О.И. ТЕРЕЩЕНКО, М.И. ЕФРЕМОВА
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Сложность теории действительного числа является причиной того, что учащиеся усваивают это понятие с определенными трудностями. Перечислим основные из них.

1. Понятие иррационального числа основано на понятии бесконечности. Такие выражения, как «бесконечная последовательность десятичных знаков непериодической десятичной дроби», «бесконечный процесс нахождения общей меры двух несоизмеримых отрезков», не полностью понятны учащимся. Эти выражения противоречат первоначальным представлениям учащихся о числе, их жизненному опыту.

2. Учащиеся считают, что иррациональными числами являются числа вида $\sqrt{m}$, где m не есть точный квадрат рационального числа.

3. Учащиеся трудно воспринимают понятие «непрерывность числовой прямой». Они считают, что если между двумя рациональными точками на числовой прямой всегда найдется промежуточная рациональная точка, то числовая прямая заполнена «непрерывно» рациональными числами (абстрактное понятие «точка» воспринимается учащимися как объект, который на числовой прямой имеет определенную протяженность).

4. Многие учащиеся воспринимают иррациональные числа как «неточные» числа, а значит ими нельзя оперировать так, как рациональными числами.

5. Учащимся трудно уяснить утверждение о том, что сумма (произведение) двух иррациональных чисел существует и является единственной.

Причины указанных трудностей связаны с тем, что, во-первых, школьники не могут уяснить необходимость введения иррациональных чисел, во-вторых, изложение данной темы довольно упрощенное, в-третьих, отсутствует продуманная система упражнений, которая бы дала возможность учащимся получить правильное представление об этих числах.

Определить, является ли число a рациональным или иррациональным довольно просто, если число a записано в виде дроби $a = \frac{p}{q}$ (p, q – целые числа, $q \neq 0$) или в виде бесконечной непериодической или периодической дроби. Но часто приходится иметь дело с действительными числами, по записи которых трудно определить рациональное оно или иррациональное. Поэтому важно научить учащихся распознавать, рационально или иррационально число независимо от формы записи этого числа.

Покажем, как это можно сделать, используя методы доказательства от противного и математической индукции, применяя тригонометрические формулы, составляя алгебраическое уравнение, корнем которого является данное число, а также комбинируя все эти методы.

1. Одним из распространенных методов доказательства того, что данное число является рациональным или иррациональным, является метод доказательства от противного.

1.1 Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – иррациональное число.

Первый способ. Предположим, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – рациональное и равно r. Тогда $\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$, $3=(r-\sqrt{2})^2$, $3=r^2-2r\sqrt{2}+2$, отсюда $\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$. Из последнего равенства вытекает, что $\sqrt{2}$ – рациональное число, но $\sqrt{2}$ – число иррациональное. Получим противоречие, следовательно, предположение ложное, а поэтому $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – иррациональное число.

Второй способ. Предположим, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – рациональное, тогда рациональным будет число $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (как частное от деления двух рациональных чисел). Тогда, число $\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)$ – рациональное, а это противоречит тому, что $\sqrt{2}$ не является числом рациональным. Таким образом, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – иррациональное.

1.2 Доказать, что $ln2$ – иррациональное число.

Предположим, что число $ln2$ – рациональное, т.е. $\ln 2=\frac{n}{m}$, где $n, m\in N$. Тогда $10^{\frac{n}{m}}=2$, отсюда $10^n=2^m$. Последнее равенство невозможно, так как левая его часть делится на 5, а правая – нет. Получили противоречие, следовательно, $\ln 2$ – иррациональное число.

1.3 Доказать, что $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ – иррациональное число.

Предположим, что $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=p$, где p – рациональное число. Тогда $\sqrt{5}-\sqrt{3}=p\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$, отсюда, в результате возведения в квадрат обеих частей данного равенства получим $5-2\sqrt{6}=p^2\left(8-2\sqrt{15}\right)$ или $p^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=\frac{8p^2-5}{2}$. Последнее равенство возведем в квадрат. Получим $-6\sqrt{10}=\frac{\left(8p^2-5\right)^2}{4p^2}-15p^2-\frac{6}{p^2}$. Данное равенство означает, что $\sqrt{10}$ – рациональное число. Полученное противоречие означает, что предположение ложное, следовательно, данное число иррациональное.

2. Доказать тот факт, что число является рациональным или иррациональным можно путем составления алгебраического уравнения, которое имеет те или иные корни.

2.1 Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ – иррациональное число. Составим алгебраическое уравнение с помощью данного числа: $\left(x-\sqrt{2}\right)^3=3$. Упростим это уравнение. Получим $x^6-6x^4+6x^3+36x+1=0$. Данное уравнение не имеет рациональных корней, кроме ±1. Так как $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ – также корень этого уравнения, и $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\neq\pm1$, то $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ – иррациональное число.

2.2 Доказать, что $\sin 10^\circ$ – иррациональное число.

Составим уравнение, корнем которого является число $\sin 10^\circ$. Запишем тождество $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Положим, что $\alpha=10^\circ$, получим $8\sin^3 10^\circ-6\sin 10^\circ+1=0$. Имеем, что $\sin 10^\circ$ – корень уравнения $8x^3-6x+1=0$. Это уравнение не имеет рациональных корней. А так как $\sin 10^\circ$ – корень уравнения, то оно – иррациональное число.

2.3. С помощью уравнения $x^3-33x^2+27x-3=0$ доказать, что числа $tg^2 20^\circ, tg^2 40^\circ, tg^2 80^\circ$ являются числами иррациональными.

Уравнение $x^3-33x^2+27x-3=0$ не имеет рациональных корней. Но все три числа $tg^2 20^\circ, tg^2 40^\circ, tg^2 80^\circ$ являются его корнями. Покажем, например, что $tg^2 20^\circ$ – корень данного уравнения, т.е. покажем, что $\left(tg^2 20^\circ\right)^3-33\left(tg^2 20^\circ\right)^2+27tg^2 20^\circ-3=0$.

Имеем: $\sqrt{3}=tg60^\circ=tg\left(3\cdot 20^\circ\right)=\frac{3tg20^\circ-tg^3 20^\circ}{1-3tg^2 20^\circ}$. Отсюда

$tg^6 20^\circ-33tg^4 20^\circ+27tg^2 20^\circ-3=0$.

Последнее равенство дает основание утверждать, $tg^2 20^\circ$ – корень уравнения $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$. А так как оно не имеет рациональных корней, то $tg^2 20^\circ$ – число иррациональное. Аналогично показывается, что $tg^2 40^\circ, tg^2 80^\circ$ являются иррациональными числами.

Решение таких задач на уроках обобщающего повторения помогает учащимся ликвидировать указанные выше трудности при изучении действительных чисел.