности для одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, В.О. Лукьяненко, А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5(50). – Ч. 1. – С. 186–191.

27. Гуцко, Н.В. Конечные группы с заданными c-квазинормальными подгруппами / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 23–31.

28. Гуцко, Н.В. Критерии p-нильпотентности конечных групп с хорошо p-вложенными подгруппами / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2008. – 22 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 12).

29. Гуцко, Н.В. О p-сверхразрешимости конечных групп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова: редкол.: В.А. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 80–81.

30. Гуцко, Н.В. О p-сверхразрешимости одного класса конечных групп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Труды Инст. матем. Нац. акад. наук Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 16–21.

31. Гуцко, Н.В. Характеризации конечных разрешимых и сверхразрешимых групп по свойствам их p-вложенных подгрупп / Н.В. Гуцко, А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 63–69.

32. Драганюк, С.В. К вопросу о строении конечных примарных групп, все 2-максимальные подгруппы которых абелевы / С.В. Драганюк // Комплекс. анал., алгебра и топол. – 1990. – С. 42–51.

33. Драганюк, С.В. Конечные p-группы с неабелевой подгруппой Фраттини, все 3-максимальные подгруппы которых абелевы (p>3) /

С.В. Драганюк // Киев. гос. пед. ун-т. – Киев, 1989. – 21 с. – Библиогр.: 11 назв. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 13.01.89, № 2562-Ук89.

34. Дука, Н.Г. Конечные группы, максимальные цепи подгрупп которых содержат p-субнормальные подгруппы / Н.Г. Дука // Извес. вузов. Матем. – 1979. – № 9. – С. 3–10.

35. Ильиных, А.П. Конечные группы, не порождающиеся недостижимыми 3-максимальными подгруппами / А.П. Ильиных // Сиб. мат. журнал. – 1971. – Т. 12, № 4. – С. 912.

36. Ильиных, А.П. Конечные группы с достижимыми 6-максимальными подгруппами / А.П. Ильиных // Мат. записки. Уральск. ун-т. – 1973. – Т. 8, № 3. – С. 43–48.

37. Ильиных, А.П. Конечные неразрешимые группы, не порождающиеся недостижимыми 4-максимальными подгруппами / А.П. Ильиных // Мат. записки. Уральск. ун-т. – 1971. – Т. 8, № 1. – С. 50–58.

38. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

39. Левищенко, С.С. Конечные группы с условием дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный // Киев. гос. пед. ин-т. – Киев, 1986. – 15 с. – Библиогр.: 14 назв. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.02.86, № 629-Ук.

40. Левищенко, С.С. Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1986. – С. 63–73.

41. Левищенко, С.С. Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические / С.С. Левищенко, Н.Н. Семко // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1988. – С. 42–51.

42. Легчекова, Е.В. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 27–29.

43. Легчекова, Е.В. Конечные группы с заданными системами слабо квазинормальных подгрупп / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, О.В. Титов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 1. – С. 27–33.

44. Лукьяненко, В.О. X_m-полуперестановочные подгруппы конечных групп / В.О. Лукьяненко, А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2007. – № 6. – С. 180–187.

45. Луценко, Ю.В. Группы Шмидта с перестановочными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко //

Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 14–17.

46. Луценко Ю.В. Группы с обобщенно перестановочными *n*-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // Дискретная математика, алгебра и их приложения: тез. докл. междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию доктора физ.-мат. наук, профессора Р.И. Тышкевич, Минск, 19–22 окт. 2009 г. / Белорусский гос. ун-т, Ин-т математики Нац. акад. наук Беларуси. – Минск, 2009. – С. 26.

47. Луценко, Ю.В. Группы с перестановочными 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г.: в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 39–40.

48. Луценко, Ю.В. К вопросу о конечных ненильпотентных группах с обобщенно перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // Юбилейная научно-практическая конференция: материалы науч.-практ. конф., посвящ. 40-летию Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, Гомель, 11 июня 2009 г.: в 4 ч. / Гомельский гос. ун-та им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2009. – Ч. 4. – С. 146–147.

49. Луценко, Ю.В. Конечные группы с заданными системами *i*-максимальных подгрупп / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2009. – 28 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 6).

50. Луценко, Ю.В. О бипримарных группах с *S*-квазинормальными 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // III Машеровские чтения: материалы регион. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 марта 2009 г. / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: А.Л. Гладков [и др.]. – Витебск, 2009. – С. 14–15.

51. Луценко, Ю.В. О двух классах ненильпотентных групп с *X*-перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2009. – № 9. – С. 43–48.

52. Луценко, Ю.В. О группах Шмидта с перестановочными 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // X(55) Региональная науч.-практ. конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета: сб. ст. УО «ВГУ им. П.М. Машерова» / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: А.В. Гладков (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2008. – С. 19–20.

53. Луценко, Ю.В. О конечных группах с перестановочными 2-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XI респ. научн. конф. студентов и

аспирантов, Гомель, 17–19 марта 2008 г.: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2008. – Ч. 2. – С. 15.

54. Луценко, Ю.В. О конечных ненильпотентных группах с нормальными или *S*-квазинормальными (строго) 2-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XII респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 16–18 марта 2009 г.: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2009. – Ч. 1. – С. 235–236.

55. Луценко, Ю.В. Конечные группы с *S*-квазинормальными третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А.И. Мальцева, Новосибирск, 24–28 авг. 2009 г. / Ин-т матем. им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2009. – С. 67.

56. Луценко, Ю.В. Конечные группы с перестановочными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; редкол.: В.А. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 160.

57. Луценко, Ю.В. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или *S*-квазинормальными *n*-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2009. – № 1(52). – С. 134–138.

58. Луценко, Ю.В. О группах с перестановочными 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – №2(47). – С. 112–116.

59. Луценко, Ю.В. О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2009. – 33 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 3).

60. Луценко, Ю.В. О конечных группах с *X*-перестановочными *n*-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Алгебра и ее приложения: труды междунар. алгебр. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик, 6–12 июля 2009 г. / Кабардино-Балкарский гос. ун-т. – Нальчик, 2009. – С. 76–78.

61. Луценко, Ю.В. Строение групп Шмидта и групп Белоногова, в которых любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Вестн. Витебского гос. ун-та. – 2009. – № 2(52). – С. 134–138.

62. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Выш. шк., 2006. – 207 с.

63. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

64. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 50–53.

65. Пальчик, Э.М. О b-квазинормальных подгруппах / Э.М. Пальчик // Докл. акад. наук БССР. – 1967. – Т. 11, № 11. – С. 967–969.

66. Пальчик, Э.М. О группах, все i-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // Извес. акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1968. – № 1. – С. 45–48.

67. Пальчик, Э.М. О группах, все i-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. II / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // Извес. акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 3. – С. 51–57.

68. Пальчик, Э.М. О конечных группах с перестановочными подгруппами / Э.М. Пальчик // Докл. акад. наук БССР. – 1967. – Т. 11, № 5. – С. 391–392.

69. Подгорная, В.В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.

70. Подгорная, В.В. Сверхразрешимость конечной группы с полунормальными вторыми максимальными подгруппами / В.В. Подгорная // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 154–156.

71. Подгорная, В.В. Факторизации конечных групп дисперсивными и сверхразрешимыми подгруппами / В.В. Подгорная // Вес. Віцебскага дзярж. ун-та. – 1999. – № 4(14). – С. 80–82.

72. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.

73. Поляков, Л.Я. Максимальные и нормальные ряды конечных групп / Л.Я. Поляков // Докл. акад. наук СССР. – 1966. – Т. 167, № 2. – С. 294–297.

74. Решко, К.А. О насыщенности максимальных цепей модулярными подгруппами / К.А. Решко, В.И. Харламова // Докл. акад. наук БССР. – 1973. – Т. 17, № 9. – С. 788–789.

75. Решко, К.А. Порождение конечной группы системами немодулярных подгрупп / К.А. Решко // XII Всесоюзный алгебраический

коллоквиум. – Свердловск: Изд-во Свердл. гос. пед. ун-та, 1973. – Тетрадь 1. – С. 101.

76. Решко, К.А. О группах, не порождающихся некоторыми X-абнормальными подгруппами / К.А. Решко // Мат. заметки. – 1974. – Т. 16, № 5. – С. 771–776.

77. Решко, К.А. О p-длине произвольной конечной группы / К.А. Решко, В.И. Харламова // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 419–427.

78. Самусенко (Подгорная), В.В. О конечных группах с заданными минимальными добавлениями к подгруппам / В.В. Самусенко (Подгорная) // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. – Вып. 13. – С. 177–182.

79. Самусенко (Подгорная), В.В. О сверхразрешимости конечных групп с циклическими добавлениями к подгруппам / В.В. Самусенко (Подгорная) // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. – Вып. 14. – С. 141–146.

80. Семенчук, В.Н. Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского гос. пед. ун-та, 1985. – Вып. 1. – С. 86–96.

81. Сидоров, А.В. Конечные группы с заданными вторыми максимальными подгруппами / А.В. Сидоров // Вопросы алгебры. – 1990. – № 5. – С. 52–57.

82. Скиба, А.Н. H-перестановочные подгруппы / А.Н. Скиба // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37–39.

83. Скиба, А.Н. Конечные группы со слабо квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов. – Гомель, 2006. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 9).

84. Скиба, А.Н. Конечные группы с C-квазинормальными подгруппами / А.Н. Скиба, О.В. Титов // Сиб. мат. журнал. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 674–688.

85. Сучков, В.К. Влияние свойств n-ых максимальных p-критических подгрупп на строение конечной группы / В.К. Сучков // Мат. записки. Уральский ун-т. – 1968. – Т. 6, № 3. – С. 53–64.

86. Сучков, В.К. Конечные группы с единичными третьими максимальными 2-критическими подгруппами / В.К. Сучков // Труды 6-й науч.-техн. конф. – Могилев: Изд-во Могилевского гос. ун-та, 1979. – С. 396–400.

87. Титов, О.В. Конечные группы с заданными системами слабо нормальных подгрупп / О.В. Титов // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 23–29.

88. Уначев, Х.Я. Конечные группы, любая i-максимальная подгруппа которых независима / Х.Я. Уначев // Сиб. мат. журнал. – 1971. – Т. 12, № 4. – С. 926–930.

89. Уначев, Х.Я. О конечных группах, четвертые максимальные подгруппы которых независимы / Х.Я. Уначев // Алгебра и теория чисел. – 1977. – № 2. – С. 127–138.

90. Харламова, В.И. Характеризация конечных групп с определенными максимальными цепями / В.И. Харламова, К.А. Решко // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомельского семинара. – Минск, 1981. – С. 185–195.

91. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М.: Наука, 1962. – 468 с.

92. Черток, В.Д. Порождение конечной группы системами недостижимых подгрупп / В.Д. Черток // Извес. акад. наук БССР. – 1967. – № 2. – С. 80–84.

93. Чунихин, С.А. Об условиях теорем типа Силова / С.А. Чунихин // Докл. акад. наук СССР. – 1949. – Т. 69, № 6. – С. 735–737.

94. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.

95. Шевцов, Г.С. О конечных группах, все вторые максимальные подгруппы которых вполне факторизуемые / Г.С. Шевцов, Г.А. Маланьина // Реф. журнал Извес. вузов. Матем. – Казань, 1979. – 15 с. – Библиогр.: 8 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 2.10.79, № 3438-79 Деп.

96. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

97. Шериев, В.А. Описание класса конечных p-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. I / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – 1970. – С. 25–53.

98. Шериев, В.А. Описание класса конечных p-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. II / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – 1970. – С. 54–76.

99. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

100. Шныпарков, А.В. Конечные группы с максимальными m-полунормальными подгруппами / А.В. Шныпарков // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, фундаментальные науки. – 2007. – № 9. – С. 27–29.

101. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.

102. Agrawal, R.K. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. – 1974. – Vol. 17. – P. 159–165.

103. Al-Dababseh, A.F. Finite groups with X-permutable maximal subgroups / A.F. Al-Dababseh, J.J. Jaraden // SABM. – 2007. – Vol. 31(6). – P. 1097–1106.

104. Alejandre, M.J. Permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // J. Algebra. – 2004. – Vol. 276. – P. 453–461.

105. Alejandre, M.J. Finite soluble groups with permutable supnormal subgroups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera // J. Algebra. – 2001. – Vol. 240, № 2. – P. 705–722.

106. D'Aniello Groups in which n-maximal subgroups are dualpronormal / D'Aniello Alma // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1990. – Vol. 84. – P. 83–90.

107. Al-Sharo, Kh.A. A characteristics property of finite p-nilpotent groups / Kh.A. Al-Sharo // Comm. Algebra. – 2004. – Vol. 32, № 7. – P. 2655–2657.

108. Al-Sharo, Kh.A. Factorizable groups and formations / Kh.A. Al-Sharo, E.A. Molokova, L.A. Shemetkov // Acta applicandae math. – 2005. – Vol. 85. – P. 3–10.

109. Al-Sharo, Kh.A. On subgroups of prime order in a finite group / Kh.A. Al-Sharo, L.A. Shemetkov // Ukr. Math. – 2002. – Vol. 54, № 6. – P. 915–923.

110. Al-Sharo, Kh.A. An application of the concept of a generalized central element / Kh.A. Al-Sharo, O. Shemetkova // Algebra and discrete math. – 2007. – № 4. – P. 1–10.

111. Al-Sheikahmad, A. Finite groups with given c-permutable subgroups / A. Al-Sheikahmad // Algebra and discrete math. – 2004. – № 3. – P. 74–81.

112. Arad,Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M.B. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234–246.

113. Asaad, M. Simple groups all of whose second maximal subgroups are (A)-groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50. – P. 5–10.

114. Asaad, M. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – Vol. 54, № 1–2. – P. 9–27.

115. Asaad, M. On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / M. Asaad // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26. – P. 3647–3652.

116. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1998. – Vol. 51. – P. 289–293.

117. Asaad, M. Characterization of finite groups with some s-quasinormal subgroups / M. Asaad, P. Csorgo // Monatsh. Math. – 2005. – Vol. 146. – P. 263–266.

118. Asaad, M. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups / M. Asaad, P. Csorgo // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 401–404.

119. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80. – P. 113–118.

120. Asaad, M. On c-normality of finite groups / M. Asaad, M.E. Mohamed // J. Aust. Math. Soc. – 2005. – Vol. 78. – P. 297–304.

121. Asaad, M. Influence of π -quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups of a finite group / M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan // Arch. Math. – 1991. – Vol. 56. – P. 521–527.

122. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

123. Baer, R. Classes of finite groups and their propeties / R. Baer // Illinois Math. Journal. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

124. Ballester-Bolinches, A. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J. Beidleman, H. Heineken // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47, № 1 –2. – P. 63–69.

125. Ballester-Bolinches, A. Totally permutable products of finite groups satisfying SC and PST / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // Monatch. Math. – 2005. – Vol. 145, № 2. – P. 89–94.

126. Ballester-Bolinches, A. On totally permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, R. Esteban-Romero // J. Algebra. – 2005. – Vol. 293, № 1. – P. 269–278.

127. Ballester-Bolinches, A. On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294, № 1. – P. 127–135.

128. Ballester-Bolinche, A. On products of finite supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 7. – P. 3145–3152.

129. Ballester-Bolinches, A. On products of supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

130. Ballester-Bolinches, A. Local embeddings of some families of subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Luis M. Ezquerro, Alexander N. Skiba // Acta Mathematica Sinica. – 2009. – Vol. 25, № 6. – P. 869–882.

131. Ballester-Bolinches, A. On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Luis M. Ezquerro, Alexander N. Skiba // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2011. – Vol. 215, № 4. – P. 705–714.

132. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch.Math. – 1999. – Vol. 72, № 3. – P. 161–166.

133. Ballester-Bolinches, A. A note on m-permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Group Theory. – 2000. – Vol. 3, № 4. – P. 381–384.

134. Ballester-Bolinches, A. Finite groups which are products of pairwise totally permutable subgroups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1998. – Vol. 41, № 3. – P. 567–572.

135. Ballester-Bolinches, A. Mutually permutable products of finite groups. II / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera // J. Algebra. – 1999. – Vol. 218, № 2. – P. 563–572.

136. Ballester-Bolinches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. Hungar. – 1996. – Vol. 73. – P. 335–342.

137. Ballester-Bolinches, A. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure and Applied Alg. – 1998. – Vol. 127. – P. 113–118.

138. Ballester-Bolinches, A. Mutually permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1999. – Vol. 213, № 1. – P. 369–377.

139. Ballester-Bolinches, A. On finite products of totally permutable groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Agulera, M.D. Perez-Ramos // Bull. Austral. Math. Soc. – 1996. – Vol. 53, № 3. – P. 441–445.

140. Ballester-Bolinches, A. Permutability in finite soluble groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1993. – Vol. 115. – P. 393–396.

141. Ballester-Bolinches, A. Finite groups with some c-normal minimal subgroups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang // J. Pure and Applied Alg. – 2000. – Vol. 153, № 2. – P. 121–127.

142. Beidleman, J.C. Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heineken // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 18–30.

143. Beidleman, J.C. On the Fitting core of a formation / J.C. Beidleman, H. Heineken // Bull. Austral. Math. Soc. – 2003. – Vol. 68. – P. 107–112.

144. Beidleman, J.C. Totally permutable torsion subgroups / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.

145. Beidleman, J.C. Centre and norm / J.C. Beidleman, H. Heineken, M. Newell // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. – Vol. 69. – P. 457–464.

146. Berger, T.E. A universal example of a core-free permutable subgroup / T.E. Berger, F. Gross // Rocky Mountain J. Math. – 1982. – Vol. 12. – P. 345–365.

147. Between nilpotent and solvable / edited M. Weinstein. – Braun-Brumfield: Polygonal Publishing House, 1982. – 231 p.

148. Blackburn, N. Finite Groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

149. Bradway, R.H. The nilpotence class of core-free permutable subgroups / R.H. Bradway, F. Gross, W.R. Scott // Rocky Mountain J. Math. – 1971. – Vol. 1. – P. 375–382.

150. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 15. – P. 15–17.

151. Busetto, G. Proprirta di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi / G. Busetto // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1980. – Vol. 63. – P. 269–284.

152. Carocca, A. A note on the product of $\mathfrak{F}$-subgroups in finite group / A. Carocca // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1996. – Vol. 39. – P. 37–42.

153. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.

154. Cepulic, V. Second-metacyclic finite 2-groups / V. Cepulic, M. Ivankovic, E. Striko // Glas. mat. Hrv. mat. Drus. – 2005. – Vol. 40, № 1. – P. 59–69.

155. Cossey, J. Cyclic permutable subgroups of finite groups / J. Cossey, S.E. Stonehewer // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 71. – P. 169–176.

156. Cossey, J. The embedding of a cyclic permutable subgroup in a finite group / J. Cossey, S.E. Stonehewer // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47. – P. 89–111.

157. Cossey, J. The embedding of a cyclic permutable subgroup in a finite group. II / J. Cossey, S.E. Stonehewer // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2004. – Vol. 47. – P. 101–109.

158. Cossey, J. Minimal quasinormal subgroups of groups / J. Cossey, S.E. Stonehewer, G. Zacher // Ischia Group Theory 2006: proceedings of a conference in honor of Akbar Rhemtulla, Italy 29 March – 1 April 2006 / editer by Trevor Hawkes, Patrizia Longobardi, and Mercede Maj. – P. 13–21

159. Derr, J.B. The influence of minimal p-subgroups on the structure of finite groups / J.B. Derr, W.E. Deskins, N.P. Mukherjee // Arch. Math. – 1985. – Vol. 45. – P. 1–4.

160. Deskins, W.E. A note on the index complex of maximal subgroup / W.E. Deskins // Arch. Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 236–240.

161. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. – 1959. – № 1. – P. 100–104.

162. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

163. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

164. Dornhoff, L. M-groups and 2-groups / L. Dornhoff // Math. Z. – 1967. – Vol. 100. – P. 226–256.

165. Ezquerro, L.M. A contribution to the theory of finite supersoluble groups / L.M. Ezquerro // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1993. – Vol. 89. – P. 161–170.

166. Ezquerro, L.M. On Mutually M-Permutable Products of Finite Groups / L.M. Ezquerro, X. Soler-Escriv // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 4. – P. 1949–1960.

167. Flavell, P. Overgroups of second maximal subgroups / Paul Flavell // Arch. Math. – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.

168. Foguel, T. On seminormal subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1994. – Vol. 165. – P. 633–635.

169. Friesen D. Products of normal supersoluble subgroups / D. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.

170. Gagen, T.M. Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups / T.M. Gagen, Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1966. – Vol. 6, № 4. – P. 466–469.

171. Gao, J. Some Sufficient Conditions of p-nilpotent Groups / J. Gao // The International Conference on Group Theory and Related Topics (Xuzhou, China, 2008). The International Conference on Group Theory and Related Topics, April 19th–25th. 2008 г. – Xuzhou: Xuzhou Normal University, 2008. – P. 57.

172. Gaschutz, W. Prefrattini Gruppen / W. Gaschutz // Arch. Math. – 1962. – Vol. 13. – P. 418–426.

173. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York–Evanston–London: Harper and Row, 1968. – 527 p.

174. Gross, F Conjugacy of odd Hall subgroups / F. Gross // Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19. – P. 311–319.

175. Guo, P. Finite Groups Whose n-maximal Subgroups Are Subnormal / P. Guo // Journal-Shanxi University natural science edition. – 2005. – Vol. 28, № 4. – P. 341–354.

176. Guo, P. A note on subnormal finite groups with 2-maximal subgroups / Peng-fei Guo // Zhongbei daxui xuebao. Ziran kexue ban = J. N. Univ. China. Nat. Sci. Ed. – 2006. – Vol. 27, № 2. – P. 115–117.

177. Guo, W. Characterization of finite supersoluble groups by properties of their 2-maximal subgroups / W. Guo, N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; редкол.: А.В. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 304–306.

178. Guo, W. On finite groups in which every 2-maximal subgroups permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 17 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).

179. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekowa, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2009. – № 37. – С. 2446–2456.

180. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo,

H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 17 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 11).

181. Guo, W. Finite groups with some primary subgroups $\mathcal{F}$-*s*-supplemented / W. Guo, L. Miao // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33(5). – P. 2789–2800.

182. Guo, W. *X*-*s*-permutable subgroups / W. Guo, L. Shi, X. Yi // J. Math. Research and Exposition. – 2008. – Vol. 28, № 2. – P. 257–265.

183. Guo, W. Conditionally permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba. – Гомель, 2002. – 18 с. – (Препринт/ Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).

184. Guo, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Southeast Asian Bull Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.

185. Guo, W. Criterions of existence of Hall subgroups in non-soluble finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.

186. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3 –4. – P. 433–449.

187. Guo, W. *G*-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Israel J. Math. – 2003. – Vol. 138. – P. 125–138.

188. Guo, W. Finite groups with some given system of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283, Issue 11. – P. 1603–1612.

189. Guo, W. On primitive subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Indian J. Pure appl. Math. – Vol. 37(6). – P. 369–376.

190. Guo, W. Shur-Zassenhaus theorem for *X*-permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // 5 Международная алгебраическая конференция на Украине: тез. докл., Одесса, 20–27 июля, 2005 / Одесский нац. ун-т им. И.И. Мечникова; редкол.: В.В. Кириченко [и др.]. – Одесса, 2005. – P. 81.

191. Guo, W. Schur-Zassenhaus theorem for *X*-permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Algebra Colloqiuim. – 2008. – Vol. 15, Issue 2. – P. 185–192.

192. Guo, W. X-permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Ukrain. Math. J. – 2006. – Vol. 58, № 10. – P. 1471–1480.

193. Guo, W. *X*-permutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian math. J. – 2007. – № 48(4). – P. 742–759.

194. Guo, W. *X*-quasinormal subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2007. – № 48(4). – P. 593–605.

195. Guo, W. *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.

196. Guo, W. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / Wenbin Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.

197. Guo, X. The influence of ity of subgroups on the structure of finite groups II / X. Guo, D.Y. Li // Comm. Algebra. – 1998. – Vol. 26. – P. 1913–1922.

198. Guo, X. On semi-cover-avoiding subgroups of finite groups / X. Guo, P. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 209. – P. 151–158.

199. Guo, X. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – Vol. 181, № 2–3. – P. 297–308.

200. Guo, X. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80, № 6. – P. 561–569.

201. Guo, X. On semi-cover-avoiding maximal subgroups and solvability of finite groups / X. Guo, K.P. Shum, J. Wang // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 3235–3244.

202. Feldman, A. System-permutable Fischer subgroups are injecters / A. Feldman // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2001. – Vol. 101A(1). – P. 71–74.

203. Hall, P. On the Sylow systems of a soluble groups / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1937. – № 43(2). – P. 507 –528.

204. Hauck, P. Fitting classes and products of totally permutable groups / P. Hauck, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 2002. – Vol. 252. – P. 114–126.

205. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

206. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

207. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.

208. Hutsko, N.V. Finite groups with given nearly S-quasinormal subgroups / N.V. Hutsko, V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Asian-European journal of math. – 2008. – Vol. 1, № 3. – P. 369–382.

209. Hutsko, N.V. On well p-embedded subgroups of finite groups / N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2008. – № 2. – P. 50–64.

210. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168–170.

211. Janko Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

212. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.
213. Janko, Z. Finite simple groups with short chains of subgroups / Z. Janko // Math. Zeitschr. – 1964. – Vol. 84. – P. 428–437.
214. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson // Canadian J. Math. – 1971. – Vol. 23. – P. 562–564.
215. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.
216. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
217. Kurzweil, H. The theory of finite groups: an introduction / H. Kurzweil, B. Stellmacher. – New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verdag, 2004.
218. Legchekova, H.V. Finite groups with *X*-permutable 2-maximal and 3-maximal subgroups / H.V. Legchekova // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 25–29.
219. Legchekova, H.V. Finite groups with permutable 2-maximal and 3-maximal subgroups / H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Vol. 50, № 3. – P. 27–29.
220. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50(1). – P. 827–841.
221. Li, B. Weakly *s*-permutable subgroups of finite groups / B. Li, M. Zha // J. Yangzhou university natural science edition. – 2005. – Vol. 8, № 3. – P. 14–17.
222. Li, Sh. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Sh. Li // Math. Proc. R. Ir. Acad. – 2000. – Vol. 100A(1). – P. 65–71.
223. Li, Shigong Finite non-solvable groups with supersoluble second maximal 3d-subgroups / Sh. Li // Chic. Ann. Math. – 1988. – Vol. 9, № 1. – P. 32–37.
224. Li, Xiao-hua Finite groups whose 2-maximal subgroups are all subnormal / X. Li // Sichuan shifan daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. Sichuan Norm. Univ. Natur. Sci. – 2000. – Vol. 23, № 4. – P. 358–360.
225. Li, Y. A characteristic condition of finite nilpotent group / Y. Li // J. Zhejiang Univ. Sci. – 2004. – № 5(7). – P. 749–753.
226. Li, Y. On π-quasinormally embedded subgroups of finite groups. II / Y. Li, Y. Wang // J. Algebra. – 2004. – Vol. 281. – P. 109–123.
227. Li, Y. Finite groups in which *S*-semipermutability is a transitive relation / Y. Li, L. Wang, Y. Wang // J. Algebra. – 2008. – Vol. 2, № 3. – P. 143–152.

228. Li, Y. On *c*-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. II / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807–4811.

229. Li, Yangming On *p*-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded / Yan. Li, Yan. Wang, H. Wei // Acta Mathematica Hungarica. – 2005. – Vol. 108, № 4. – P. 283–298.

230. Li, Y. The influence of π-quasinormality of some subgroups of a finite group / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Arch. Math. – 2003. – Vol. 81, № 3. – P. 245–252.

231. Liu, X. Some criteria for supersolubility in products of finite groups / X. Liu, B. Li, X. Yi // Frontiers of Mathematics in China. – 2008. – Vol. 3, № 1. – P. 79–86

232. Maier, R. A completeness property of certain formations / R. Maier // Bull. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 24. – P. 540–544.

233. Maier, R. Endliche metanilpotente Gruppen / R. Maier // Arch. Math. – 1972. – Vol. 23. – P. 139–144.

234. Maier, R. Normality conditions for quasinormal subgroups of finite groups / R. Maier // Math. Z. – 1971. – Vol. 123. – P. 310–314.

235. Maier, R. Zur Vertauschbarkeit und Subnormalitat von Untergruppen / R. Maier // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 2. – P. 110–120.

236. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Z. Math. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.

237. Mann, A. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

238. Mann, A. Simple groups having *p*-nilpotent *2nd*-maximal subgroups / A. Mann // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 6, № 3. – P. 233–345.

239. Miller, G.A. Monabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H. Moreno // Trans. Am. Soc. – 1903. – № 4. – P. 398–404.

240. Mukherjee, N.P. A note on finite group structure influenced by second and third maximal subgroups / N.P. Mukherjee, R. Khazal // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1990. – Vol. 13, № 4. – P. 747–750

241. Mutually permutable products of two nilpotent groups / A. Ballester-Bolinches, [etc.] // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2006. – Vol. 115. – P. 273–279.

242. Nakamura, K. Charakteristische Untergruppen von quasinormalteiler / K. Nakamura // Arch. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 513–515.

243. Nakamura, K. Uber einige Beispiele der quasinormalteiler einer *p*-gruppe / K. Nakamura // Nagoya Math. J. – 1968. – Vol. 31. – P. 97–103.

244. On some permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre [etc.] // Rev. Math. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

245. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

246. Petrillo, J. *CAP*-subgroups in a direct product of finite groups / J. Petrillo // J. Algebra – 2006. – Vol. 306, № 2. – P. 432–438.

247. Praeger, C.E. Seminormal and subnormal subgroups lattices for transitive permutation groups / C.E. Praeger // J. Aust. Math. Soc. – 2006. – Vol. 80. – P. 45–63.

248. Ramadan, M. The influence of *s*-quasinormality of some subgroups of prime power order on the structure of finite groups / M. Ramadan // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. Math. – 2001. – Vol. 44. – P. 3–9.

249. Ramadan, M. On *c*-normality of certain subgroups of prime power oder of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.

250. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

251. Robinson, D.J.S. A courser in the theory of group / D.J.S. Robinson. – New York and oth.: Springer-Verlag, 1982. – 484 p.

252. Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vielen moduleren Untergruppen / R. Schmidt // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1969. – Vol. 34, № 1–2. – P. 115–125.

253. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.

254. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups. Vol. 14: De Gruyter Expositions in Mathematics / R. Schmidt. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1994. – 475 p.

255. Shaalan, A. The influence of *S*-permutability of some subgroups / A. Shaalan // Acta. Math. Hungar. – 1990. – Vol. 56. – P. 87–93.

256. Shemetkov, L.A. A new concept of a generalized central element / L.A. Shemetkov // Классы групп и алгебр: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 окт. 2005 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 22–23.

257. Shemetkov, L.A.On the **Ф**-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 21 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 28).

258. Shemetkova, O. Finite groups with a system of generalized central elements / O. Shemetkova // Algebra and discrete math. – 2004. – № 4. – P. 59–71.

259. Skiba, A.N. A note on *c*-normal subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2005. – Vol. 3. – P. 85–95.

260. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(36). – С. 12–32.

261. Skiba, A.N. *H*-permutable subgroups / A.N. Skiba // Извес. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37–39.

262. Skiba, A.N. On weakly *s*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
263. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.
264. Stonehewer, S.E. Old, Rrecent and New Results on quasinormal subgroups / S.E. Stonehewer // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2005. – Vol. 56. – P. 125–133.
265. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1–16.
266. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups of some finite permutation groups / S.E. Stonehewer // J. Austral. Math. Soc. – 1973. – Vol. 16. – P. 90–97.
267. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups of some finite *p*-groups / S.E. Stonehewer // Proc. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 28, № 3. – P. 222–236.
268. Stonehewer, S.E. Abelian quasinormal subgroups of groups / S.E. Stonehewer, G. Zacher // Rend. Math. Acc. Lincei. – 2004. – Vol. 15. – P. 69–79.
269. Stonehewer, S.E. Cyclic quasinormal subgroups of arbitrary groups / S.E. Stonehewer, G. Zacher // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2006. – Vol. 115. – P. 165–187.
270. Su, X. Semi-normal subgroups of a finite group / X. Su // Math. Mag. – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.
271. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
272. The structure of mutually permutable products of finite nilpotent groups / A. Ballester-Bolinches [etc.] // International journal of algebra and computation. – 2007. – Vol. 17, № 5–6. – P. 895–904.
273. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of *p*-groups / J.G. Thompson // Math. Z. – 1967. – Vol. 96, № 2. – P. 226–227.
274. Thompson, D.J. Normal *p*-complements for finite groups / D.J. Thompson // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1. – P. 43–46.
275. Wall, G. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G. Wall // Israel J. Math. – 1982. – Vol. 43. – P. 166–168.
276. Wang, K.-r. Finite Groups Whose 3-maximal Subgroups are Normal / K.-r. Wang // Journal-Sichuan normal university natural science. – 2003. – Vol. 26, part 1. – P. 6–9.
277. Wang, K. Finite groups whose maximal subgroups are *s*-seminormal / K. Wang // J. Sichuan normal university natural science ebition. – 2005. – Vol. 28, № 3. – P. 253–255.
278. Wang, K. On *s*-seminormal subgroups of finite groups II / K. Wang // J. Sichuan normal university natural science ebition. – 2005. – Vol. 28, № 1. – P. 1–4.

279. Wang, P. Some sufficient conditions of a nilpotent group / P. Wang // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 2. – P. 289–295.

280. Wang, Y. *c*-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.

281. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups *c*-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 467–478.

282. Wei, H. On *c*-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193–2200.

283. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982. – 382 p.

284. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups // H. Wielandt. – Ohio, 1971. – 35 p.

285. Zhang, Q. Finite nonabelian simple groups which contain a nontrivial semipermutable subgroup / Q. Zhang, L. Wang // Algebra Colloquium. – 2005. – Vol. 12, № 2. – P. 301–307.

286. Zhong, X.-g. Finite groups in which every cyclic subgroup of order 2 or 4 of second maximal subgroup is quasicentral / X.-g. Zhong // Shuxue zazhi = J. Math. – 2004. – Vol. 24, № 3. – P. 245–248.

Научное издание

Гуцко Наталия Викторовна
Луценко Юлия Владимировна

ОБОБЩЕННО КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Монография

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Технический редактор Н. В. Ропот
Корректор Т. Н. Липская
Оригинал-макет Е. В. Лис

Подписано в печать 30.06.2011. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Ризография. Усл. печ. л. 13,5.
Тираж 100 экз. (1-й завод 1–32 экз.) Заказ 33.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
им. И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г.
247760, Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (0236) 32-46-29