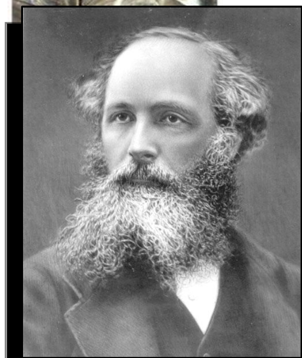
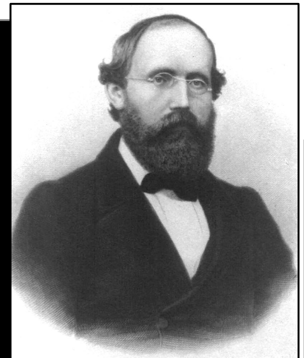
ISBN 978-985-477-448-0

Е. М. Овсиюк
В. М. Редьков

Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией





Мозырь
2011

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»
Институт физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси

Е. М. Овсиюк
В. М. Редьков

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

МОНОГРАФИЯ

Мозырь
2011

УДК 539.123.17, 539.121.7
ББК 22.31
О-34

Авторы:
Е. М. Овсиюк, **В. М. Редьков**

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор
УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
Н. В. Максименко;
кандидат физико-математических наук, доцент
УО «Белорусский государственный педагогический университет
им. М. Танка»
В. В. Кисель

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Овсиюк, Е. М.
О-34 Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией : монография / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина. – 228 с.
ISBN 978-985-477-448-0.

На основе применения тетрадного формализма развит общий подход к исследованию электродинамических уравнений Максвелла в пространстве-времени с неевклидовой геометрией. Исходным берется известный подход Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера, в котором электромагнитное поле описывается 3-мерным комплексным вектором в вакууме и двумя 3-мерными комплексными векторами в среде. Подход обобщен на случай присутствия внешнего гравитационного фона, описываемого в рамках общей теории относительности с помощью псевдоримановой геометрии пространства-времени. Детально описывается связь этого подхода с другими формализмами: общековариантным тензорным и матричным Даффина–Кеммера. Построены точные решения типа сферических и цилиндрических волн для уравнений Максвелла в гиперболическом пространстве Лобачевского и сферическом пространстве Римана. Построены решения уравнений Максвелла типа плоских волн в пространстве Лобачевского. Развито применение комплексного формализма для электромагнитного поля на фоне пространства-времени черной дыры Шварцшильда. Детально рассмотрены возможности моделирования электромагнитных сред с использованием псеводирамановой геометрии пространства-времени, когда каждая возможная геометрия модифицирует электромагнитные уравнения таким образом, что их можно рассматривать как обычные (плоские) уравнения Максвелла в специальной среде.

Предназначена для научных работников, преподавателей, а также аспирантов и студентов-старшекурсников, специализирующихся в области теоретической физики.

УДК 539.123.17, 539.121.7
ББК 22.31

ISBN 978-985-477-448-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика Максвелла занимает особое место в физике. Она объединила в единое целое электрические и магнитные явления. После создания электромагнитной теории света сюда же присоединила и оптику. Именно в электродинамике идея передачи воздействия от одного тела к другому превратилась из философской в физическую. Она привела к формированию физического представления об особом состоянии материи – электромагнитном поле.

Стремление понять необычные свойства электромагнитного поля относительно движения инерциальных систем отсчета привело (через анализ свойств симметрии уравнений Максвелла, здесь основные заслуги принадлежат Лоренцу, Пуанкаре и Эйнштейну) к созданию специальной теории относительности. Фактически, исходно теория относительности – это прежде всего теория электромагнитного поля. Позднее она была распространена на всю остальную физику.

Электродинамика Максвелла была первой релятивистски инвариантной полевой теорией, явившейся образцом для всех других релятивистских теорий. В частности, после осознания роли преобразований Лоренца в физике встал вопрос о релятивизации теории гравитационного взаимодействия. Успех ньютоновского закона всемирного тяготения был несомненным, однако эта теория была, очевидно, нерелятивистской. В ней гравитационное воздействие передается мгновенно, и гравитационное поле остается больше философской категорией, чем физической.

Заметим, что уже Пуанкаре пытался построить релятивистскую теорию гравитационного взаимодействия. Отметим также, что ему принадлежит еще одна ключевая идея, в полной мере реализованная позже в общей теории относительности Эйнштейна. Идея состоит в том, что силовое воздействие можно описывать геометрически как проявление неевклидовости геометрии пространства. Пуанкаре не удалось продвинуться далеко в этих двух направлениях. Но через несколько лет эти идеи стали основой геометрической теории гравитационного взаимодействия – общей теории относительности.

В этой теории вместо введения концепции гравитационного поля и описания его воздействия на все другие объекты используется псевдориманова геометрия 4-мерного пространства-времени. Идея всемирного тяготения трансформировалась при этом в представление о том, что все физические объекты чувствуют неевклидовость (или искривление) пространства-времени, последнее же есть проявление фонового гравитационного воздействия.

Общее утверждение (гипотеза) состоит в том, что гравитация действует на все объекты (частицы и поля), существенно трансформируя соответствующие базовые физические уравнения, описывающие эти объекты.

И, в частности, присутствие гравитационного геометрического фона существенно модифицирует электродинамические уравнения Максвелла.

Изложение основного рецепта обобщения уравнений Максвелла, учитывающего присутствие произвольного внешнего (гравитационного) геометрического фона, является целью настоящей работы. Конечно, знакомство только с общей формой уравнений является недостаточным для действительного понимания. Поэтому в книге изложен ряд конкретных применений этих общих уравнений, акцент при этом делается на точно решаемые задачи.

Книга является в значительной степени продолжением и развитием многих исследований, выполненных ранее представителями белорусской школы теоретической физики, созданной академиком Ф.И. Федоровым. Поэтому, прежде всего, хотим выразить благодарность уже ушедшим из жизни людям: Ф.И. Федорову, О.С. Иваницкой, А.А. Богушу; надеемся, что наша работа станет продолжением дела, которому они посвятили свои жизни.

Пользуясь возможностью, выражаем благодарность за поддержку, советы и помощь сотрудникам Института физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси: Л.М. Томильчику, Ю.А. Курочкину, Е.А. Толкачеву, И.С. Сацункевичу, Ю.П. Выблому, В.В. Кудряшову, С.Ю. Саковичу; сотрудникам Белорусского государственного университета Г.Г. Крылову и Г.В. Грушевской; сотрудникам Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка В.В. Киселю и В.В. Махначу; сотрудникам Мозырского государственного педагогического университета им. И.П. Шамякина: И.Н. Кралевич, И.Н. Ковальчук, В.С. Савенко, В.В. Шепелевичу за помощь и советы в процессе подготовки рукописи к изданию.

Авторы:
Е.М. Овсиюк (e.ovsiyuk@mail.ru)
В.М. Редьков (redkov@dragon.bas-net.by)

Глава 1

ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

Возможность геометрического моделирования материальных уравнений в теории Максвелла и, в частности, материальных уравнений движущихся сред хорошо известна. Первые работы выполнены очень давно: Гордон [1], Тамм, Мандельштам [2]–[4]; связь теории Максвелла и римановой геометрии обсуждается уже в первом издании II тома курса теоретической физики Ландау [5]. Аналогия между эффектами искривленной пространственно-временной геометрии и материальными уравнениями в электродинамике постоянно присутствовала в литературе (Лишнерович [6], Новаку [7], Балац [8], [9], Фам Ман Куан [10], [11], Скротский [12], Томильчик, Федоров [13], Плебаньски [14], Пост [15], Тонела [16], Эллис [17], О'дел [18], Фелисе [19], Болотовский, Столяров [20], [21], Венури [22], Шлейх, Скулли [23], Барыкин, Толкачев, Томильчик и др. [24]–[26]) и привлекает особенно пристальное внимание в последние годы (Анточи, Миних [27]–[30], Хиллион [31], [32], Лахтакия, Вейлофер [33]–[37], Леонард, Пивниски [38]–[42], Обухов и др. [43]–[46], Новело и др. [47]–[49], Рааб, Ланге [50], [51], Бревик, Халнес [52], Нанди и др. [53], Матанге [54], Делфених [55], Буунсерм и др. [56], Барселро и др. [57]).

1.1 Риманова геометрия и теория Максвелла

Будем исходить из уравнений Максвелла, записанных в пространстве Минковского:

$$\text{div}\, \mathbf{B} = 0\,, \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,,$$

$$\epsilon\epsilon_0\, \text{div}\, \mathbf{E} = \rho\,, \qquad \frac{1}{\mu\mu_0}\,\text{rot}\, \mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{1.1.1}$$

Если использовать уравнения

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0}\,, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\, \mathbf{E}\,, \qquad x^0 = ct\,, j^a = (\rho, \mathbf{J}/c)\,, \tag{1.1.2}$$

то (1.1.1) представляются как

$$\text{div}\, c\mathbf{B} = 0\,, \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial x^0}\,,$$

$$\text{div}\, \mathbf{D} = j^0\,, \qquad \text{rot}\, \frac{\mathbf{H}}{c} = \mathbf{j} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0}\,. \tag{1.1.3}$$

С использованием двух электромагнитных тензоров

$$(F^{\alpha\beta}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & +cB^2 \\ E^2 & +cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & +cB^1 & 0 \end{array} \right| ,$$

$$(H^{\alpha\beta}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H^3/c & +H^2/c \\ D^2 & +H^3/c & 0 & -H^1/c \\ D^3 & -H^2/c & +H^1/c & 0 \end{array} \right| \qquad (1.1.4)$$

(отметим, что $E^i = -E_i,\ D^i = -D_i,\ B^i = +B_i,\ H^i = +H_i$) уравнения (1.1.3) примут вид

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \ , \qquad \partial_b H^{ba} = j^a \ . \qquad (1.1.5)$$

Вакуумные материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = (D^i) \ , \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{B} = (H^i) \ , \qquad (1.1.6a)$$

будучи переведены в тензорную форму, запишутся так:

$$(F^{ab}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{array} \right| ,$$

$$(H^{ab}) = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H^3/c & H^2/c \\ D^2 & H^3/c & 0 & -H^1/c \\ D^3 & -H^2/c & H^1/c & 0 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & -\epsilon_0 E^1 & -\epsilon_0 E^2 & -\epsilon_0 E^3 \\ \epsilon_0 E^1 & 0 & -B^3/c\mu_0 & B^2/c\mu_0 \\ \epsilon_0 E^2 & B^3/c\mu_0 & 0 & -B^1/c\mu_0 \\ \epsilon_0 E^3 & -B^2/c\mu_0 & B^1/c\mu_0 & 0 \end{array} \right| .$$

Отсюда, если учесть равенство $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, получим

$$H^{ab}(x) = \epsilon_0 \ F^{ab}(x) \ . \qquad (1.1.6b)$$

Другими словами, для случая вакуума электромагнитные тензоры $H^{ab}(x)$ и $F^{ab}(x)$ отличаются только на связанный с выбором системы единиц множитель. Мы сталкиваемся с совсем другой ситуацией, когда рассматриваем случай присутствия однородной среды. Тогда материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = (D^i) \ , \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu}\,\mathbf{B} = (H^i) \qquad (1.1.7a)$$

в тензорной форме примут вид

$$(F^{ab}) = \begin{vmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & +cB^2 \\ E^2 & +cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & +cB^1 & 0 \end{vmatrix} ,$$

$$(H^{ab}) = \begin{vmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H^3/c & +H^2/c \\ D^2 & +H^3/c & 0 & -H^1/c \\ D^3 & -H^2/c & +H^1/c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \epsilon_0 \epsilon \begin{vmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3/\epsilon\mu & +cB^2/\epsilon\mu \\ E^2 & +cB^3/\epsilon\mu & 0 & -cB^1/\epsilon\mu \\ E^3 & -cB^2/\epsilon\mu & +cB^1/\epsilon\mu & 0 \end{vmatrix} . \qquad (1.1.7b)$$

Уравнения $(1.1.7b)$ могут быть записаны в более простой форме с помощью вспомогательной (4×4)-матрицы

$$\eta^{am} = \begin{vmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{vmatrix} , \qquad k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \qquad (1.1.7c)$$

как

$$H^{ab} = \epsilon_0 \epsilon \; \eta^{am} \eta^{bn} \; F_{mn} \; . \qquad (1.1.7d)$$

Таким образом, материальные уравнения в однородной среде задаются при использовании двух электромагнитных тензоров с помощью тензора четвертого ранга, построенного из тензора второго ранга η^{ab}.

Если обобщать теорию Максвелла на случай пространства-времени с неевклидовой геометрией, то уравнения (1.1.5) нужно заменить на

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \; , \qquad \nabla_\beta H^{\beta\alpha} = j^\alpha \; . \qquad (1.1.8a)$$

При замене уравнений Максвелла в плоском пространстве на уравнения Максвелла в искривленном пространстве можно исходить 1) либо из вакуумных уравнений в плоском пространстве, 2) либо из уравнений Максвелла в конкретной среде. Сначала проанализируем первый наиболее простой случай 1. Это соответствует тому, что два электромагнитных тензора с нижними индексами связаны вакуумным уравнением

$$H_{\alpha\beta}(x) = \epsilon_0 F_{\alpha\beta}(x) \; . \qquad (1.1.8b)$$

В соответствии с этим уравнения $(1.1.8a)$ можно представить в виде

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \; , \qquad \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \epsilon_0^{-1} j^\alpha \; . \qquad (1.1.8c)$$

В уравнениях (1.1.8) вместо симметрии Лоренца накладывается требование инвариантности относительно любых непрерывных преобразований координат вида

$$x^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad x^{'\alpha} = f^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3) \; ;$$

при этом электромагнитные тензоры преобразуются относительно замены координат по закону

$$F_{\alpha'\beta'}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \, \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \, F_{\alpha\beta}(x) \; , \qquad H_{\alpha'\beta'}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \, \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \, H_{\alpha\beta}(x) \; .$$

1.2 Уравнения Максвелла в римановом пространстве-времени

В искривленном пространстве-времени с произвольным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$ (вакуумные) уравнения Максвелла имеют вид

$$(I) \qquad \nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0 \; ,$$

$$(II) \qquad \nabla_{\beta} F^{\beta\alpha} = \epsilon_0^{-1} j^{\alpha} \; . \tag{1.2.1}$$

Симметричность символов Кристоффеля $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}$ позволяет в уравнении (I) ковариантные производные заменить на обычные. Действительно, это уравнение в детальной записи имеет вид

$$\nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} F_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} F_{\beta\sigma} +$$

$$+ \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} F_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} F_{\gamma\sigma} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} F_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} F_{\alpha\sigma} \; .$$

Все шесть слагаемых без производных взаимно сокращаются, и уравнение Максвелла (I) принимает вид

$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0 \; . \tag{1.2.2}$$

Это уравнение (1.2.2), записанное с помощью обычных производных, является тем не менее общековариантным: оно не меняет своего вида при произвольных преобразованиях координат. Во избежание недоразумений отметим специально, что поднимать индексы в уравнении (1.2.2) нельзя, но это можно сделать в уравнении (I) из (1.2.1):

$$\nabla^{\alpha} F^{\beta\gamma} + \nabla^{\beta} F^{\gamma\alpha} + \nabla^{\gamma} F^{\alpha\beta} = 0 \; . \tag{1.2.3}$$

Детальнее уравнение (1.2.3) записывается как

$$g^{\alpha\rho} \, \nabla_{\rho} F^{\beta\gamma} + g^{\beta\rho} \, \nabla_{\rho} F^{\gamma\alpha} + g^{\gamma\rho} \, \nabla_{\rho} F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} \, [\, \partial_{\rho} \, F^{\beta\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} \, F^{\sigma\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma} \, F^{\beta\sigma} \,] +$$

$$+g^{\beta\rho} \, [\, \partial_\rho F^{\gamma\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma} \, F^{\sigma\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \, F^{\gamma\sigma} \,] \, + g^{\gamma\rho} \, [\, \partial_\rho F^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \, F^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} \, F^{\alpha\sigma} \,] = 0 \; .$$

Слагаемые, не содержащие производных, не компенсируют друг друга:

$$0 = (g^{\alpha\rho} \, \partial_\rho \, F^{\beta\gamma} + g^{\beta\rho} \, \partial_\rho F^{\gamma\alpha} + g^{\gamma\rho} \, \partial_\rho F^{\alpha\beta}) \, + (g^{\alpha\rho} \, \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} - g^{\beta\rho} \, \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}) \, F^{\sigma\gamma} +$$

$$+ \, (g^{\alpha\rho} \, \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma} \, - g^{\gamma\rho} \, \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}) \, F^{\beta\sigma} + (g^{\beta\rho} \, \Gamma^{\gamma}_{\rho\sigma} \, - g^{\gamma\rho} \, \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}) F^{\sigma\alpha} \; .$$

Проведем в уравнениях Максвелла, записанных в терминах общековариантных производных, (3+1)-расщепление:

$$\epsilon_{ijk} \nabla_i F_{jk} = 0 \; , \qquad \nabla_0 \, F_{ij} + \nabla_i \, F_{j0} - \nabla_j \, F_{i0} = 0 \; ,$$

$$\nabla_i \, F^{i0} = \epsilon_0^{-1} j^0 \; , \qquad \nabla_0 F^{0k} + \nabla_i \, F^{ik} = \epsilon_0^{-1} j^k \; . \tag{1.2.4}$$

1.3 Вакуумные уравнения Максвелла в римановом пространстве, трехмерная форма

Уравнения Максвелла (1.2.1) могут быть записаны с использованием символа обычной производной [5]:

$$(I) \qquad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \; ,$$

$$(II) \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g} \; F^{\beta\alpha} = \epsilon_0^{-1} j^\alpha \; , \tag{1.3.1}$$

где $g(x) = \det \, [g_{\alpha\beta}(x)] \; < 0$. Первое уравнение содержит в себе четыре соотношения:

$$\begin{array}{ll} (123) & \partial_1 \, F_{23} + \partial_2 \, F_{31} + \partial_3 \, F_{12} = 0 \; , \\ (012) & \partial_0 \, F_{12} + \partial_1 \, F_{20} + \partial_2 \, F_{01} = 0 \; , \\ (023) & \partial_0 \, F_{23} + \partial_2 \, F_{30} + \partial_3 \, F_{02} = 0 \; , \\ (031) & \partial_0 \, F_{31} + \partial_3 \, F_{10} + \partial_1 \, F_{03} = 0 \; . \end{array} \tag{1.3.2}$$

Введем 3-мерные обозначения:

$$E_i(x) = F_{i0}(x) \; , \qquad c \, B_i(x) = -\epsilon_{ijk} \, F_{jk}(x) \; ;$$

тогда

$$E_1 = F_{10} \; , \qquad E_2 = F_{20} \; , \qquad E_3 = F_{30} \; ,$$

$$cB_1 = -F_{23} \; , \qquad cB_2 = -F_{31} \; , \qquad cB_3 = -F_{12} \; .$$

Уравнения (1.3.2) имеют вид

$$\partial_1 \, B_1 + \partial_2 \, B_2 + \partial_3 \, B_3 = 0 \; ,$$

$$\partial_t \, B_1 = \partial_2 \, E_3 - \partial_3 \, E_2 \; ,$$

$$\partial_t\ B_2 = \partial_3\ E_1 - \partial_1\ E_3\ ,$$
$$\partial_t\ B_3 = \partial_1\ E_2 - \partial_2\ E_1\ . \tag{1.3.3}$$

Второе уравнение из (1.3.1) эквивалентно следующим четырем:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \partial_i \sqrt{-g}\ F^{i0} = \epsilon_0^{-1} j^0\ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{-g}\ F^{0j} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}\ F^{ij} = \epsilon_0^{-1} j^j\ , \tag{1.3.4}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i \sqrt{-g} F^{i0} = \epsilon_0^{-1} j^0\ ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{-g}F^{01} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\sqrt{-g}F^{12} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{-g}F^{31} = \epsilon_0^{-1} j^1\ ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{-g}F^{02} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\sqrt{-g}\ F^{12} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{-g}F^{23} = \epsilon_0^{-1} j^2\ ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{-g}F^{03} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\sqrt{-g}F^{31} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\sqrt{-g}F^{23} = \epsilon_0^{-1} j^3\ . \tag{1.3.5}$$

В 3-мерных обозначениях

$$D^i(x) = \epsilon_0 F^{i0}(x)\ , \qquad \frac{H^i(x)}{c} = -\epsilon_0\ \epsilon_{ijk}\ F^{jk}(x)$$

уравнения (1.3.5) запишутся как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \partial_i \sqrt{-g}\ D^i = \rho\ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^2}\sqrt{-g}\ H^3 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{-g}\ H^2 = J^1 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\ D^1\ ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^3}\sqrt{-g}\ H^1 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^1}\sqrt{-g}\ H^3 = J^2 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\ D^2\ ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^1}\sqrt{-g}\ H^2 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial x^2}\sqrt{-g}\ H^1 = J^3 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\ D^3\ . \tag{1.3.6}$$

1.4 Уравнения Максвелла в ортогональных координатах

Пусть метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ в искривленном пространстве-времени имеет диагональную структуру

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} h_0^2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1^2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_3^2(x) \end{vmatrix} ,$$

$$\sqrt{-g(x)} = \det\,(g_{\alpha\beta}) = h_0 h_1 h_2 h_3 \; . \qquad (1.4.1)$$

Рассмотрим вакуумные уравнения Максвелла, обобщенные на случай пространства-времени с неевклидовой геометрией. Первые четыре уравнения Максвелла (без источников) в ортогональных координатах имеют тот же вид, что и в произвольных неортогональных координатах:

$$\partial_1\, B_1 + \partial_2\, B_2 + \partial_3\, B_3 = 0 \, , \qquad (1.4.2)$$

$$\partial_t\, B_1 = \partial_2\, E_3 - \partial_3\, E_2 \, ,$$
$$\partial_t\, B_2 = \partial_3\, E_1 - \partial_1\, E_3 \, ,$$
$$\partial_t\, B_3 = \partial_1\, E_2 - \partial_2\, E_1 \; . \qquad (1.4.3)$$

Контравариантные компоненты D^i, H^i выражаются через ковариантные E^i, B^i согласно формулам (сопоставьте их с уравнениями связи в плоском пространстве для однородной среды $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\, \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\mu_0$)

$$D^1 = -\epsilon_0 \frac{E_1}{h_0^2 h_1^2} \, , \qquad D^2 = -\epsilon_0 \frac{E_2}{h_0^2 h_2^2} \, , \qquad D^3 = -\epsilon_0 \frac{E_3}{h_0^2 h_3^2} \, ,$$

$$H^1 = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_1}{h_2^2 h_3^2} \, , \qquad H^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_2}{h_3^3 h_1^2} \, , \qquad H^3 = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_3}{h_1^2 h_2^2} \; . \qquad (1.4.4)$$

Остальные четыре уравнения Максвелла (с источниками) имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_i \sqrt{-g}\; D^i = \rho \, , \qquad (1.4.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{-g}\; H^3 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{-g}\; H^2 = J^1 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-g}\; D^1 \, ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{-g}\; H^1 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^1} \sqrt{-g}\; H^3 = J^2 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-g}\; D^2 \, ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^1} \sqrt{-g}\; H^2 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{-g}\; H^1 = J^3 + \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-g}\; D^3 \; .$$
$$(1.4.6)$$

Пусть $g_{00} = 1$ и пространственная метрика статична (не зависит от времени)

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, x^3) \; , \qquad \sqrt{-g} = h_1 h_2 h_3 \; ;$$

тогда уравнения связи (1.4.4) упрощаются:

$$D^1 = -\epsilon_0 \; \frac{E_1}{h_1^2}, \qquad D^2 = -\epsilon_0 \; \frac{E_2}{h_2^2}, \qquad D^3 = -\epsilon_0 \; \frac{E_3}{h_3^2} \; ,$$

$$H^1 = \frac{1}{\mu_0} \; \frac{B_1}{h_2^2 h_3^2} \; , \qquad H^2 = \frac{1}{\mu_0} \; \frac{B_2}{h_3^2 h_1^2} \; , \qquad H^3 = \frac{1}{\mu_0} \; \frac{B_3}{h_1^2 h_2^2} \; . \qquad (1.4.7)$$

1.5 Уравнения Максвелла в римановом пространстве и материальная среда, четырехмерный тензорный формализм

Сравним явный вид уравнений Максвелла (в декартовых координатах) в среде в плоском пространстве:

$$\partial_a \; F_{bc} + \partial_b \; F_{ca} + \partial_c \; F_{ab} = 0 \; , \qquad \partial_b \; H^{ba} = J^a \; ; \qquad (1.5.1)$$

в частном случае однородной среды связь между тензорами H_{ab} и F_{ab} задается материальными уравнениями (1.1.7d) с использованием тензора 4-го порядка:

$$H^{ab} = \epsilon_0 \epsilon \; \eta^{am} \eta^{bn} \; F_{mn} \; , \qquad \eta^{am} = \left| \begin{array}{cccc} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{array} \right| \; , \qquad k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \qquad (1.5.2)$$

с вакуумными уравнениями Максвелла в римановом пространстве (в квазидекартовых координатах x^a).

Чтобы различать формулы, относящиеся к плоскому и искривленному пространству, будем использовать для общековариантных электромагнитных тензоров малые коренные буквы f_{ab} и h^{ab}

$$\partial_a f_{bc} + \partial_b f_{ca} + \partial_c f_{ab} = 0 \; ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \; \partial_b \; \sqrt{-g} \; h^{ba} = j^a \; , \qquad (1.5.3)$$

$$h_{ab}(x) = \epsilon_0 f_{ab}(x), \qquad h^{ab}(x) = \epsilon_0 g^{am}(x) g^{bn}(x) \; f_{mn}(x) \; . \qquad (1.5.4)$$

Отмечаем, что, вводя новые формальные переменные

$$F_{ab} = f_{ab}, \; H^{ba} = \epsilon_0 \sqrt{-g} \; g^{am}(x) g^{bn}(x) F_{mn}(x), \; J^a = \sqrt{-g} j^a \; , \qquad (1.5.5)$$

вакуумные уравнения Максвелла (1.5.3), (1.5.4) в римановом пространстве можно записать в виде уравнений Максвелла в некоторой эффективной материальной среде (сравн. с (1.5.1))

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \ , \qquad \partial_b \ H^{ba} = J^a \ . \tag{1.5.6}$$

Уравнения связи между двумя тензорами в эффективной материальной среде определяются с помощью метрического тензора риманова пространства

$$H^{\beta\alpha}(x) = \epsilon_0 \ [\ \sqrt{-g(x)} \ g^{\alpha\rho}(x) g^{\beta\sigma}(x) \ ] \ F_{\rho\sigma}(x) \ . \tag{1.5.7}$$

Следует обратить внимание на один специальный случай, когда определитель метрического тензора не зависит от координат. При этом фактор $\sqrt{-g}$ сокращается в уравнениях (1.5.3) и он, следовательно, может быть опущен в формуле (1.5.7).

Этот анализ можно обобщить и на криволинейные координаты. Действительно, пусть в плоском пространстве есть некоторая криволинейная система координат (x^σ) с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}(x)$. Уравнения Максвелла в среде в этой криволинейной системе координат имеют вид

$$(\partial_\alpha \ F_{\beta\gamma} + \partial_\beta \ F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \ F_{\alpha\beta} = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \ \partial_\beta \sqrt{-G} \ \ H^{\alpha\beta} = J^\alpha \ ; \tag{1.5.8}$$

связь между тензорами H_{ab} и F_{ab} задается (внешними) материальными уравнениями.

Пусть есть риманово пространство, метрический тензор которого $g_{\alpha\beta}(x)$ также задан формально в этих же координатах. Вакуумные уравнения Максвелла в римановом пространстве имеют вид

$$\partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta} = 0 \ , \ \ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g} h^{\beta\alpha} = j^\alpha \ , \tag{1.5.9}$$

где

$$h_{\alpha\beta}(x) = \epsilon_0 f_{\alpha\beta}(x), \qquad h^{\alpha\beta}(x) = \epsilon_0 g^{\alpha\rho}(x) g^{\beta\sigma}(x) \ f_{\rho\sigma}(x) \ .$$

Второе уравнение из (1.5.9) может быть переписано как

$$\frac{\sqrt{-G}}{\sqrt{-g}} \ \frac{1}{\sqrt{-G}} \ \partial_\beta \sqrt{-G} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-G}} \ \ h^{\beta\alpha} = j^\alpha \ . \tag{1.5.10}$$

Введем новые переменные

$$F_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(x) \ , \ \ H^{\beta\alpha}(x) = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-G}} h^{\beta\alpha}(x) \ , \ \ J^\alpha(x) = \frac{\sqrt{-g(x)}}{\sqrt{-G(x)}} j^\alpha(x) \ ;$$

тогда уравнения (1.5.9) принимают вид уравнений Максвелла (1.5.8) в плоском пространстве (в криволинейных координатах x^{σ}):

$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0 \, , \qquad \frac{1}{\sqrt{-G}} \, \partial_{\beta} \sqrt{-G} \;\; H^{\alpha\beta} = J^{\alpha} \, . \qquad (1.5.11)$$

Причем связь между электромагнитными тензорами осуществляется следующим образом:

$$H^{\beta\alpha}(x) = \epsilon_0 \, \frac{\sqrt{-g(x)}}{\sqrt{-G(x)}} \;\; g^{\alpha\rho}(x) g^{\beta\sigma}(x) \; F_{\rho\sigma}(x) \, .$$

1.6 Метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ и геометрические материальные уравнения, трехмерная формулировка

Ограничиваемся рассмотрением квазидекартовых координат. Чтобы не усложнять формул, на время опустим фактор $\sqrt{-g}$ из всех формул (учтем его после проведения вычислений)

$$H_{ab}(x) = \epsilon_0 \; F_{ab} \implies H^{\rho\sigma}(x) = \epsilon_0 \; g^{\rho\alpha}(x) \; g^{\sigma\beta}(x) \; F_{\alpha\beta}(x) \, . \qquad (1.6.1)$$

Трехмерное представление тензоров определяется соотношениями

$$E_1 = F_{10} \, , \qquad E_2 = F_{20} \, , \qquad E_3 = F_{30} \, ,$$

$$cB_1 = -F_{23} \, , \qquad cB_2 = -F_{31} \, , \qquad cB_3 = -F_{12} \, ,$$

$$D^1 = \epsilon_0 F^{10} \, , \qquad D^2 = \epsilon_0 F^{20} \, , \qquad \epsilon_0 D^3 = F^{30} \, ,$$

$$\frac{H^1}{c} = -\epsilon_0 F^{23} \, , \qquad \frac{H^2}{c} = -\epsilon_0 F^{31} \, , \qquad \frac{H^3}{c} = -\epsilon_0 F^{12} \, . \qquad (1.6.2)$$

Рассматриваем общий случай произвольного метрического тензора:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cccc} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{array} \right| \, , \qquad g^{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cccc} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{01} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{02} & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{03} & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{array} \right| \, . \qquad (1.6.3)$$

Задача состоит в получении трехмерного представления для материальных уравнений, их общая структура должна быть следующей:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik}(x) \; E_k + \epsilon_0 c \; \alpha^{ik}(x) \; B_k \, ,$$

$$\frac{H^i}{c} = \epsilon_0 \; \beta^{ik}(x) \; E_k + \epsilon_0 c \; (\mu^{-1})^{ik}(x) \; B_k \, . \qquad (1.6.4a)$$

Уравнения (1.6.4a) можно переписать в более симметричном виде:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik}(x)\ E_k + \epsilon_0 c\ \alpha^{ik}(x)\ B_k\ ,$$

$$H^i = \epsilon_0 c\ \beta^{ik}(x)\ E_k + \mu_0^{-1}\ (\mu^{-1})^{ik}(x)\ B_k\ . \tag{1.6.4b}$$

Здесь введены четыре безразмерные (3×3)-матрицы

$$\epsilon^{ik}(x), \quad \alpha^{ik}(x), \ \ \beta^{ik}(x), \ \ (\mu^{-1})^{ik}(x)\ .$$

Поскольку эти четыре тензора являются функциями 10-компонентного ковариантного метрического тензора $g^{\alpha\beta}(x)$, то они не независимы.

Найдем явный вид первого из уравнений (1.6.4b). Поскольку

$$D^i = \epsilon_0\ g^{i\alpha} g^{0\beta} F_{\alpha\beta} = \epsilon_0 (-g^{i0} g^{0j} F_{j0} + g^{ij} g^{00} F_{j0} + g^{ij} g^{0l} F_{jl})\ ,$$

то

$$D^i = \epsilon_0\ (\ g^{00} g^{ik} - g^{i0} g^{k0}\ )\ E_k + \epsilon_0 c\ (-\ g^{ij} g^{0l}\ \epsilon_{jlk})\ B_k\ . \tag{1.6.5}$$

Обращаемся ко второму уравнению связи. Поскольку

$$F^{ij} = \epsilon_0 (g^{i\alpha} g^{j\beta} F_{\alpha\beta}) = -\epsilon_0 g^{0i} g^{jk} F_{k0} + \epsilon_0 g^{ik} g^{j0} F_{k0} + \epsilon_0 g^{ik} g^{jl} F_{kl}\ ,$$

то

$$F^{ij} = \epsilon_0\ (g^{ni} g^{j0} - g^{nj} g^{i0})\ F_{n0} + \epsilon_0\ g^{ik} g^{lj}\ F_{kl}\ .$$

Отсюда, домножая на $(-\frac{1}{2}\ \epsilon_{mij})$, получаем

$$H^m = -\epsilon_0 c\ \frac{1}{2} \epsilon_{mij}\ (g^{ni} g^{j0} - g^{nj} g^{i0})\ E_n + \frac{1}{\mu_0}\ \frac{1}{2}\ \epsilon_{mij}\ g^{ik} g^{lj}\ \epsilon_{kln}\ B_n\ . \tag{1.6.6}$$

Таким образом, из (1.6.5), (1.6.6) следуют выражения для четырех тензоров:

$$\epsilon^{ik}(x) = g^{00}(x)\ g^{ik}(x) - g^{0i}(x)\ g^{0k}(x)\ ,$$

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = \frac{1}{2}\ \epsilon_{imn}\ g^{ml}(x) g^{nj}(x)\ \epsilon_{ljk}\ ,$$

$$\alpha^{ik}(x) = +g^{ij}(x)\ g^{0l}(x)\ \epsilon_{ljk}\ , \qquad \beta^{ik}(x) = -\ g^{0j}(x)\ \epsilon_{jil}\ g^{lk}(x)\ . \tag{1.6.7}$$

Напоминаем, что компоненты метрического тензора – безразмерные величины. Очевидно, что тензор $\epsilon^{ik}(x)$ симметричен; легко убедиться, что и тензор $\mu^{ik}(x)$ также симметричен. Действительно,

$$(\mu^{-1})^{ki}(x) = \frac{1}{2}\ \epsilon_{kmn}\ g^{ml}\ (x) g^{nj}(x)\ \epsilon_{lji}\ .$$

Совершая замены в немых индексах суммирования $m \leftrightarrow j$ и $n \leftrightarrow l$, получаем

$$(\mu^{-1})^{ki}(x) = \frac{1}{2}\ \epsilon_{kjl}\ g^{jn}(x)\ \ g^{lm}(x)\ \epsilon_{nmi} = \ \epsilon_{imn} g^{lm}(x)\ \ g^{jn}(x) \epsilon_{ljk} = \mu^{ik}(x)\ .$$

Аналогично легко можно убедиться, что выполняется равенство $\beta^{ki}(x) = +\alpha^{ik}$. Действительно,

$$\beta^{ki} = -g^{0j}(x)\ \epsilon_{jkl}\ g^{li}(x) = g^{il}(x)\ g^{0j}(x)\epsilon_{jlk} = +\alpha^{ik}\ .$$

Таким образом, выполняются равенства

$$\epsilon^{ik}(x) = +\epsilon^{ki}(x)\ , \qquad \mu^{ik}(x) = +(\mu^{-1})^{ki}(x)\ , \qquad \beta^{ki}(x) = -\alpha^{ik}\ ; \quad (1.6.8a)$$

они означают, что задающая линейные материальные уравнения (6×6)-матрица симметрична

$$\left| \begin{array}{c} D^i(x) \\ H^i(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \epsilon_0\ \epsilon^{ik}(x) & \epsilon_0 c\ \alpha^{ik}(x) \\ \epsilon_0 c\ \beta^{ik}(x) & \mu_0^{-1}\ (\mu^{-1})^{ik}(x) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} E_k(x) \\ B_k(x) \end{array} \right| . \quad (1.6.8b)$$

Вводя (3+1)-расщепление в метрическом тензоре $g^{\alpha\beta}(x)$ и специальное алгебраическое обозначение для матрицы, дуальной к вектору:

$$g^{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cc} g^{00} & (g^{0i} = \bar{g}) \\ (g^{i0} = \bar{g}) & (g^{ik}) = g \end{array} \right| , \qquad (\bar{g}^{\times})_{jk}(x) \equiv g^{0l}(x)\epsilon_{ljk}\ , \qquad (1.6.9)$$

тензоры $(\epsilon^{ik}), (\alpha^{ik}), (\beta^{ik})$ представляем в виде

$$\epsilon(x) = g^{00}(x)g(x) - \bar{g}(x)\cdot\bar{g}(x)\ ,$$

$$\alpha(x) = g(x)\ \bar{g}^{\times}(x)\ , \qquad \beta(x) = -\bar{g}^{\times}(x)\ g(x)\ . \qquad (1.6.10)$$

Для тензора $(\mu^{-1})^{ik}(x)$ также можно получить более простое представление. Действительно,

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{imn}\ g^{ml}\ g^{nj}\ \epsilon_{ljk} = -\ \frac{1}{2}\ (\epsilon_{imn}\ g^{nj})\ \ (\epsilon_{kjl}\ g^{lm})\ ,$$

т. е.

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = -\frac{1}{2}\ \mathrm{Sp}\ [\ \tau_i g(x)\ \tau_k g(x)\ ]\ , \qquad (1.6.11)$$

где

$$(\tau_i)_{mn} = \epsilon_{imn}\ , \qquad (\tau_k)_{jl} = \epsilon_{kjl}\ .$$

Таким образом, генерируемые геометрией риманова пространства уравнения связи для электромагнитных векторов могут быть представлены в следующем виде:

$$D^i = \epsilon_0\ \epsilon^{ik}(x)\ E_k + \epsilon_0 c\ \alpha^{ik}(x)\ B_k\ ,$$

$$H^i = \epsilon_0 c\ \beta^{ik}(x)\ E_k + \mu_0^{-1}\ (\mu^{-1})^{ik}(x)\ B_k\ ,$$

$$\epsilon(x) = g^{00}(x)g(x) - \bar{g}(x)\cdot\bar{g}(x)\ , \qquad \tilde{\epsilon}(x) = +\epsilon(x)\ ,$$

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ [\ \tau_i g(x)\ \tau_k g(x)\ ], \qquad \tilde{\mu}(x) = +\mu(x)\ , \qquad (1.6.12)$$

$$\alpha(x) = g(x)\bar{g}^{\times}(x) \ , \qquad \beta(x) = -\bar{g}^{\times}(x)\ g(x) \ , \qquad \tilde{\beta}(x) = +\alpha(x) \ .$$

Если метрический тензор имеет (релятивистски диагональную) структуру, то уравнения (1.6.12) упрощаются:

$$g^{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{llll} g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right| ,$$

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik}(x) E_k \ , \qquad H^i = \mu_0^{-} (\mu^{-1})^{ik}(x) B_k \ ,$$

$$[\epsilon^{ik}(x)] = g^{00}(x) g(x) \ , \qquad [\mu^{ik}(x)] = -\frac{1}{2} \text{Sp} \ [\ \tau_i g(x) \tau_k g(x)\ ] \ . \qquad (1.6.13)$$

Отвечающие формулам (1.6.13) явные выражения для тензоров электрической $\epsilon^{ik}(x)$ и магнитной проницаемости $(\mu^{-1})^{ik}(x)$ имеют вид

$$(\epsilon^{ik}) = g^{00} \left| \begin{array}{lll} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right| , \qquad \mu^{-1} = \left| \begin{array}{lll} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{array} \right| , \qquad (1.6.14a)$$

где $G^{ik}(x)$ обозначает алгебраическое дополнение к элементу $g^{ik}(x)$:

$$G^{ik}(x) = (-1)^{j+k} M^{ik}(x) =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{32}) & (g^{31}g^{23} - g^{21}g^{33}) & (g^{21}g^{32} - g^{22}g^{31}) \\ (g^{32}g^{13} - g^{33}g^{12}) & (g^{33}g^{11} - g^{31}g^{13}) & (g^{31}g^{12} - g^{32}g^{11}) \\ (g^{12}g^{23} - g^{13}g^{22}) & (g^{13}g^{21} - g^{11}g^{23}) & (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) \end{array} \right| . \qquad (1.6.14b)$$

С учетом равенства

$$\epsilon(x)\mu^{-1}(x) = \frac{-g^{00}g_{00}}{\det g_{ik}} \left| \begin{array}{lll} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right| \times$$

$$\times \left| \begin{array}{lll} (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{32}) & (g^{31}g^{23} - g^{21}g^{33}) & (g^{21}g^{32} - g^{22}g^{31}) \\ (g^{32}g^{13} - g^{33}g^{12}) & (g^{33}g^{11} - g^{31}g^{13}) & (g^{31}g^{12} - g^{32}g^{11}) \\ (g^{12}g^{23} - g^{13}g^{22}) & (g^{13}g^{21} - g^{11}g^{23}) & (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) \end{array} \right| = -I$$

заключаем, что для всех метрик с $g_{0k}(x) = 0$ (см. обсуждение свойств таких метрик в связи с реализуемостью соответствующих систем отсчета в [5]) эффективные тензоры электрической и магнитной проницаемости равны друг другу (присутствующий в формуле знак "минус" может быть легко устранен переобозначением)

$$\mathbf{D} = -\epsilon_0\ \epsilon(x)\ \mathbf{E} \ , \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mu(x) \mathbf{H} \ , \qquad \mu(x) = -\epsilon(x) \ ,$$

$$(\epsilon^{ik})(x) = \sqrt{-g(x)}\ g^{00}(x) \left| \begin{array}{lll} g^{11}(x) & g^{12}(x) & g^{13}(x) \\ g^{21}(x) & g^{22}(x) & g^{23}(x) \\ g^{31}(x) & g^{32}(x) & g^{33}(x) \end{array} \right| . \qquad (1.6.14c)$$

В случае произвольной (недиагональной) метрики риманова пространства выражения для тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon^{ik}(x)$ модифицируются очевидным образом (используем обозначение $g^{i0}(x) = g^{i}(x)$):

$$[\ \epsilon^{ik}(x)\ ] = g^{00} \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g^1\, g^1 & g^1\, g^2 & g^1\, g^3 \\ g^2\, g^1 & g^2\, g^2 & g^2\, g^3 \\ g^3\, g^1 & g^3\, g^2 & g^3\, g^3 \end{vmatrix} ; \qquad (1.6.15)$$

тензор магнитной проницаемости остается прежним. Для дополнительных тензоров $\alpha = -\tilde{\beta}$ находим следующее явное представление:

$$\alpha^{ik}(x) = +g^{ij}(x)\ g^{0l}(x)\ \epsilon_{ljk} \implies$$

$$\alpha(x) = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & +g^3 & -g^2 \\ -g^3 & 0 & +g^1 \\ +g^2 & -g^1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-g^{12}g^3 + g^{13}g^2) & (g^{11}g^3 - g^{13}g^1) & (-g^{11}g^2 + g^{12}g^1) \\ (-g^{22}g^3 + g^{23}g^2) & (g^{21}g^3 - g^{23}g^1) & (-g^{21}g^2 + g^{22}g^1) \\ (-g^{32}g^3 + g^{33}g^2) & (g^{31}g^3 - g^{33}g^1) & (-g^{31}g^2 + g^{32}g^1) \end{vmatrix} , \qquad (1.6.16a)$$

$$\beta^{ik}(x) = -g^{0j}(x)\ \epsilon_{jil}\ g^{lk}(x) \implies$$

$$\alpha(x) = \begin{vmatrix} 0 & -g^3 & +g^2 \\ +g^3 & 0 & -g^1 \\ -g^2 & +g^1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-g^{12}g^3 + g^{13}g^2) & (-g^{22}g^3 + g^{23}g^2) & (-g^{32}g^3 + g^{33}g^2) \\ (g^{11}g^3 - g^{13}g^1) & (g^{21}g^3 - g^{23}g^1) & (g^{31}g^3 - g^{33}g^1) \\ (-g^{11}g^2 + g^{12}g^1) & (-g^{21}g^2 + g^{22}g^1) & (-g^{31}g^2 + g^{32}g^1) \end{vmatrix} . \qquad (1.6.16b)$$

Таким образом, материальные уравнения, генерируемые римановой геометрией, имеют вид (здесь следует вспомнить о дополнительном факторе $\sqrt{g(x)}$)

$$D^i = \epsilon_0\ \epsilon^{ik}(x)\ E_k + \epsilon_0\ c\ \alpha^{ik}(x)\ B_k\ ,$$

$$H^i = \epsilon_0 c\ \beta^{ik}(x)\ E_k + \mu_0^{-1}(\mu^{-1})^{ik}(x)\ B_k\ ,$$

$$\epsilon(x) = \sqrt{-g(x)}\ [\ g^{00}(x)g(x) - \bar{g}(x) \cdot \bar{g}(x)\ ]\ , \qquad \tilde{\epsilon}(x) = +\epsilon(x)\ ,$$

$$\mu^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g(x)}\ \mathrm{Sp}\ [\ \tau_i g(x)\ \tau_k g(x)\ ], \qquad \tilde{\mu}(x) = +\mu(x)\ ,$$

$$\alpha(x) = \sqrt{-g(x)}\bar{g}^{\times}(x)\ ,\ \beta(x) = -\sqrt{-g(x)}\bar{g}^{\times}(x)g(x)\ ,\ \tilde{\beta}(x) = +\alpha(x)\ . \qquad (1.6.17)$$

Рассмотрим самый простой случай чисто диагонального метрического тензора:

$$[g^{\alpha\beta}(x)] = \left| \begin{array}{cccc} g^{00}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{33}(x) \end{array} \right| ; \qquad (1.6.18)$$

тогда

$$D^i = \epsilon_0 \, \epsilon^{ik}(x) \, E_k \; , \qquad H^i = \mu_0^{-1} \, (\mu^{-1})^{ik}(x) \, B_k \; ,$$

$$(\epsilon^{ik}) = \sqrt{-g(x)} \; g^{00}(x) \left| \begin{array}{ccc} g^{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & g^{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & g^{33}(x) \end{array} \right| ,$$

$$((\mu^{-1})^{ik}) = \sqrt{-g(x)} \left| \begin{array}{ccc} G^{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & G^{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & G^{33}(x) \end{array} \right| ,$$

$$G^{ik}(x) = \left| \begin{array}{ccc} g^{22}(x)g^{33}(x) & 0 & 0 \\ 0 & g^{33}(x)g^{11}(x) & 0 \\ 0 & 0 & g^{11}(x)g^{22}(x) \end{array} \right| . \qquad (1.6.19)$$

Введем специальные обозначения для диагональных элементов:

$$[\; \epsilon^{ik}(x) \;] = \mathrm{diag}\, [\; \epsilon_1(x), \; \epsilon_2(x), \; \epsilon_3(x) \;] \; ,$$

$$[\; (\mu^{-1})^{ik}(x) \;] = \mathrm{diag}\, [\; 1/\mu_1(x), \; 1/\mu_2(x), \; 1/\mu_3(x) \;] \; .$$

Из (1.6.19) вытекают следующие условия связи между диагональными элементами тензоров электрической и магнитной проницаемости:

$$\frac{\epsilon_1(x)}{\mu_1(x)} = \frac{\epsilon_2(x)}{\mu_2(x)} = \frac{\epsilon_3(x)}{\mu_3(x)} = -g(x)g^{00}(x)g^{11}(x)g^{22}(x)g^{33}(x) = -1 \; , \quad (1.6.20a)$$

что эквивалентно трем тождествам

$$\mu_i(x) = -\epsilon_i(x) \; , \qquad i = 1, 2, 3 \; . \qquad (1.6.20b)$$

1.7 (3+1)-Расщепление метрического тензора и риманова геометрия

Исходим из тождества $g^{\alpha\beta} g_{\beta\rho} = \delta^{\alpha}_{\rho}$; оно может быть расщеплено на четыре равенства (используем обозначения $g^{0i} = g^i, g_{0i} = g_i$):

$$\delta^i_j = g^i g_j + g^{ik} g_{kj} \; , \qquad (1.7.1a)$$

$$1 = g^{00} g_{00} + g^i g_i \; , \qquad (1.7.1b)$$

$$0 = g^{00} g_j + g^l g_{lj} \ , \tag{1.7.1c}$$
$$0 = g^j g_{00} + g^{jl} g_l \ . \tag{1.7.1d}$$

Выразим из (1.7.1c) величину $g_j(x)$:

$$g_j = -\frac{g_{jl}\ g^l}{g^{00}} \tag{1.7.2a}$$

и подставим в уравнение (1.7.1a):

$$\delta^i_j = -g^i\ \frac{g^l g_{lj}}{g^{00}} + g^{il} g_{lj} \implies \delta^i_j = (\ g^{il} - \frac{g^i g^l}{g^{00}}\ )\ g_{lj} \ .$$

Введем обозначение:

$$\gamma^{il}(x) \equiv g^{il} - g^i\ g^l / g^{00} \ , \tag{1.7.2b}$$

тогда предыдущее равенство записывается как

$$\gamma^{il}(x)\ g_{lj}(x) = \delta^i_j \ . \tag{1.7.2c}$$

Другими словами, $\gamma^{il}(x)$ выступает как обратная матрица к трехмерной пространственной части ковариантного метрического тензора $g_{lj}(x)$. Теперь выразим из (1.7.1d) величину $g^i(x)$:

$$g^i = -\frac{g^{il}\ g_l}{g_{00}} \tag{1.7.3a}$$

и подставим в уравнение (1.7.1a):

$$\delta^i_j = -\frac{g^{il}\ g_l}{g_{00}} g_j + g^{il}\ g_{lj} \implies \delta^i_j = g^{il}\ (g_{lj} - \frac{g_l\ g_j}{g_{00}}) \ .$$

Введем обозначение:

$$\gamma_{lj}(x) = g_{lj} - g_l\ g_j / g_{00} \ , \tag{1.7.3b}$$

тогда предыдущее равенство записывается как

$$\delta^i_j = g^{il}(x)\ \gamma_{lj}(x) \ . \tag{1.7.3c}$$

Другими словами, величина $\gamma_{lj}(x)$ выступает как обратная матрица к пространственной части контравариантного метрического тензора $g^{lj}(x)$.

Из (1.7.2) можно получить еще два уравнения связи. Действительно, g_{0i} из (1.7.1c) подставим в (1.7.1b) и из (1.7.1d) величину g^i подставим в уравнение (1.7.1b):

$$\frac{1}{g^{00}}\ g_{ij} g^i g^j = (g^{00} g_{00} - 1) \ , \tag{1.7.4}$$
$$\frac{1}{g_{00}}\ g^{ij} g_i g_j = (g^{00} g_{00} - 1) \ . \tag{1.7.5}$$

1.8 Обращение материальных уравнений

Будем исходить из материальных уравнений:

$$H^{\rho\sigma}(x) = \epsilon_0 \sqrt{-g(x)}\ g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x)\ F_{\alpha\beta}(x) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D^i = \epsilon_0\ \epsilon^{ik}(x)\ E_k + \epsilon_0 c\ \alpha^{ik}(x)\ B_k\ , \\ H^i = \epsilon_0 c\ \beta^{ik}(x)\ E_k + \mu_0^{-1}\ (\mu^{-1})^{ik}(x)\ B_k\ . \end{array} \right. \tag{1.8.1a}$$

Обратим задачу, т. е. найдем соотношения

$$F_{\rho\sigma}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ g_{\rho\alpha}(x) g_{\sigma\beta}(x)\ H^{\alpha\beta}(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = \frac{1}{\epsilon_0}(\epsilon^{-1})_{ik}(x)\ D^k + \frac{1}{\epsilon_0 c}\ A_{ik}(x)\ H^k\ , \\ B_i = \frac{1}{\epsilon_0 c}\ B_{ik}(x)\ D^k + \mu_0\ \mu_{ik}(x)\ H^k\ . \end{array} \right. \tag{1.8.1b}$$

Понятно, что в силу соображений симметрии новых вычислений, дополнительных к сделанным в разделе **1.5**, проводить не нужно. Выражения для тензоров $(\epsilon^{-1})_{ik},\ A_{ik},\ B_{ik},\ \mu_{ik}$ имеют вид

$$(\epsilon^{-1})_{ik}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ g_{00}(x)\ g_{ik}(x) - g_i(x)\ g_k(x)\ ,$$

$$\mu_{ik}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ \epsilon_{imn}\ g_{ml}(x)\ g_{nj}(x)\ \epsilon_{ljk}\ ,$$

$$A_{ik}(x) = + \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ g_{ij}(x)\ g_l(x)\ \epsilon_{ljk}\ ,$$

$$B_{ik}(x) = - \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\ g_j(x)\ \epsilon_{jil}\ g_{lk}(x)\ . \tag{1.8.2}$$

Имеют место свойства симметрии:

$$(\epsilon^{-1})_{ik}(x) = +(\epsilon^{-1})_{ki}(x)\ ,\ \mu_{ik}(x) = +\mu_{ki}(x)\ ,\ B_{ki}(x) = +A_{ik}\ , \tag{1.8.3}$$

т. е. задающая обратные материальные уравнения (6×6)-матрица симметрична. Все остальные формулы из раздела **1.5** имеют свои аналоги (с индексами внизу). В частности, если метрический тензор имеет структуру

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{llll} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \right|\ , \tag{1.8.4a}$$

уравнения связи значительно упрощаются:

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0}\ (\epsilon^{-1})_{ik}(x)\ D^k\ , \qquad B_i = \mu_0\ \mu_{ik}(x)\ H^k\ , \tag{1.8.4b}$$

явные выражения для тензоров $(\epsilon^{-1})_{ik}(x)$ и $\mu_{ik}(x)$ имеют вид

$$(\epsilon^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\, g_{00} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} ,$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} , \qquad (1.8.4c)$$

где $G_{ik}(x)$ обозначает алгебраическое дополнение к элементу $g_{ik}(x)$:

$$G_{ik}(x) = (-1)^{j+k} M_{ik}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} (g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) & (g_{31}g_{23} - g_{21}g_{33}) & (g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31}) \\ (g_{32}g_{13} - g_{33}g_{12}) & (g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) & (g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11}) \\ (g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) & (g_{13}g_{21} - g_{11}g_{23}) & (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \end{vmatrix} . \qquad (1.8.4d)$$

В случае произвольной (недиагональной) метрики риманова пространства выражения для тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon^{ik}(x)$ модифицируются очевидным образом:

$$(\epsilon^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\, g_{00} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \begin{vmatrix} g_1g_1 & g_1g_2 & g_1g_3 \\ g_2g_1 & g_2g_2 & g_2g_3 \\ g_3g_1 & g_3g_2 & g_3g_3 \end{vmatrix} ; \qquad (1.8.5)$$

тензор M_{ik} остается прежним. Для дополнительных тензоров A_{ik}, B_{ik} находим явное представление:

$$A_{ik}(x) = +\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\, g_{ij}(x)\; g_l(x)\; \epsilon_{ljk} \;\Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & +g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & +g_1 \\ +g_2 & -g_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \begin{vmatrix} (-g_{12}g_3 + g_{13}g_2) & (g_{11}g_3 - g_{13}g_1) & (-g_{11}g_2 + g_{12}g_1) \\ (-g_{22}g_3 + g_{23}g_2) & (g_{21}g_3 - g_{23}g_1) & (-g_{21}g_2 + g_{22}g_1) \\ (-g_{32}g_3 + g_{33}g_2) & (g_{31}g_3 - g_{33}g_1) & (-g_{31}g_2 + g_{32}g_1) \end{vmatrix} , \qquad (1.8.6a)$$

$$B_{ik}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\, g_j(x)\; \epsilon_{jil}\; g_{lk}(x) \;\Longrightarrow$$

$$[B_{ik}(x)] = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \begin{vmatrix} 0 & -g_3 & +g_2 \\ +g_3 & 0 & -g_1 \\ -g_2 & +g_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \left| \begin{array}{ccc} (-g_{12}g_3 + g_{13}g_2) & (-g_{22}g_3 + g_{23}g_2) & (-g_{32}g_3 + g_{33}g_2) \\ (g_{11}g_3 - g_{13}g_1) & (g_{21}g_3 - g_{23}g_1) & (g_{31}g_3 - g_{33}g_1) \\ (-g_{11}g_2 + g_{12}g_1) & (-g_{21}g_2 + g_{22}g_1) & (-g_{31}g_2 + g_{32}g_1) \end{array} \right| . \tag{1.8.6b}$$

В общем случае произвольной метрики симметрические 6-мерные матрицы, задающие (прямые и обратные) материальные уравнения

$$\left| \begin{array}{c} D^i(x) \\ H^i(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \epsilon_0 \; \epsilon^{ik}(x) & \epsilon_0 c \; \alpha^{ik}(x) \\ \epsilon_0 c \; \beta^{ik}(x) & \mu_0^{-1} (\mu^{-1})^{ik}(x) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} E_k(x) \\ B_k(x) \end{array} \right| ,$$

$$\left| \begin{array}{c} E_k(x) \\ B_k(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \epsilon_0^{-1} \; (\epsilon^{-1})_{kl}(x) & \epsilon_0^{-1} c^{-1} \; A_{kl}(x) \\ \epsilon_0^{-1} c^{-1} \; B_{kl}(x) & \mu_0 \; \mu_{kl}(x) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} D^l(x) \\ H^l(x) \end{array} \right| , \tag{1.8.7}$$

обязаны подчиняться условию

$$\left| \begin{array}{cc} \epsilon_0 \; \epsilon^{ik}(x) & \epsilon_0 c \; \alpha^{ik}(x) \\ \epsilon_0 c \; \beta^{ik}(x) & \mu_0^{-1} \; (\mu^{-1})^{ik}(x) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \epsilon_0^{-1} \; (\epsilon^{-1})_{kl}(x) & \epsilon_0^{-1} c^{-1} \; A_{kl}(x) \\ \epsilon_0^{-1} c^{-1} \; B_{kl}(x) & \mu_0 \; \mu_{kl}(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \delta_l^k & 0 \\ 0 & \delta_l^k \end{array} \right| , \tag{1.8.8a}$$

т. е.

$$\begin{gathered} \epsilon^{ik}(x) \; (\epsilon^{-1})_{kl}(x) + \alpha^{ik}(x) \; B_{kl}(x) = \delta_l^k \; , \\ \epsilon^{ik}(x) \; A_{kl}(x) + \alpha^{ik}(x) \; \mu_{kl}(x) = 0 \; , \\ \beta^{ik}(x) \; (\epsilon^{-1})_{kl}(x) + (\mu^{-1})^{ik}(x) \; B_{kl}(x) = 0 \; , \\ \beta^{ik}(x) \; A_{kl}(x) + (\mu^{-1})^{ik}(x) \; \mu_{kl}(x) = \delta_l^k \; . \end{gathered} \tag{1.8.8b}$$

Рассмотрим более простой случай квазидиагональной метрики ($g_{0i}(x) = 0$). Имеем

$$\epsilon^{ik}(x) \; (\epsilon^{-1})_{kl}(x) = \delta_l^k \; , \qquad (\mu^{-1})^{ik}(x) \; \mu_{kl}(x) = \delta_l^k \; . \tag{1.8.9a}$$

С учетом

$$\epsilon^{ik}(x) = g^{00}(x) g^{ik}(x) \; , \qquad \epsilon_{kl}^{-1}(x) = g_{00}(x) g_{kl}(x)$$

условие $\epsilon(x) \; \epsilon^{-1}(x) = I$ принимает вид тождества

$$[\; g^{00}(x) g_{00}(x) \;] \; [\; g^{ik}(x) g_{kl}(x) \;] = \delta_k^i \; . \tag{1.8.9b}$$

Если принять во внимание

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{imn} g^{ma}(x) g^{nb}(x) \epsilon_{abk} \; , \; \mu_{kl}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{kps} g_{pc}(x) g_{sd}(x) \epsilon_{cdl} \; ,$$

то

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) \mu_{kl}(x) = \frac{1}{4} \; \epsilon_{imn} \; g^{ma}(x) g^{nb}(x) \; [\; \epsilon_{abk} \epsilon_{kps}] \; g_{pc}(x) g_{sd}(x) \; \epsilon_{cdl}$$

и далее с учетом известного тождества $\epsilon_{abk}\epsilon_{kps} = \delta_{ap}\delta_{bs} - \delta_{as}\delta_{bp}$ приходим к равенству

$$(\mu^{-1})^{ik}(x)\mu_{kl}(x) = \frac{1}{2}\,\epsilon_{imn}\;g^{mp}(x)g^{ns}(x)\;g_{pc}(x)g_{sd}(x)\;\epsilon_{cdl} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\epsilon_{imn}\;\delta^m_c\;\delta^n_d\;\epsilon_{cdl} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{imn}\;\epsilon_{mnl} = \delta^i_l\;. \qquad (1.8.9c)$$

Аналогично могут быть проверены и остальные три тождества.

1.9 Геометрическое моделирование однородной среды

Выберем метрику специального вида

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left|\begin{array}{cccc} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2 \end{array}\right| ,\; g^{\alpha\beta}(x) = \left|\begin{array}{cccc} a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^{-2} \end{array}\right| ,$$

$$\sqrt{-g} = a\;b^3\;, \qquad (1.9.1)$$

где a^2 и b^2 – произвольные (положительные) числовые параметры. Эта метрика генерирует уравнения связи:

$$D^i = \epsilon_0\;\epsilon^{ik}\;E_k\;, \qquad H^i = \mu_0^{-1}\;(\mu^{-1})^{ik}\;B_k\;,$$

$$(\epsilon^{ik}) = \sqrt{-g}g^{00}\left|\begin{array}{ccc} g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} \end{array}\right| = \frac{b}{a}\left|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right| ,$$

$$(\mu^{-1}) = \sqrt{-g}\left|\begin{array}{ccc} G^{11} & 0 & 0 \\ 0 & G^{22} & 0 \\ 0 & 0 & G^{33} \end{array}\right| = \frac{a}{b}\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| , \qquad (1.9.2)$$

или

$$D^i = -\epsilon_0\frac{b}{a}\;E_i\;, \qquad H^i = \mu_0^{-1}\frac{a}{b}\;B_i\;. \qquad (1.9.3)$$

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0\;,$$

$$\partial_t B_1 = \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2\;,\; \partial_t B_2 = \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3\;,\; \partial_t B_3 = \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1\;,$$

$$\partial_i D^i = \rho\;,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}H^3 - \frac{\partial}{\partial x^3}H^2 = J^1 + \frac{\partial}{\partial t}D^1\;,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}H^1 - \frac{\partial}{\partial x^1}H^3 = J^2 + \frac{\partial}{\partial t}D^2\;,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} H^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} H^1 = J^3 + \frac{\partial}{\partial t} D^3 \; .$$

В векторной форме

$$\mathbf{B} = (B_i) \; , \; \mathbf{E} = (-E_i) \; , \; \mathbf{H} = (H^i) \; , \; \mathbf{D} = (D^i) \qquad (1.9.4)$$

они записываются следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \; , \qquad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \; ,$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \; , \qquad \text{rot } \mathbf{D} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \; .$$

При этом уравнения связи

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \frac{a}{b} \; \mathbf{E} \; , \qquad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \frac{b}{a} \; \mathbf{B} \qquad (1.9.5a)$$

должны быть сопоставлены с

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \; \mathbf{E} \; , \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \; \mathbf{B} \; , \qquad (1.9.5b)$$

откуда следует

$$\epsilon = \frac{a}{b} \; , \qquad \mu = \frac{a}{b} \; , \qquad \epsilon = \mu = \frac{a}{b} \qquad (1.9.5c)$$

и соответствующий метрический тензор равен

$$g_{\alpha\beta}(x) = b^2 \begin{vmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; , \qquad \epsilon = \mu \; . \qquad (1.9.5d)$$

1.10 Геометрическое моделирование анизотропной среды

Рассмотрим более общий случай диагонального тензора:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_3^2 \end{vmatrix} \; , \qquad \sqrt{-g} = a \; b_1 b_2 b_3 \; , \qquad (1.10.1)$$

где $a^2, \; b_1^2, \; b_2^2, \; b_3^2$ – произвольные (положительные) числовые параметры. Этот метрический тензор генерирует уравнения связи

$$D^i = \epsilon_0 \; \epsilon^{ik} \; E_k \; , \qquad H^i = \mu_0^{-1} \; (\mu^{-1})^{ik} \; B_k \; ,$$

$$(\epsilon) = a^{-2} \begin{vmatrix} -b_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -b_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -b_3^{-2} \end{vmatrix}, \; (\mu^{-1}) = \begin{vmatrix} b_2^{-2} b_3^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b_3^{-2} b_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & b_1^{-2} b_2^{-2} \end{vmatrix}, \tag{1.10.2}$$

или

$$D^1 = -\frac{\epsilon_0}{a^2 b_1^2}\, E_1 \,, \qquad D^2 = -\frac{\epsilon_0}{a^2 b_2^2}\, E_2 \,, \qquad D^3 = -\frac{\epsilon_0}{a^2 b_3^2}\, E_3 \,,$$

$$H^1 = \frac{1}{\mu_0 \; b_2^2 b_3^2}\, B_1 \,, \qquad H^2 = \frac{1}{\mu_0 \; b_3^2 b_1^2}\, B_2 \,, \qquad H^3 = \frac{1}{\mu_0 \; b_1^2 b_2^2}\, B_3 \,. \tag{1.10.3}$$

Уравнения Максвелла в анизотропной среде в векторной форме записываются как

$$\mathbf{B} = (B_i) \,, \; \mathbf{E} = (-E_i) \,, \; \mathbf{H} = (H^i) \,, \; \mathbf{D} = (D^i) \,, \tag{1.10.4}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0 \,, \qquad \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,,$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = \rho \,, \qquad \mathrm{rot}\, \mathbf{D} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1.10.5}$$

Уравнения связи (1.10.3) должны быть сопоставлены с материальными уравнениями, зпдаваемыми диагональными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости:

$$D^1 = -\epsilon_1\, E_1 \,, \qquad D^2 = -\epsilon_2\, E_2 \,, \qquad D^3 = -\epsilon_3\, E_3 \,,$$

$$H^1 = \frac{1}{\mu_1}\, B_1 \,, \qquad H^2 = \frac{1}{\mu_2}\, B_2 \,, \qquad H^3 = \frac{1}{\mu_3}\, B_3 \,,$$

т. е.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{a^2 b_1^2} \,, \qquad \epsilon_2 = \frac{1}{a^2 b_2^2} \,, \qquad \epsilon_3 = \frac{1}{a^2 b_3^2} \,,$$

$$\mu_1 = b_2^2\, b_3^2 \,, \qquad \mu_2 = b_3^2\, b_1^2 \,, \qquad \mu_3 = b_1^2\, b_2^2 \,. \tag{1.10.6}$$

Из (1.10.6) следуют тождества

$$\frac{\mu_1}{\epsilon_1} = \frac{\mu_2}{\epsilon_2} = \frac{\mu_3}{\epsilon_3} = (a^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2) = -g \;\; ,$$

$$-g = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_2^2}} \,, \qquad \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} = \frac{\epsilon_i}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_2^2}} \;; \tag{1.10.7}$$

они означают пропорциональность тензоров электрической и магнитной проницаемости. Для задания этих двух тензоров можно использовать параметры ϵ, μ, n_i:

$$\epsilon_i = \epsilon\; n_i \,, \qquad \mu_i = \mu\; n_i \,, \qquad \mathbf{n}^2 = 1 \,. \tag{1.10.8}$$

Из (1.10.6), (1.10.7) можно выразить b_i^2 через μ_i:

$$\mu_2\mu_3 = b_1^4\,(b_2^2\,b_3^2) = b_1^4\,\mu_1 \qquad \Longrightarrow \qquad b_1^2 = \sqrt{\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_1}} = \sqrt{\mu}\,\sqrt{\frac{n_2n_3}{n_1}}\,,$$

$$\mu_3\mu_1 = b_2^4\,(b_3^2\,b_1^2) = b_2^4\,\mu_2 \qquad \Longrightarrow \qquad b_2^2 = \sqrt{\frac{\mu_3\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\mu}\,\sqrt{\frac{n_3n_1}{n_2}}\,,$$

$$\mu_1\mu_2 = b_3^4\,(b_1^2\,b_2^2) = b_3^4\,\mu_3 \qquad \Longrightarrow \qquad b_3^2 = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_3}} = \sqrt{\mu}\,\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_3}}\,. \tag{1.10.9}$$

В свою очередь, из

$$a^2\,b_1^2\,b_2^2\,b_3^2 = \frac{\mu}{\epsilon}$$

следует

$$a^2 = \frac{\mu}{\epsilon}\,\frac{1}{b_1^2b_2^2b_3^2} = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3}}\,. \tag{1.10.10}$$

Формулы (1.10.9), (1.10.10) дают решение поставленной задачи: позволяют выразить метрический тензор через параметры $\epsilon, \mu, \mathbf{n}$:

$$g_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left| \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\epsilon\mu}\,\sqrt{\frac{n_2n_3}{n_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\epsilon\mu}\,\sqrt{\frac{n_3n_1}{n_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\epsilon\mu}\,\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_3}} \end{array} \right|, \tag{1.10.11}$$

что является обобщением случая метрики

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left| \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\epsilon\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\epsilon\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\epsilon\mu} \end{array} \right|.$$

1.11 Геометрическое моделирование движущейся однородной среды

Материальные уравнения в движущейся системе отсчета задаются тензором 4-го ранга:

$$\Delta^{abmn} = \frac{\epsilon_0}{\mu}\,[\,g^{am} + (\epsilon\mu - 1)\,u^a u^m\,]\,[\,g^{bn} + (\epsilon\mu - 1)\,u^b u^n\,]\,,$$

$$H^{ab}(x) = \Delta^{abmn}\, F_{mn}\; . \tag{1.11.1}$$

Рассмотрим сначала простой случай специального движения вдоль третьей оси:

$$u^a = (\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, 0, 0, \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}) = (\text{ch}\,\beta,\ 0,\ 0,\ \text{sh}\,\beta)\; .$$

Введем обозначение $(\epsilon\mu - 1) \equiv \gamma$, тогда

$$g^{am}(u) = \left| \begin{array}{cccc} (1 + \gamma\,\text{ch}^2\,\beta) & 0 & 0 & \gamma\,\text{ch}\,\beta\,\text{sh}\,\beta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \gamma\,\text{ch}\,\beta\,\text{sh}\,\beta & 0 & 0 & (-1 + \gamma\,\text{sh}^2\,\beta) \end{array} \right| . \tag{1.11.2}$$

Вычисляем тензор ϵ^{ik}:

$$[\ \epsilon^{ik}(x)\ ] = \frac{1}{\mu}\ [\ g^{00} \left| \begin{array}{ccc} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} g^1\, g^1 & g^1\, g^2 & g^1\, g^3 \\ g^2\, g^1 & g^2\, g^2 & g^2\, g^3 \\ g^3\, g^1 & g^3\, g^2 & g^3\, g^3 \end{array} \right| \ ] =$$

$$= \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} g^{00}g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & g^{00}g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & (g^{00}g^{33} - g^{03}\, g^{03}) \end{array} \right|$$

или

$$[\ \epsilon^{ik}(x)\ ] = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} -(1 + \gamma\,\text{ch}^2\,\beta) & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \gamma\,\text{ch}^2\,\beta) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \gamma) \end{array} \right| . \tag{1.11.3}$$

Для $(\mu^{-1})^{ik}$ имеем

$$(\mu^{-1}) = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{32}) & (g^{31}g^{23} - g^{21}g^{33}) & (g^{21}g^{32} - g^{22}g^{31}) \\ (g^{32}g^{13} - g^{33}g^{12}) & (g^{33}g^{11} - g^{31}g^{13}) & (g^{31}g^{12} - g^{32}g^{11}) \\ (g^{12}g^{23} - g^{13}g^{22}) & (g^{13}g^{21} - g^{11}g^{23}) & (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} -g^{33} & 0 & 0 \\ 0 & -g^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| ,$$

т. е.

$$(\mu^{-1}) = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (1 - \gamma\,\text{sh}^2\,\beta) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \gamma\,\text{sh}^2\,\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| . \tag{1.11.4}$$

Выражение для α^{ik}

$$\alpha^{ik}(x) = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (-g^{12}g^3 + g^{13}g^2) & (g^{11}g^3 - g^{13}g^1) & (-g^{11}g^2 + g^{12}g^1) \\ (-g^{22}g^3 + g^{23}g^2) & (g^{21}g^3 - g^{23}g^1) & (-g^{21}g^2 + g^{22}g^1) \\ (-g^{32}g^3 + g^{33}g^2) & (g^{31}g^3 - g^{33}g^1) & (-g^{31}g^2 + g^{32}g^1) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & g^{11}g^{03} & 0 \\ -g^{22}g^{03} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 \\ +\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \tag{1.11.5}$$

Выражение для β^{ik}

$$\beta^{ik}(x) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} (-g^{12}g^3 + g^{13}g^2) & (-g^{22}g^3 + g^{23}g^2) & (-g^{32}g^3 + g^{33}g^2) \\ (g^{11}g^3 - g^{13}g^1) & (g^{21}g^3 - g^{23}g^1) & (g^{31}g^3 - g^{33}g^1) \\ (-g^{11}g^2 + g^{12}g^1) & (-g^{21}g^2 + g^{22}g^1) & (-g^{31}g^2 + g^{32}g^1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -g^{22}g^3 & 0 \\ g^{11}g^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & +\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 \\ -\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \tag{1.11.6}$$

Таким образом, материальные уравнения следующие:

$$\begin{vmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon_0}{\mu} \begin{vmatrix} -(1+\gamma \text{ ch}^2\beta) & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\gamma \text{ ch}^2\beta) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\gamma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\epsilon_0 c}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 \\ +\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{vmatrix} = + \frac{\epsilon_0 c}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & +\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 \\ -\gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_0 \mu} \begin{vmatrix} (1-\gamma \text{ sh}^2 \beta) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\gamma \text{ sh}^2 \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}$$

или

$$D^1 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} \, (1+\gamma \text{ ch}^2\beta) \, E_1 - \frac{\epsilon_0 c}{\mu} \, \gamma \text{ ch } \beta \text{ sh}\beta \, B_2 \, ,$$

$$D^2 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} \, (1+\gamma \text{ ch}^2\beta) \, E_2 + \frac{\epsilon_0 c}{\mu} \, \gamma \text{ ch } \beta \text{ sh}\beta \, B_1 \, ,$$

$$D^3 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} \, (1+\gamma) \, E_3 \, ,$$

$$H^1 = \frac{\epsilon_0 c}{\mu} \, \gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta \, E_2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \, (1-\gamma \text{ sh}^2 \beta) B_1 \, ,$$

$$H^2 = -\frac{\epsilon_0 c}{\mu} \, \gamma \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta \, E_1 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \, (1-\gamma \text{ sh}^2 \beta) \, B_2 \, ,$$

$$H^3 = \frac{1}{\mu_0 \mu} \; B_3 \; .$$

Учитывая формулы

$$(1 + \gamma \; \text{ch}^2 \beta) = \epsilon \mu \; \text{ch}^2 \beta - \text{sh}^2 \beta \; ,$$

$$\gamma \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta = (\epsilon \mu - 1) \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta \; ,$$

$$(1 - \gamma \; \text{sh}^2 \; \beta) = \text{ch}^2 \beta - \epsilon \mu \; \text{sh}^2 \beta \; ,$$

их можно представить в виде

$$D^1 = -\epsilon_0 \; (\epsilon \; \text{ch}^2 \beta - \mu^{-1} \text{sh}^2 \beta) \; E_1 - \epsilon_0 c \; (\epsilon - \mu^{-1}) \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta \; B_2 \; ,$$

$$D^2 = -\epsilon_0 \; (\epsilon \; \text{ch}^2 \beta - \mu^{-1} \text{sh}^2 \beta) \; E_2 + \epsilon_0 c \; (\epsilon - \mu^{-1}) \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta \; B_1 \; ,$$

$$D^3 = -\epsilon_0 \epsilon \; E_3 \; ,$$

$$H^1 = \epsilon_0 c \; (\epsilon - \mu^{-1}) \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta \; E_2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \; (\text{ch}^2 \beta - \epsilon \mu \; \text{sh}^2 \beta) B_1 \; ,$$

$$H^2 = -\epsilon_0 c \; (\epsilon - \mu^{-1}) \; \text{ch} \; \beta \; \text{sh} \; \beta \; E_1 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \; (\text{ch}^2 \beta - \epsilon \mu \; \text{sh}^2 \beta) \; B_2 \; ,$$

$$H^3 = \frac{1}{\mu_0 \mu} \; B_3 \; . \qquad (1.11.7)$$

Можно вернуться к переменной – скорости:

$$\text{ch} \; \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \qquad \text{sh} \; \beta = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}}, \qquad V = v/c \; ,$$

тогда

$$D^1 = -\epsilon_0 \; \frac{\epsilon \; - \mu^{-1} V^2}{1 - V^2} \; E_1 - \epsilon_0 c \; \frac{(\epsilon - \mu^{-1}) \; V}{1 - V^2} \; B_2 \; ,$$

$$D^2 = -\epsilon_0 \; \frac{\epsilon \; - \mu^{-1} V^2}{1 - V^2} \; E_2 + \epsilon_0 c \; \frac{(\epsilon - \mu^{-1}) \; V}{1 - V^2} \; B_1 \; ,$$

$$D^3 = -\epsilon_0 \epsilon \; E_3 \; , \qquad (1.11.8a)$$

$$H^1 = \epsilon_0 c \; \frac{(\epsilon - \mu^{-1}) V}{1 - V^2} \; E_2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \; \frac{1 - \epsilon \mu \; V^2}{1 - V^2} B_1 \; ,$$

$$H^2 = -\epsilon_0 c \; \frac{(\epsilon - \mu^{-1}) \; V}{1 - V^2} \; E_1 + \frac{1}{\mu_0 \mu} \; \frac{1 - \epsilon \mu \; V^2}{1 - V^2} \; B_2 \; ,$$

$$H^3 = \frac{1}{\mu_0 \mu} \; B_3 \; . \qquad (1.11.8b)$$

Результат легко может быть обобщен на случай произвольной скорости системы отсчета:

$$\Delta^{abmn} = \frac{\epsilon_0}{\mu} \; [\; g^{am} + (\epsilon \mu - 1) \; u^a u^m \;] \; [\; g^{bn} + (\epsilon \mu - 1) \; u^b u^n \;] \; ,$$

$$u^a = (\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}) \;, \qquad (1.11.9)$$

т. е.

$$g^{am}(u) = \left| \begin{array}{cccc} (1+\gamma\; u^0u^0) & \gamma\; u^0u^1 & \gamma\; u^0u^2 & \gamma\; u^0u^3 \\ \gamma\; u^0u^1 & (-1+\gamma\; u^1u^1) & \gamma\; u^1u^2 & \gamma\; u^1u^3 \\ \gamma\; u^0u^2 & \gamma\; u^2u^1 & (-1+\gamma\; u^2u^2) & \gamma\; u^2u^3 \\ \gamma\; u^0u^3 & \gamma\; u^3u^1 & \gamma\; u^0u^1 & (-1+\gamma\; u^3u^2) \end{array} \right| . \qquad (1.11.10)$$

Вычисляем тензор ϵ^{ik}:

$$[\; \epsilon^{ik}(x)\;] = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (g^{00}g^{11}-g^{01}g^{01}) & (g^{00}g^{12}-g^{01}g^{02}) & (g^{00}g^{13}-g^{01}g^{03}) \\ (g^{00}g^{21}-g^{02}g^{01}) & (g^{00}g^{22}-g^{02}g^{02}) & (g^{00}g^{23}-g^{02}g^{03}) \\ (g^{00}g^{31}-g^{03}g^{01}) & (g^{00}g^{32}-g^{03}g^{02}) & (g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03}) \end{array} \right| \;;$$

шесть независимых элементов равны

$$(g^{00}g^{11}-g^{01}g^{01}) = -1 + \gamma\; u^1u^1 - \gamma\; u^0u^0 \;,$$

$$(g^{00}g^{22}-g^{02}g^{02}) = -1 + \gamma\; u^2u^2 - \gamma\; u^0u^0 \;,$$

$$(g^{00}g^{33}-g^{03}g^{03}) = -1 + \gamma\; u^3u^3 - \gamma\; u^0u^0 \;,$$

$$(g^{00}g^{12}-g^{01}g^{02}) = (1+\gamma\; u^0u^0)\gamma\; u^1u^2 - \gamma\; u^0u^1\gamma\; u^0u^2 = \gamma\; u^1u^2 \;,$$

$$(g^{00}g^{13}-g^{01}g^{03}) = (1+\gamma\; u^0u^0)\gamma\; u^1u^3 - \gamma\; u^0u^1\gamma\; u^0u^3 = \gamma\; u^1u^3 \;,$$

$$(g^{00}g^{23}-g^{02}g^{03}) = (1+\gamma\; u^0u^0)\gamma\; u^2u^3 - \gamma\; u^0u^2\gamma\; u^0u^3 = \gamma\; u^2u^3 \;,$$

следовательно,

$$\epsilon^{ik} = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} -1+\gamma u^1u^1 - \gamma u^0u^0 & \gamma u^1u^2 & \gamma u^1u^3 \\ \gamma u^1u^2 & -1+\gamma u^2u^2 - \gamma u^0u^0 & \gamma u^2u^3 \\ \gamma u^3u^1 & \gamma u^3u^2 & -1+\gamma u^3u^3 - \gamma u^0u^0 \end{array} \right| . \qquad (1.11.11)$$

Для $(\mu^{-1})^{ik}(u)$ имеем

$$(\mu^{-1}) = \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (g^{22}g^{33}-g^{23}g^{32}) & (g^{31}g^{23}-g^{21}g^{33}) & (g^{21}g^{32}-g^{22}g^{31}) \\ (g^{32}g^{13}-g^{33}g^{12}) & (g^{33}g^{11}-g^{31}g^{13}) & (g^{31}g^{12}-g^{32}g^{11}) \\ (g^{12}g^{23}-g^{13}g^{22}) & (g^{13}g^{21}-g^{11}g^{23}) & (g^{11}g^{22}-g^{12}g^{21}) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\mu} \left| \begin{array}{ccc} (1-\gamma\; u^2u^2 - \gamma\; u^3u^3) & \gamma\; u^1u^2 & \gamma\; u^1u^3 \\ \gamma u^1u^2 & (1-\gamma u^3u^3 - \gamma u^1u^1) & \gamma u^2u^3 \\ \gamma u^3u^1 & \gamma u^3u^2 & (1-\gamma u^1u^1 - \gamma u^2u^2) \end{array} \right| . \qquad (1.11.12)$$

Для $\alpha^{ik}(u)$ и $\beta^{ik}(u)$ находим

$$\alpha^{ik}(u) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -\gamma u^0 u^3 & +\gamma u^0 u^2 \\ +\gamma u^0 u^3 & 0 & -\gamma u^0 u^1 \\ -\gamma u^0 u^2 & +\gamma u^0 u^1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.11.13}$$

$$\beta^{ik}(u) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & +\gamma u^0 u^3 & -\gamma u^0 u^2 \\ -\gamma u^0 u^3 & 0 & +\gamma u^0 u^1 \\ +\gamma u^0 u^2 & -\gamma u^0 u^1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.11.14}$$

Соберем формулы вместе:

$$\epsilon^{ik} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} -1 + \gamma u^1 u^1 - \gamma u^0 u^0 & \gamma u^1 u^2 & \gamma u^1 u^3 \\ \gamma u^1 u^2 & -1 + \gamma u^2 u^2 - \gamma u^0 u^0 & \gamma u^2 u^3 \\ \gamma u^3 u^1 & \gamma u^3 u^2 & -1 + \gamma u^3 u^3 - \gamma u^0 u^0 \end{vmatrix},$$

$$(\mu^{-1})^{ik} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 1 - \gamma u^2 u^2 - \gamma u^3 u^3 & \gamma u^1 u^2 & \gamma u^1 u^3 \\ \gamma u^1 u^2 & 1 - \gamma u^3 u^3 - \gamma u^1 u^1 & \gamma u^2 u^3 \\ \gamma u^3 u^1 & \gamma u^3 u^2 & 1 - \gamma u^1 u^1 - \gamma u^2 u^2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha^{ik} = -\beta^{ik} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -\gamma u^0 u^3 & +\gamma u^0 u^2 \\ +\gamma u^0 u^3 & 0 & -\gamma u^0 u^1 \\ -\gamma u^0 u^2 & +\gamma u^0 u^1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.11.15}$$

Получим трехмерную форму уравнений связи. Рассматриваем сначала вектор D^i, после очевидной перегруппировки слагаемых получаем

$$D^1 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} E_1 + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu} [-u^0 u^0 E_1 + (u^1 E_1 + u^2 E_2 + u^3 E_3)\, u^1] +$$
$$+ \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} u^0 (u^2 B_3 - u^3 B_2) ,$$
$$D^2 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} E_2 + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu} [-u^0 u^0 E_2 + (u^1 E_1 + u^2 E_2 + u^3 E_3)\, u^2] +$$
$$+ \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} u^0 (u^3 B_1 - u^1 B_3) ,$$
$$D^3 = -\frac{\epsilon_0}{\mu} E_3 + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu} [-u^0 u^0 E_3 + (u^1 E_1 + u^2 E_2 + u^3 E_3)\, u^3] +$$
$$+ \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} u^0 (u^1 B_2 - u^2 B_1) .$$

Используя обозначения

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \qquad u^i = \frac{V^i}{\sqrt{1 - V^2}} ,$$

предыдущие соотношения переписываем в векторной форме так:

$$\mathbf{D} = +\frac{\epsilon_0}{\mu} \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 \gamma}{\mu} \; \frac{\mathbf{E} - (\mathbf{V}\mathbf{E})\, \mathbf{V}}{1 - V^2} + \frac{\epsilon_0 c \gamma}{\mu} \, \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{1 - V^2} . \tag{1.11.16a}$$

Теперь аналогичное преобразование следует выполнить с тремя другими материальными уравнениями (для векторов H^i). После необходимых вычислений получаем соотношение в векторной форме:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu}\,\mathbf{B} + \frac{\gamma}{\mu_0 \mu}\frac{\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}))}{1-V^2} + \frac{\epsilon_0 c\,\gamma}{\mu}\,\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{E}}{1-V^2}\;. \qquad (1.11.16b)$$

Соотношения (1.11.16a), (1.11.16b) дают трехмерную векторную форму представления материальных уравнений в среде, движущейся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью $\mathbf{V}$. Эти формулы в явном виде были получены впервые Минковским [58]. Материальные уравнения Минковского для движущейся однородной среды эффективно совпадает с материальными уравнениями анизотропной покоящейся среды.

1.12 Материальные уравнения, генерируемые геометрией пространства постоянной положительной кривизны

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны находит применение во многих физических проблемах. Простейшая реализация этой геометрии дается 3-мерной сферой в 4-мерном евклидовом пространстве (пространстве параметров унитарной группы $SU(2)$):

$$W_4^2 + W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = R^2\,, \qquad w_1 = \frac{W_1}{R} \quad \text{и т. д.}\,; \qquad (1.12.1a)$$

R – радиус кривизны. Эти четыре координаты связаны с гиперсферическими координатами формулами

$$w_4 = \cos\chi,\; w_i = \sin\chi\; n_i\;,\; n_i = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \sin\theta)\;. \qquad (1.12.1b)$$

Часто используются конформно-плоские координаты

$$y^i = \frac{2w_i}{1+w_4} = 2\,\mathrm{tg}\,\chi/2\; n_i\;,$$

$$dl^2 = R^2\,(1+\frac{y^2}{4})^{-2}\,[dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2\,] \qquad (1.12.1c)$$

и квазидекартовые координаты

$$x^i = \frac{y^i}{1-y^2/4} = \mathrm{tg}\,\chi\; n_i = \frac{w_i}{w_4}\;, \qquad \chi\in[0,\pi/2]\;. \qquad (1.12.1d)$$

Метрика в x_i-координатах имеет вид

$$dS^2 = c^2dt^2 - (\frac{\delta_{jk}}{1+x^2} - \frac{x^jx^k}{(1+x^2)^2})\,dx^jdx^j\;,$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{jk} \end{vmatrix}, \; g_{jk} = -(\frac{\delta_{jk}}{1+x^2} - \frac{x^j x^k}{(1+x^2)^2}) \;,$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{kl} \end{vmatrix}, \; g^{kl} = -(1+x^2)(\delta_{kl} + x^k x^l) \;. \qquad (1.12.2a)$$

Вычислим детерминант метрического тензора:

$$\det\,(g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{\det\,(g^{\alpha\beta})}, \;\; \det\,(g^{\alpha\beta}) = -(1+x^2)^3 \;. \qquad (1.12.2b)$$

Находим тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon^{ik}(x)$:

$$\epsilon^{ik}(x) = \sqrt{-g}g^{00}(x)g^{ik}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \begin{vmatrix} 1+x^1x^1 & x^1x^2 & x^1x^3 \\ x^1x^2 & 1+x^2x^2 & x^2x^3 \\ x^3x^1 & x^3x^2 & 1+x^3x^3 \end{vmatrix}. \qquad (1.12.3a)$$

Находим тензор магнитной проницаемости $(\mu^{-1})^{ik}(x)$:

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = \sqrt{1+x^2}\times$$

$$\times \begin{vmatrix} (1+x^2x^2+x^3x^3) & -x^1x^2 & -x^1x^3 \\ -x^2x^1 & (1+x^3x^3+x^1x^1) & -x^2x^3 \\ -x^3x^1 & -x^3x^2 & (1+x^1x^1+x^2x^2) \end{vmatrix}. \qquad (1.12.3b)$$

Легко можно убедиться прямым вычислением, что взятый со знаком "минус" тензор $(-\epsilon^{ik}(x))$ и тензор $(\mu^{-1})^{ik}(x)$ являются обратными друг другу матрицами:

$$-\epsilon^{ik}(x)\;(\mu^{-1})^{kl}(x) = \delta_{ik} \;. \qquad (1.12.4a)$$

Выпишем в явном виде материальные уравнения, генерируемые геометрией пространства Римана:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik} E_k \;, \qquad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k \;, \qquad (1.12.4b)$$

причем две матрицы совпадают:

$$-\epsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \begin{vmatrix} 1+x^1x^1 & x^1x^2 & x^1x^3 \\ x^1x^2 & 1+x^2x^2 & x^2x^3 \\ x^3x^1 & x^3x^2 & 1+x^3x^3 \end{vmatrix} . \qquad (1.12.4c)$$

1.13 Материальные уравнения, генерируемые геометрией пространства Лобачевского

Пространство Лобачевского – 3-мерное пространство постоянной отрицательной кривизны H_3 – также довольно часто применяется в физических задачах. Простейшая реализация этой геометрии достигается на гиперболоиде в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве:

$$W_4^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = R^2 \,, \qquad w_1 = \frac{W_1}{R} \quad \text{и т. д.,} \tag{1.13.1a}$$

где R – радиус кривизны. Эти четыре координаты связаны с квазисферическими соотношениями

$$w_4 = \text{ch}\,\chi \,, \qquad w_i = \text{sh}\,\chi\, n_i \,,$$

$$n_i = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \sin\theta) \,, \quad \chi \in [0, +\infty) \,. \tag{1.13.1b}$$

Часто используются конформно-плоские координаты

$$y^i = \frac{2w_i}{1 + w_4} = 2\;\text{th}\,\chi/2\; n_i \,,$$

$$dl^2 = R^2\,(1 - \frac{y^2}{4})^{-2}\,[dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2\,] \tag{1.13.1c}$$

и квазидекартовые

$$x^i = \frac{y^i}{1 + y^2/4} = \text{th}\,\chi\; n_i = \frac{w_i}{w_4} \,, \qquad \chi \in [0, \pi/2] \tag{1.13.1d}$$

с метрикой

$$dS^2 = c^2 dt^2 - (\frac{\delta_{jk}}{1 - x^2} + \frac{x^j x^k}{(1 - x^2)^2})\; dx^j dx^j \,,$$

$$g_{\alpha\beta} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & g_{jk} \end{array} \right|, \qquad g_{jk} = -(\frac{\delta_{jk}}{1 - x^2} + \frac{x^j x^k}{(1 - x^2)^2}) \,,$$

$$g^{\alpha\beta} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & g^{kl} \end{array} \right|, \qquad g^{kl} = -(1 - x^2)(\delta_{kl} - x^k x^l) \,, \tag{1.13.2a}$$

$$\det\,(g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{\det\,(g^{\alpha\beta})}, \qquad \det\,(g^{\alpha\beta}) = -(1 - x^2)^3 \,,$$

$$\sqrt{-\det\,(g_{\alpha\beta})} = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} \,. \tag{1.13.2b}$$

Вычисляем эффективный диэлектрический тензор $\epsilon^{ik}(x)$:

$$\epsilon^{ik}(x) = \sqrt{-g}\; g^{00}(x) g^{ik}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left| \begin{array}{ccc} 1 - x^1x^1 & -x^1x^2 & -x^1x^3 \\ -x^1x^2 & 1 - x^2x^2 & -x^2x^3 \\ -x^3x^1 & -x^3x^2 & 1 - x^3x^3 \end{array} \right|$$

и эффективный магнитный тензор $(\mu^{-1})^{ik}(x)$:

$$(\mu^{-1})^{ik}(x) = \sqrt{-g} \left| \begin{array}{ccc} (g^{22}g^{33} - g^{23}g^{32}) & (g^{31}g^{23} - g^{21}g^{33}) & (g^{21}g^{32} - g^{22}g^{31}) \\ (g^{32}g^{13} - g^{33}g^{12}) & (g^{33}g^{11} - g^{31}g^{13}) & (g^{31}g^{12} - g^{32}g^{11}) \\ (g^{12}g^{23} - g^{13}g^{22}) & (g^{13}g^{21} - g^{11}g^{23}) & (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{1 - x^2} \left| \begin{array}{ccc} (1 - x^2x^2 - x^3x^3) & x^1x^2 & x^1x^3 \\ x^2x^1 & (1 - x^3x^3 - x^1x^1) & x^2x^3 \\ x^3x^1 & x^3x^2 & (1 - x^1x^1 - x^2x^2) \end{array} \right| .$$

Легко проверяется равенство

$$-\epsilon^{ik}(x)\ (\mu^{-1})^{kl}(x) = \delta_{ik}\ . \qquad (1.13.3a)$$

В явном виде материальные уравнения, генерируемые геометрией пространства Лобачевского, записываются так:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ik} E_k\ , \qquad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k\ , \qquad (1.13.3b)$$

причем две матрицы совпадают:

$$-\epsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left| \begin{array}{ccc} 1 - x^1x^1 & -x^1x^2 & -x^1x^3 \\ -x^1x^2 & 1 - x^2x^2 & -x^2x^3 \\ -x^3x^1 & -x^3x^2 & 1 - x^3x^3 \end{array} \right| . \qquad (1.13.3c)$$

1.14 Влияние геометрии пространства на материальные уравнения в среде

Выше мы исходили из уравнений Максвелла в вакууме

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0\ ,$$

$$\partial_b H^{ba} = j^a\ , \qquad H_{ab} = \epsilon_0\ F_{ab} \qquad (1.14.1)$$

и заменяли их на общековариантные в римановом пространстве

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\ , \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \partial_\beta \sqrt{-g}\ H^{\beta\alpha} = j^\alpha\ . \qquad (1.14.2a)$$

При этом вакуумные материальные уравнения

$$H_{\alpha\beta} = \epsilon_0\ F_{\alpha\beta} \qquad (1.14.2b)$$

из-за присутствия метрического тензора $g^{\rho\alpha}(x)$ приводили к материальным уравнениям эффективной среды:

$$H^{\rho\sigma}(x) = \sqrt{-g}\ g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x)\ \epsilon_0\ F_{\alpha\beta}(x)\ . \qquad (1.14.2c)$$

В качестве первого шага обобщения допустим, что исходим не из вакуумных уравнений Максвелла в пространстве Минковского, а из уравнений Максвелла в пространстве Минковского в однородной изотропной среде:

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \; , \qquad \partial_b H^{ba} = j^a \; , \tag{1.14.3a}$$

$$H_{mn} = \epsilon_0 \epsilon \; \eta_m^{\;\;a} \; \eta_n^{\;\;b} \;\; F_{ab} \; ,$$

$$\eta_m^{\;\;a} = \left| \begin{array}{cccc} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right| \; , \quad k^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \; . \tag{1.14.3b}$$

Обобщение этих уравнений Максвелла на случай риманова пространства выглядит следующим образом:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \; , \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \, \partial_\beta \sqrt{-g} \; H^{\beta\alpha} = j^\alpha \; . \tag{1.14.4a}$$

При этом материальные уравнения для однородной среды

$$H_{\alpha\beta}(x) = \epsilon_0 \epsilon \; \eta_\alpha^{\;\;a} \; \eta_\beta^{\;\;b} \; F_{ab}(x) \; , \qquad \eta_\alpha^{\;\;a} = \left| \begin{array}{cccc} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right| \tag{1.14.4b}$$

приводят к следующим материальным уравнениям:

$$H^{\rho\sigma}(x)(x) = \sqrt{-g} \; g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x) \; H_{\alpha\beta}(x) =$$
$$= \sqrt{-g} \; g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x) \; \epsilon_0 \; \epsilon \; \eta_\alpha^{\;\;a} \; \eta_\beta^{\;\;b} \;\; F_{ab}(x) \; . \tag{1.14.4c}$$

Введем обозначение

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(x) = \epsilon \; \eta_\alpha^{\;\;a} \; \eta_\beta^{\;\;b} \;\; F_{ab}(x) \; ,$$

тогда эффективные материальные уравнения (1.14.4c) примут вид

$$H^{\rho\sigma}(x)(x) = \sqrt{-g} \; g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x) \; \epsilon_0 \; \hat{F}_{\alpha\beta}(x) \; . \tag{1.14.4d}$$

Легко получить представление для этого тензора:

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(x) = \left| \begin{array}{cc} 0 & \epsilon F_{0i} \\ \epsilon F_{i0} & \mu^{-1} F_{ik} \end{array} \right| . \tag{1.14.4e}$$

Поскольку соотношения (1.14.4d) формально совпадают с (1.6.1) с точностью до замены $F_{\alpha\beta}(x) \Longrightarrow \hat{F}_{\alpha\beta}(x)$, то никаких дополнительных к выполненным в разделе **1.6** вычислений проводить не нужно – можно сразу написать новые эффективные материальные уравнения:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon \; \epsilon^{ik}(x) \; E_k + \epsilon_0 \epsilon c \; \alpha^{ik}(x) \; B_k \; ,$$

$$H^i = \epsilon_0 \epsilon c \; \beta^{ik}(x) \; E_k + \frac{1}{\mu_0 \mu} \; (\mu^{-1})^{ik}(x) \; B_k \; . \tag{1.14.5}$$

Это электромагнитные материальные уравнения для однородной среды, модифицированные римановой геометрией пространства-времени.

Легко сделать еще одно обобщение. Пусть исходим из уравнений Максвелла для анизотропной однородной среды с материальными уравнениями

$$D_i = \epsilon_0 \; \epsilon_{(0)kl} E_l \; , \qquad H_i = \frac{1}{\mu_0} \; \mu^{-1}_{(0)kl} B_k \; . \tag{1.14.6a}$$

Они модифицируются римановой геометрией пространства-времени в следующие:

$$D^i = \epsilon_0 \; [\epsilon^{ik}(x) \; \epsilon_{(0)kl}] \;\; E_l + \epsilon_0 c \; [\alpha^{ik}(x) \; \mu_{(0)kl}] \;\; B_l \; ,$$

$$H^i = \epsilon_0 c \; [\beta^{ik}(x) \epsilon_{(0)kl}] \;\; E_l + \frac{1}{\mu_0} \; [(\mu^{-1})^{ik}(x) \mu_{(0)kl}] \;\; B_l \; . \tag{1.14.6b}$$

Остается сделать последний шаг обобщения: пусть исходим из уравнений Максвелла в среде с уравнениями связи между полями, определяемыми тензором 4-го ранга:

$$H_{\alpha\beta}(x) = \epsilon_0 \; \Delta_{\alpha\beta}{}^{ab} \; F_{ab}(x) \tag{1.14.7a}$$

или в 3-мерной записи

$$D_k = \epsilon_0 \epsilon_{(0)kl} E_l + c \epsilon_0 \alpha_{(0)kl} B_l \; , \qquad \frac{H_k}{c} = \epsilon_0 \; \beta_{(0)kl} E_l + c \epsilon_0 \mu^{-1}_{(0)kl} B_l \; .$$

Дальше будем использовать символическое представление:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \alpha_{(0)} \mathbf{B} \; ,$$

$$\frac{\mathbf{H}}{c} = \epsilon_0 \; \beta_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \mu^{-1}_{(0)} \mathbf{B} \; . \tag{1.14.7b}$$

Эти уравнения связи модифицируются римановой геометрией пространства в

$$H^{\rho\sigma}(x)(x) = \sqrt{-g} \; g^{\rho\alpha}(x) g^{\sigma\beta}(x) \;\; \big[\; \epsilon_0 \; \Delta_{\alpha\beta}{}^{ab} \; F_{ab}(x) \; \big] \tag{1.14.8a}$$

или в 3-мерной форме

$$\mathbf{D} = \epsilon(x) \; [\; \epsilon_0 \epsilon_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \alpha_{(0)} \mathbf{B} \;] + \alpha(x) \; [\; \epsilon_0 \; \beta_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \mu^{-1}_{(0)} \mathbf{B} \;] \; ,$$

$$\mathbf{H} = \beta(x) \; [\; \epsilon_0 \epsilon_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \alpha_{(0)} \mathbf{B} \;] + \mu^{-1}(x) \; [\; \epsilon_0 \; \beta_{(0)} \mathbf{E} + c \epsilon_0 \mu^{-1}_{(0)} \mathbf{B} \;] \; . \tag{1.14.8b}$$

Их можно переписать в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \;\; \big[\epsilon(x) \; \epsilon_{(0)} + \alpha(x) \beta_{(0)} \big] \;\; \mathbf{E} + \epsilon_0 c \;\; \Big[\epsilon(x) \alpha_{(0)} + \alpha(x) \mu^{-1}_{(0)} \Big] \;\; \mathbf{B} \; ,$$

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 c \ \ \left[\beta(x)\epsilon_{(0)} + \mu^{-1}(x)\beta_{(0)}\right] \ \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\left[\beta(x)\alpha_{(0)} + \mu^{-1}(x)\mu^{-1}_{(0)}\right] \ \mathbf{B} \ . \tag{1.14.8c}$$

Правило преобразования четырех (3×3)-тензоров, индуцированное римановой геометрией пространства-времени, можно записать в символическом виде так:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &\Longrightarrow \hat{\epsilon}(x) = \epsilon(x)\ \epsilon_{(0)} + \alpha(x)\beta_{(0)}\ , \\
\alpha_0 &\Longrightarrow \hat{\alpha}(x) = \epsilon(x)\alpha_{(0)} + \alpha(x)\mu^{-1}_{(0)}\ , \\
\beta_0 &\Longrightarrow \hat{\beta}(x) = \beta(x)\epsilon_{(0)} + \mu^{-1}(x)\beta_{(0)}\ , \\
\mu^{-1}_0 &\Longrightarrow \hat{\mu}^{-1}(x) = \beta\alpha_{(0)} + \mu^{-1}(x)\mu^{-1}_{(0)}\ .
\end{aligned} \tag{1.14.8d}$$

Если в исходных уравнениях связи ненулевыми были только диагональные блоки, $\alpha^0 = 0$, $\beta^0 = 0$, то предыдущие соотношения значительно упрощаются.

Глава 2

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В СРЕДЕ: КОМПЛЕКСНАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА $SO(3,C)$ И РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

Специальная теория относительности возникла из исследования свойств симметрии уравнений Максвелла относительно движения систем отсчета: Лоренц [59], Пуанкаре [60], [61], Эйнштейн [62]. Естественно, что именно анализ уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца был первым основным объектом исследования специальной теории относительности: Минковский [58], Зильберштейн [63]–[65], Марколонго [66], Бейтман [67], Ланцош [68], Гордон [1], Мандельштам, Тамм [2]–[4]. После открытия релятивистского уравнения для частицы со спином половина – уравнения Дирака – были очень быстро выполнены исследования по теории спиноров в рамках группы Лоренца: Меглих [69], Иваненко, Ландау [70], Нейман [71], ван дер Верден [72], Жюве [73]. Спинорная формулировка теории Максвелла была исследована Лапортом и Уленбеком [74], а также Румером [75]. В 1931 г. Майорана [76] и Оппенгеймер [77] предложили рассматривать уравнения Максвелла как волновое уравнение для отдельного фотона. Они использовали при этом 3-мерный комплексный вектор, удовлетворяющий безмассовому дирако-подобному волновому уравнению первого порядка. До них аналогичное описание электромагнитного поля было детально развито Зильберштейном [63], он же и указал [64], что такой подход в теории Максвелла был ранее использован Риманом [78]. Этот не очень широко известный факт был заново отмечен Биляницки-Бирула [79], [80]. Можно указать, что матричные уравнения Максвелла в дирако-подобной форме использовались очень многими авторами, но интерес к этому представлению теории электромагнитного поля заметно вырос в недавнее время:

Луи де Бройль [81]–[84], Мерсье [85], Петье́ [86], Прока [87], [88], Даффин [89], Кеммер [90]–[92], Баба [93], Белинфанте [94], [95], Тауб [96], Саката, Такетани [97], Шредингер [98]–[100], Тонела [16], Гайтлер [101], Хариш-Чандра [102], [103], Гофман [104], Утияма [105], Мерсье [106], Имаеда [107], Фудживара [108], Гюрсей [109], Гупта [110], Лишнерович [6], Омура [111], Боргардт [112], [113], Федоров [114], Куосьен [115], Бладмен [116], Гууд [117], Мозес [118]–[120], Сильвейра [121], [122], Ломонт [123], Киббл [124], Богуш, Федоров [125], Сах, Швебел [126], Эллис [17], Оливер [127], Бекерс, Пироте [128], Казанова [129], Кармели [130], Богуш [131], Лорд [132], Вейнгартен [133], Минани, Реками, Бальдо [134], Франкель [135], Эдмонс [136], Стражев, Томильчик [137], Ена, Найк, Прадхан [138], Венури [22], Чоу [139], Фущич, Никитин [140], Коок [141], [142], Жиането [143], Кид, Ардини, Антон [144], Реками [145], Кривский, Симулик [146], Хилион [31], Байлис [147], Инагаки

[148], Биляницки-Бирула [79], [80], [149], Сайп [150], Гоуз [151], Еспозито [152], Двоеглазов [153], [154] (большой список литературы приведен в [155]), Герстен [156], Гспонер [157], Ивезич [158]–[166], Донев, Ташкова [167]–[169], Армур [170].

Наша трактовка имеет вполне определенные акценты: технически этот подход к электродинамике базируется на комплексной группе вращений $SO(3,C)$, изоморфной группе Лоренца [171]–[174]; а второй существенный момент связан с распространением этого подхода на случай пространства-времени с неевклидовой геометрией.

2.1 Комплексная матричная формулировка уравнений Максвелла

Исходим из уравнений Максвелла в среде при наличии источников:

$$(F^{ab}) \qquad \text{div}\, c\mathbf{B} = 0\ , \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}\ ,$$

$$(H^{ab}) \qquad \text{div}\, \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \qquad \text{rot}\, c\mathbf{B} = \mu\mu_0 c\mathbf{J} + \epsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}\ . \qquad (2.1.1a)$$

Сначала рассмотрим более простой случай вакуумной среды с источниками

$$\text{div}\, c\mathbf{B} = 0\ , \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}\ ,$$

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \text{rot}\, c\mathbf{B} = \mu_0 c\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}\ . \qquad (2.1.1b)$$

С использованием обозначений для 4-вектора тока ($j^a = (\rho,\ \mathbf{J}/c)$, $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$) последние уравнения представимы в виде

$$\text{div}\, c\mathbf{B} = 0\ , \qquad \text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}\ ,$$

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \text{rot}\, c\mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}\ . \qquad (2.1.2a)$$

В явном виде это восемь уравнений:

$$\partial_1 cB^1 + \partial_2 cB^2 + \partial_3 cB^3 = 0\ , \qquad \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 cB^1 = 0\ ,$$

$$\partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 cB^2 = 0\ , \qquad \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 cB^3 = 0\ ,$$

$$\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = j^0/\epsilon_0\ , \qquad \partial_2 cB^3 - \partial_3 cB^2 - \partial_0 E^1 = j^1/\epsilon_0\ ,$$

$$\partial_3 cB^1 - \partial_1 cB^3 - \partial_0 E^2 = j^2/\epsilon_0\ , \qquad \partial_1 cB^2 - \partial_2 cB^1 - \partial_0 E^3 = j^3/\epsilon_0\ . \quad (2.1.2b)$$

Введем 3-мерный комплексный вектор $\psi^k = E^k + icB^k$; уравнения (2.1.2) могут быть скомбинированы в следующие:

$$\partial_1\Psi^1 + \partial_2\Psi^0 + \partial_3\Psi^3 = j^0/\epsilon_0 \; ,$$

$$\begin{aligned}
-i\partial_0\psi^1 + (\partial_2\psi^3 - \partial_3\psi^2) &= i\, j^1/\epsilon_0 \; , \\
-i\partial_0\psi^2 + (\partial_3\psi^1 - \partial_1\psi^3) &= i\, j^2/\epsilon_0 \; , \\
-i\partial_0\psi^3 + (\partial_1\psi^2 - \partial_2\psi^1) &= i\, j^3/\epsilon_0 \; .
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Эти четыре уравнения можно записать в матричном виде, введя 4-мерный столбец с дополнительным нулевым элементом:

$$\Bigg[-i\partial_0 \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \partial_1 \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & -1 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \partial_2 \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \partial_3 \begin{vmatrix} d_0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & -1 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] \begin{vmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} j^0 \\ i\, j^1 \\ i\, j^2 \\ i\, j^3 \end{vmatrix} .$$

Возникают четыре неоднозначно определяемые матрицы

$$(-i\alpha^0\partial_0 + \alpha^j\partial_j)\Psi = J \; , \qquad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{vmatrix} , \qquad \alpha^0 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ,$$

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & -1 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} d_0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & -1 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \tag{2.1.4}$$

Рассмотрим квадраты этих матриц:

$$(\alpha^0)^2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1a_0 + a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2a_0 + a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3a_0 + a_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Потребуем выполнения равенства

$$(\alpha^0)^2 = +I, \qquad a_0a_0 = 1 \; , \;\; a_1a_0 + a_1 \; , \;\; a_2a_0 + a_2 \; , \;\; a_3a_0 + a_3 \; ;$$

выберем наиболее простое решение:

$$a_0 = \pm 1, \qquad a_j = 0 \;, \qquad \alpha^0 = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (\alpha^0)^2 = +I \;. \tag{2.1.5}$$

Вычисляем

$$(\alpha^1)^2 = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & -1 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & -1 \\ b_3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0^2 + b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_1 b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ b_2 b_0 - b_3 & b_2 & -1 & 0 \\ b_3 b_0 - b_2 & b_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

Требуем

$$(\alpha^1)^2 = -I \;,$$

выбираем решение

$$b_0 = 0 \;, \qquad b_1 = -1 \;, \qquad b_2 = 0 \;, \qquad b_3 = 0 \;,$$

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \tag{2.1.6}$$

Требуем

$$(\alpha^2)^2 = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 c_0 + c_2 & 0 & c_0 & 0 \\ c_1 c_0 + c_3 & -1 & c_1 & 0 \\ c_2 c_0 & 0 & c_2 & 0 \\ c_3 c_0 - c_1 & 0 & c_3 & -1 \end{vmatrix} = -I \;,$$

т. е.

$$c_0 = 0 \;, \qquad c_1 = 0 \;, \qquad c_2 = -1 \;, \qquad c_3 = 0 \;,$$

$$\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (\alpha^2)^2 = -I \;. \tag{2.1.7}$$

Требуем

$$(\alpha^3)^2 = \begin{vmatrix} d_0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & -1 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & -1 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_0 d_0 + d_3 & 0 & 0 & d_0 \\ d_1 d_0 - d_2 & -1 & 0 & 0 \\ d_2 d_0 + d_1 & 0 & -1 & d_2 \\ d_3 d_0 & 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = -I \;,$$

т. е.

$$d_0 = 0 \;, \qquad d_1 = 0 \;, \qquad d_2 = 0 \;, \qquad d_3 = -1 \;,$$

$$\alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \qquad (\alpha^3)^2 = -I \; . \tag{2.1.8}$$

Рассмотрим попарные произведения матриц:

$$\alpha^1\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +\alpha^3 \; ,$$

$$\alpha^2\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^3 \; ,$$

$$\alpha^1\alpha^2 = -\alpha^2\alpha^1 = \alpha^3 \; , \tag{2.1.9a}$$

$$\alpha^2\alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^1 \; ,$$

$$\alpha^3\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^1 \; ,$$

$$\alpha^2\alpha^3 = -\alpha^3\alpha^2 = \alpha^1 \; . \tag{2.1.9b}$$

Убеждаемся также в выполнении равенства

$$\alpha^3\alpha^1 = -\alpha^1\alpha^3 = \alpha^2 \; . \tag{2.1.9c}$$

Рассмотрим произведения $\alpha^0\alpha^i$:

$$k = \pm 1, \;\; \alpha^0\alpha^1 = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} ,$$

$$k = \pm 1, \;\; \alpha^1\alpha^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Замечаем, что при $k = +1$ будем иметь простое правило коммутации:

$$\alpha^0 = I \; , \qquad \alpha^i\alpha^0 = \alpha^0\alpha^i = \alpha^i \; . \tag{2.1.9d}$$

Таким образом, уравнения Максвелла представлены в матричной форме:

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\Psi = J \;, \qquad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{vmatrix} \;, \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} j^0 \\ i\;j^1 \\ i\;j^2 \\ i\;j^3 \end{vmatrix} \;,$$

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

$$(\alpha^1)^2 = -I \;, \qquad (\alpha^1)^2 = -I \;, \qquad (\alpha^1)^2 = -I \;,$$

$$\alpha^1\alpha^2 = -\alpha^2\alpha^1 = \alpha^3 \;,\; \alpha^2\alpha^3 = -\alpha^3\alpha^2 = \alpha^1 \;,\; \alpha^3\alpha^1 = -\alpha^1\alpha^3 = \alpha^2 \;. \tag{2.1.10}$$

Получим явные формулы для вещественного представления уравнений Максвелла. Исходим из уравнений

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\Psi = J \;, \qquad (+i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\Psi^* = J^* \;, \tag{2.1.11a}$$

$$E = \frac{\psi + \psi^*}{2} \;, \qquad B = \frac{\psi - \psi^*}{2i} \;. \tag{2.1.11b}$$

Складываем и вычитаем уравнения (2.1.11a):

$$-i\partial_0\Psi + \alpha^j\partial_j\Psi + i\partial_0\Psi^* + \alpha^j\partial_j\Psi^* = J + J^* \;,$$

$$-i\partial_0\Psi + \alpha^j\partial_j\Psi - i\partial_0\Psi^* - \alpha^j\partial_j\Psi^* = J - J^*$$

или

$$\partial_0\frac{\Psi - \Psi^*}{2i} + \alpha^j\partial_j\frac{\Psi + \Psi^*}{2} = \frac{J + J^*}{2} \;,$$

$$-\partial_0\frac{\Psi + \Psi^*}{2} + \alpha^j\partial_j\frac{\Psi - \Psi^*}{2i} = \frac{J - J^*}{2i} \;,$$

т. е.

$$\partial_0 B + \alpha^j\partial_j E = Re(J) \;, \qquad -\partial_0 E + \alpha^j\partial_j B = Im(J) \;.$$

Их можно записать в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \alpha^j\partial_j & \partial_0 \\ -\partial_0 & \alpha^j\partial_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Re(J) \\ Im(J) \end{vmatrix} \;. \tag{2.1.12a}$$

Можно ввести 8-мерные матрицы

$$\Gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix} \;, \qquad \Gamma^i = \begin{vmatrix} \alpha^i & 0 \\ 0 & \alpha^i \end{vmatrix} \tag{2.1.12b}$$

со свойствами

$$
(\Gamma^0)^2 = -I \;, \qquad (\Gamma^1)^2 = -I \;, \qquad (\Gamma^1)^2 = -I \;, \qquad (\Gamma^1)^2 = -I \;,
$$

$$
\Gamma^1\Gamma^2 = -\Gamma^2\Gamma^1 = \Gamma^3 \;, \qquad \Gamma^2\Gamma^3 = -\Gamma^3\Gamma^2 = \Gamma^1 \;, \qquad \Gamma^3\Gamma^1 = -\Gamma^1\Gamma^3 = \Gamma^2 \;,
$$

$$
\Gamma^0\Gamma^i = \Gamma^i\Gamma^0 = \left| \begin{array}{cc} 0 & \alpha^i \\ -\alpha^i & 0 \end{array} \right| \neq \Gamma^i \;. \qquad (2.1.12c)
$$

Вернемся к 4-мерной комплексной формулировке и рассмотрим вопрос об описании свойства релятивистской инвариантности уравнений Максвелла:

$$
(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\Psi = J \;, \qquad \Psi = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{array} \right| \;, \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} j^0 \\ i\, j^1 \\ i\, j^2 \\ i\, j^3 \end{array} \right| .
$$

Преобразование Лоренца над волновой функцией запишем в виде (в соответствии с тем, что в полевой функции присутствует дополнительная переменная – нуль, можно зафиксировать матрицу преобразования с точностью до четырех параметров)

$$
S = \left| \begin{array}{cccc} s_0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & . & . & . \\ s_2 & . & O(k) & . \\ s_3 & . & . & . \end{array} \right| \;, \qquad \Psi' = S\Psi \;, \qquad \Psi = S^{-1}\Psi' \;. \qquad (2.1.13a)
$$

Уравнение для преобразованной функции Ψ'

$$
(-i\partial_0 + S\alpha^j S^{-1}\partial_j)\Psi' = S\; J \;. \qquad (2.1.13b)
$$

Рассмотрим

$$
S\alpha^j S^{-1} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & O(k) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 0 & e_j \\ -e_j & \tau_j \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & O^{-1}(k) \end{array} \right| =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cc} 0 & e_j \\ -O(k)e_j & O(k)\tau_j \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & O^{-1}(k) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & e_j O^{-1}(k) \\ -O(k)e_j & O(k)\tau_j O^{-1}(k) \end{array} \right| .
$$

Перепишем соотношение с использованием индексной техники:

$$
S\alpha^j S^{-1} = \left| \begin{array}{cc} 0 & \delta_{ji} O^{-1}(k)_{in} \\ -O(k)_{ni}\delta_{ij} & \tau_n O(k)_{nj} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & O(k)_{nj} \\ -O(k)_{nj} & \tau_n O(k)_{nj} \end{array} \right| =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cc} 0 & (e_m)_n O(k)_{mj} \\ -(e_m)_n O(k)_{mj} & \tau_m O(k)_{mj} \end{array} \right| = \alpha^m O_{mj}(k). \qquad (2.1.13c)
$$

Следовательно, уравнения Максвелла после преобразования запишутся так:

$$
(-i\partial_0 + S\alpha^j S^{-1}\partial_j)\Psi' = SJ \qquad \Longrightarrow
$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^m\, O_{mj}\partial_j)\Psi' = SJ\ ,$$

$$O_{mj}\partial_j = \partial'_m \qquad (-i\partial_0 + \alpha^m\, \partial'_m)\Psi' = SJ\ . \tag{2.1.13d}$$

Проверим эти вычисления на одном частном случае. Пусть преобразование имеет вид (вещественным a соответствует пространственное вращение, мнимому a отвечает лоренцевское вращение)

$$S\alpha^1 S^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ -\cos a & 0 & 0 & \sin a \\ -\sin a & 0 & 0 & -\cos a \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \end{vmatrix} = \cos a\alpha^1 + \sin a\alpha^2 = \alpha^j O_{j1}, \tag{2.1.14a}$$

$$S\alpha^2 S^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ \sin a & 0 & 0 & \cos a \\ -\cos a & 0 & 0 & \sin a \\ 0 & -\cos a & -\sin a & 0 \end{vmatrix} = -\sin a; \alpha^1 + \cos a\alpha^2 = \alpha^j O_{j2}, \tag{2.1.14b}$$

$$S\alpha^3 S^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^3 = \alpha^j O_{j3}\ . \tag{2.1.14c}$$

Следовательно, уравнения Максвелла преобразуются в следующие:

$$(-i\partial_0 + S\alpha^i S^{-1}\partial_i)\Psi' = SJ \implies$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^j\, O_{ji}\partial_i)\Psi' = SJ\ , \qquad O_{ji}\partial_i = \partial'_j\ ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^j\, \partial'_j)\Psi' = SJ\ . \tag{2.1.14d}$$

Теперь обратим внимание на то, что полученное свойство симметрии (2.1.14d) выглядят удовлетворительно только при вещественном параметре a (оно описывает симметрию уравнений Максвелла при евклидовых вращениях). Однако при мнимых a преобразование S описывает лоренцевский буст:

$$a = ib \; , \qquad b^* = b \; ,$$

$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2i} = i \,\text{sh}\; b \; ,$$

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2} = \text{ch}\; b \; ,$$

$$S(a = ib) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\; b & -i \;\text{sh}\; b & 0 \\ 0 & i \;\text{sh}\; b & \text{ch}\; b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| . \qquad (2.1.15a)$$

Формулы (2.1.14) принимают вид

$$S\alpha^1 S^{-1} = \text{ch}\; b \; \alpha^1 + i \;\text{sh}\; b \; \alpha^2 \; ,$$

$$S\alpha^2 S^{-1} = -i \;\text{sh}\; b \; \alpha^1 + \text{ch}\; b \; \alpha^2 \; , \qquad S\alpha^3 S^{-1} = \alpha^3 \; ; \qquad (2.1.15b)$$

соответственно уравнение Максвелла после этого преобразования примет вид

$$(-i\partial_0 + S\alpha^1 S^{-1}\partial_1 + S\alpha^2 S^{-1}\partial_2 + S\alpha^3 S^{-1}\partial_3)\Psi' = SJ \implies$$

$$[\; -i\partial_0 + \alpha^3\partial_3 + (\text{ch}\; b \; \alpha^1 + i \;\text{sh}\; b \; \alpha^2)\partial_2 + (-i \;\text{sh}\; b \; \alpha^1 + \text{ch}\; b \; \alpha^2)\partial_3 \;]\; \Psi' = SJ \; . \qquad (2.1.15c)$$

Замечаем тождество

$$(\text{ch}\; b - i \;\text{sh}\; b \; \alpha^3)(-i\partial_0 + \alpha^3\partial_3) =$$

$$= -i(\text{ch}\; b \; \partial_0 - \text{sh}\; b \; \partial_3) + \alpha^3(-\text{sh}\; b \; \partial_0 + \text{ch}\; b \; \partial_3) = -i\partial_0' + \alpha^3\partial_3' \; , \qquad (2.1.16a)$$

где производные пересчитаны с помощью лоренцевского буста:

$$(\text{ch}\; b \; \partial_0 - \text{sh}\; b \; \partial_3) = \partial_0' \; , \qquad (-\text{sh}\; b \; \partial_0 + \text{ch}\; b \; \partial_3) = \partial_3' \; .$$

Остается вычислить действие оператора

$$\Delta = (\text{ch}\; b - i \;\text{sh}\; b \; \alpha^3) \qquad (2.1.16b)$$

на два других слагаемых в уравнении (2.1.15c). Следует ожидать двух равенств:

$$(\text{ch}\; b - i \;\text{sh}\; b \; \alpha^3)(\text{ch}\; b \; \alpha^1 + i \;\text{sh}\; b \; \alpha^2) = \alpha^2 \; ,$$

$$(\text{ch}\; b - i \;\text{sh}\; b \; \alpha^3)(-i \;\text{sh}\; b \; \alpha^1 + \text{ch}\; b \; \alpha^2) = \alpha^3 \; . \qquad (2.1.16c)$$

Легко убеждаемся, что они действительно выполняются. Остается найти явное выражение для величины $\Delta S\ J$. Сначала вычисляем

$$S\ J = \epsilon_0^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\, b & -i\ \text{sh}\, b & 0 \\ 0 & i\ \text{sh}\, b & \text{ch}\, b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j^0 \\ ij^1 \\ ij^2 \\ ij^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j^0 \\ i\ \text{ch}\, b\ j^1 + \text{sh}\, b\ j^2 \\ -\text{sh}\, b\ j^1 + i\ \text{ch}\, b\ j^2 \\ ij^3 \end{vmatrix}$$

и дальше

$$\Delta S\ J = \epsilon_0^{-1} \begin{vmatrix} \text{ch}\, b & 0 & 0 & -i\ \text{sh}\, b \\ 0 & \text{ch}\, b & +i\ \text{sh}\, b & 0 \\ 0 & -i\ \text{sh}\, b & \text{ch}\, b & 0 \\ i\ \text{sh}\, b & 0 & 0 & \text{ch}\, b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j^0 \\ i\ \text{ch}\, b\ j^1 + \text{sh}\, b\ j^2 \\ -\text{sh}\, b\ j^1 + i\ \text{ch}\, b\ j^2 \\ ij^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ch}\, b\ j^0 + \text{sh}\, b\ j^3 \\ ij^1 \\ ij^2 \\ i(\text{sh}\, b\ j^0 + \text{ch}\, b\ j^3) \end{vmatrix} . \qquad (2.1.16d)$$

Таким образом, описание симметрии уравнений Максвелла для лоренцевских бустов достигается в соответствии с соотношениями

$$\underline{(0-3)} \qquad S(a=ib) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\, b & i\ \text{sh}\, b & 0 \\ 0 & -i\ \text{sh}\, b & \text{ch}\, b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \ \Delta(b) = \text{ch}\, b - i\ \text{sh}\, b\ \alpha^3 ,$$

$$\Delta(b)\ (-i\partial_0 + S\alpha^j S^{-1} \partial_j)\Psi' = \Delta S\ J \equiv J' \implies (-i\partial_0' + \alpha^j \partial_j')\Psi' = J' ,$$
$$(\text{ch}\, b\ \partial_0 - \text{sh}\, b\ \partial_3) = \partial_0' , \ (-\text{sh}\, b\ \partial_0 + \text{ch}\, b\ \partial_3) = \partial_3' . \qquad (2.1.17a)$$

Можно убедиться, что свойства симметрии уравнений Максвела относительно бустов вдоль осей 1 и 2 аналогичны:

$$\underline{(0-1)} \quad S(a=ib) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}\, b & -i\ \text{sh}\, b \\ 0 & 0 & i\, \text{sh}\, b & \text{ch}\, b \end{vmatrix} , \qquad \Delta(b) = \text{ch}\, b - i\ \text{sh}\, b\ \alpha^1 ,$$

$$\Delta(b)\ (-i\partial_0 + S\alpha^j S^{-1} \partial_j)\Psi' = \Delta S\ J \equiv J' \qquad \implies \qquad (-i\partial_0' + \alpha^j \partial_j')\Psi' = J' ,$$
$$(\text{ch}\ b\ \partial_0 - \text{sh}\, b\ \partial_1) = \partial_0' , \qquad (-\text{sh}\, b\ \partial_0 + \text{ch}\, b\ \partial_1) = \partial_3' ; \qquad (2.1.17b)$$

$$\underline{(0-2)} \qquad S(a=ib) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\, b & 0 & i\ \text{sh}\, b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\ \text{sh}\, b & 0 & \text{ch}\, b \end{vmatrix} , \qquad \Delta(b) = \text{ch}\, b - i\ \text{sh}\, b\ \alpha^2 ,$$

$$\Delta(b)\,(-i\partial_0 + S\alpha^j S^{-1}\partial_j)\Psi' = \Delta S\ J \equiv J' \qquad \Longrightarrow \qquad (-i\partial_0' + \alpha^j \partial_j')\Psi' = J'\ ,$$
$$(\text{ch}\ b\ \partial_0 - \text{sh}\ b\ \partial_2) = \partial_0'\ , \qquad (-\text{sh}\ b\ \partial_0 + \text{ch}\ b\ \partial_2) = \partial_3'\ . \qquad (2.1.17c)$$

Можно показать, что в случае произвольного ориентированного буста инвариантность уравнений Максвелла достигается с помощью оператора Δ следующего вида:

$$\Delta = \Delta_\alpha = \text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ n_j\ \alpha^j\ ,$$

на деталях доказательства (довольно громоздкого) останавливаться не будем.

Таким образом, уравнение Максвелла в комплексной 4-мерной матричной форме

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i)\ \Psi = J$$

инвариантно относительно произвольно ориентированных преобразований Лоренца

$$S(ib, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O(ib, \mathbf{n}) \end{vmatrix},$$
$$t' = \text{ch}\ \beta\ t + \text{sh}\ \beta\ \mathbf{n}\ \mathbf{x}\ , \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{n}\ \text{sh}\ \beta\ t + \mathbf{x} + (\text{ch}\ \beta - 1)\ \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\mathbf{x})\ ,$$
$$\Delta(-i\partial_0 + S\alpha^i S^{-1}\partial_i)\ S\Psi = \Delta S J \qquad \Longrightarrow \qquad (-i\partial_0' + \alpha^i \partial_i')\ \Psi' = J'\ ; \qquad (2.1.18a)$$

производные и токи пересчитываются по правилам

$$\partial_0' = \text{ch}\ b\ \partial_0 - \ \text{sh}\ b\ (\mathbf{n}\nabla)\ , \qquad \nabla' = -\text{sh}\ b\ \mathbf{n}\ \partial_0 + [\nabla + (\text{ch}\ b - 1)\mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\ ,$$
$$j'^0 = \text{ch}\ b\ j^0 + \text{sh}\ b\ (\mathbf{n}\mathbf{j})\ , \qquad \mathbf{j}' = \text{sh}\ b\ \mathbf{n}\ j^0 + \mathbf{j} + (\text{ch}\ b - 1)\ \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\mathbf{j})\ . \qquad (2.1.18b)$$

Инвариантность уравнений Максвелла относительно евклидовых вращений достигается более простым образом:

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i)\ \Psi = J\ ,$$
$$S(a, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O(a, \mathbf{n}) \end{vmatrix}\ ,$$
$$t' = t\ , \qquad \mathbf{x}' = R(a)\mathbf{x}\ ,$$
$$(-i\partial_0 + S\alpha^i S^{-1}\partial_i)\ S\Psi = SJ \Longrightarrow (-i\partial_0' + \alpha^i \partial_i')\ \Psi' = J'\ ; \qquad (2.1.18c)$$

производные и токи преобразуются по правилам

$$\partial_0' = \partial_0\ , \qquad \nabla' = R(a, -\mathbf{n})\nabla\ ,$$
$$j'^0 = j^0\ , \qquad \mathbf{j}' = R(a, \mathbf{n})\ \mathbf{j}\ . \qquad (2.1.18d)$$

Таким образом, теория Максвелла в представлении Римана–Зильберштейна–Майораны–Опенгеймера инвариантна относительно преобразований из группы Лоренца (напомним, что комплексная ортогональная группа $SO(3, C)$ изоморфна собственной ортохронной группе Лоренца $L_+^\uparrow = SO_0(3, 1)$).

2.2 Матричная формулировка уравнений Максвелла в однородной среде и модифицированная симметрия Лоренца

Исходим из уравнений Максвелла в среде при наличии источников:

$$(F^{ab}) \qquad \text{div}\ c\mathbf{B} = 0 \ , \qquad \text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct} \ ,$$

$$(H^{ab}) \qquad \text{div}\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \qquad \text{rot}\ c\mathbf{B} = \mu\mu_0 c\mathbf{J} + \epsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct} \ . \tag{2.2.1}$$

Разложим коэффициент $\epsilon\mu$ в произведение двух коэффициентов

$$\epsilon\mu = \sqrt{\epsilon\mu}\ \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{1}{k^2} \ , \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu}} = k\,c \ . \tag{2.2.2}$$

Система уравнений Максвелла может быть переписана в виде

$$\text{div}\ kc\mathbf{B} = 0 \ , \qquad \text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial kc\mathbf{B}}{\partial kct} \ ,$$

$$\text{div}\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \qquad \text{rot}\ kc\mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\frac{\mathbf{J}}{kc} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial kct} \ . \tag{2.2.3}$$

С введением переменных

$$x^a = (x^0 = kct \ , \ \ x^i) \ , \qquad j^a = (j^0 = \rho, \mathbf{j} = \frac{\mathbf{J}}{kc}) \tag{2.2.4}$$

предыдущие уравнения записываются

$$\text{div}\ kc\mathbf{B} = 0 \ , \qquad \text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial kc\mathbf{B}}{\partial x^0} \ ,$$

$$\text{div}\ \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\ j^0, \qquad \text{rot}\ kc\mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0} \ . \tag{2.2.5a}$$

В явном виде это восемь уравнений:

$$\partial_1 c' B^1 + \partial_2 c' B^2 + \partial_3 c' B^3 = 0 \ , \qquad \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 c' B^1 = 0 \ ,$$

$$\partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 c' B^2 = 0 \ , \qquad \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 c' B^3 = 0 \ ,$$

$$\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = j^0/\epsilon\epsilon_0 \ , \qquad \partial_2 cB^3 - \partial_3 cB^2 - \partial_0 E^1 = j^1/\epsilon\epsilon_0 \ ,$$

$$\partial_3 cB^1 - \partial_1 cB^3 - \partial_0 E^2 = j^2/\epsilon\epsilon_0 \ , \qquad \partial_1 cB^2 - \partial_2 cB^1 - \partial_0 E^3 = j^3/\epsilon\epsilon_0 \ . \tag{2.2.5b}$$

Уравнения (2.2.5) формально отличаются от уравнений (2.1.2) лишь заменой $c \Longrightarrow c' = kc$; следовательно, весь анализ из раздела **2.1** применим и здесь:

$$\psi^k = E^k + ic' B^k \ . \tag{2.2.6a}$$

Уравнения (2.2.5) могут быть скомбинированы в следующие:

$$\partial_1\Psi^1 + \partial_2\Psi^0 + \partial_3\Psi^3 = j^0/\epsilon\epsilon_0 \ ,$$

$$\begin{aligned} -i\partial_0\psi^1 + (\partial_2\psi^3 - \partial_3\psi^2) &= i\ j^1/\epsilon\epsilon_0 \ , \\ -i\partial_0\psi^2 + (\partial_3\psi^1 - \partial_1\psi^3) &= i\ j^2/\epsilon\epsilon_0 \ , \\ -i\partial_0\psi^3 + (\partial_1\psi^2 - \partial_2\psi^1) &= i\ j^3/\epsilon\epsilon_0 \end{aligned} \tag{2.2.6b}$$

и записаны в матричном виде

$$(-i\partial_0 + \alpha^i\partial_i)\ \Psi = J \tag{2.2.6c}$$

с теми же самыми матрицами, которые использовались в разделе **2.1**. Приведенная форма записи уравнений Максвелла в однородной среде явным образом отражает симметрию уравнений Максвелла в однородной среде относительно модифицированной группы Лоренца с использованием скорости света kc вместо c.

2.3 О квадрировании уравнений Максвелла

Будем исходить из уравнений Максвелла в матричной форме:

$$(-i\partial_0 + \alpha^j\partial_j)\Psi = J \ , \qquad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{vmatrix} \ , \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} j^0 \\ i\ j^1 \\ i\ j^2 \\ i\ j^3 \end{vmatrix} \ ,$$

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(\alpha^1)^2 = -I \ , \qquad (\alpha^2)^2 = -I \ , \qquad (\alpha^3)^2 = -I \ ,$$

$$\alpha^1\alpha^2 = -\alpha^2\alpha^1 = \alpha^3 \ , \qquad \alpha^2\alpha^3 = -\alpha^3\alpha^2 = \alpha^1 \ , \qquad \alpha^3\alpha^1 = -\alpha^1\alpha^3 = \alpha^2 \ . \tag{2.3.1}$$

Полученные соотношения коммутации позволяют предложить простой метод построения решений уравнений Максвелла по известным решениям скалярного безмассового уравнения Клейна–Фока–Гордона. Действительно, верно равенство

$$\begin{aligned} (-i\partial_0 + \alpha^1\partial_1 + \alpha^2\partial_2 + \alpha^3\partial_3)\ (-i\partial_0 - \alpha^1\partial_1 - \alpha^2\partial_2 - \alpha^3\partial_3) \ = \\ = (-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^3) \ . \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Поэтому, взяв любое решение уравнение Клейна–Фока–Гордона

$$(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^3)\ \Phi(x) = 0\ , \tag{2.3.3}$$

легко можно построить четыре решения уравнений Максвелла

$$(-i\partial_0 + \alpha^1\partial_1 + \alpha^2\partial_2 + \alpha^3\partial_3)\ \Psi^A = 0\ , \tag{2.3.4}$$

где Ψ^A – столбцы матрицы

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} = (i\partial_0 + \alpha^1\partial_1 + \alpha^2\partial_2 + \alpha^3\partial_3)\ \Phi(x)\ . \tag{2.3.5}$$

Приведем элементарный пример: построим решение уравнений Максвелла в виде плоской волны, исходя из плоской волны скалярного поля вдоль оси z:

$$\Phi = A\sin(\omega t - kz) = A\sin(k_0x_0 - k_3x_3)\ ,$$
$$\frac{2\pi}{T} = \omega = ck_0\ , \qquad \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda} = k\ . \tag{2.3.6}$$

Формула (2.3.5) дает

$$\{\Psi^a\} = A \begin{vmatrix} ik_0 & 0 & 0 & -k_3 \\ 0 & ik_0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & ik_0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & ik_0 \end{vmatrix} \cos(k_0x_0 - k_3x_3)\ . \tag{2.3.7}$$

Замечаем, что первый и четвертый столбцы имеют ненулевую первую компоненту, поэтому эти решения не представляют интереса в теории Максвелла. Имеем только два следующих решения:

$$\Psi^{(1)} = A \begin{vmatrix} 0 \\ ik_0 \\ -k_3 \\ 0 \end{vmatrix} \cos(k_0x_0 - k_3x_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ E^1 + icB^1 \\ E^2 + icB^2 \\ E^3 + ciB^3 \end{vmatrix}\ ,$$

$$\Psi^{(1)} = A \begin{vmatrix} 0 \\ k_3 \\ ik_0 \\ 0 \end{vmatrix} \cos(k_0x_0 - k_3x_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ E^1 + icB^1 \\ E^2 + icB^2 \\ E^3 + ciB^3 \end{vmatrix}\ . \tag{2.3.8}$$

Таким образом, имеем два решения:

$$(1) \qquad E^2 = -k_3A\ \cos(k_0x_0 - k_3x_3)\ ,$$

$$B^1 = \frac{k_0}{c}A\ \cos(k_0x_0 - k_3x_3)\ , \tag{2.3.9a}$$

$$(2) \qquad E^1 = k_3A\ \cos(k_0x_0 - k_3x_3)\ ,$$

$$B^2 = \frac{k_0}{c} A \ \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \ . \qquad (2.3.9b)$$

Легко убеждаемся, что отношение амплитуд E/B в обоих случаях равно скорости света:

$$\frac{E}{B} = \frac{k_3}{k_0/c} = c \ . \qquad (2.3.10a)$$

Обе электромагнитные волны являются правополяризованными:

$$(1) \qquad (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = A^2 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & -k_3 & 0 \\ k_0/c & 0 & 0 \end{vmatrix} \cos^2(k_0 x_0 - k_3 x_3) =$$

$$= +\mathbf{e}_3 \ \frac{k_3 k_0}{c} A^2 \cos^2(k_0 x_0 - k_3 x_3) \ ,$$

$$(2) \qquad (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = A^2 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ k_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_0/c & 0 \end{vmatrix} \cos^2(k_0 x_0 - k_3 x_3) =$$

$$= +\mathbf{e}_3 \ \frac{k_3 k_0}{c} A^2 \cos^2(k_0 x_0 - k_3 x_3) \ . \qquad (2.3.10b)$$

Кроме того, построены линейно независимые решения уравнений Максвелла; они ортогональные друг другу:

$$\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{E}^{(2)} = 0 \ , \qquad \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{B}^{(2)} = 0 \ . \qquad (2.3.10c)$$

По аналогии могут быть легко построены решения уравнений Максвелла для произвольно ориентированной плоской волны. Исходим из

$$\Phi = A \ \sin(k_0 x_0 - k_i x_i) \ . \qquad (2.3.11a)$$

Матрица решений (2.3.5) принимает вид

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} = (i\partial_0 + \alpha^1 \partial_1 + \alpha^2 \partial_2 + \alpha^3 \partial_3) \ \Phi(x) =$$

$$= A \begin{vmatrix} i\partial_0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ -\partial_1 & i\partial_0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_3 & i\partial_0 & -\partial_1 \\ -\partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 & i\partial_0 \end{vmatrix} \sin(k_0 x_0 - k_i x_i) =$$

$$= A \begin{vmatrix} ik_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & ik_0 & +k_3 & -k_2 \\ k_2 & -k_3 & ik_0 & +k_1 \\ k_3 & +k_2 & -k_1 & ik_0 \end{vmatrix} \cos(k_0 x_0 - k_i x_i) \ . \qquad (2.3.11b)$$

Мы получаем явные выражения для четырех формальных решений уравнений Максвелла, но ни одно из них не может рассматриваться как физическое решение, поскольку не имеет нулевой первой компоненты. Но мы имеем право строить из них линейные комбинации с нужными свойствами, чтобы получить решения вещественных уравнений Максвелла.

Можно на время забыть о функции $A\sin(k_0 x_0 - k_i x_i)$ и исследовать четверку решений столбцов:

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} = \begin{vmatrix} ik_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & ik_0 & +k_3 & -k_2 \\ k_2 & -k_3 & ik_0 & +k_1 \\ k_3 & +k_2 & -k_1 & ik_0 \end{vmatrix} . \qquad (2.3.12)$$

Учтем, что выполняется тождество

$$k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{k} = k_0\,\mathbf{n} , \qquad \mathbf{n}^2 = 1 . \qquad (2.3.13)$$

Набор решений можно описать матрицей (множитель впереди можно не учитывать)

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} = k_0 \begin{vmatrix} i & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & i & +n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & i & +n_1 \\ n_3 & +n_2 & -n_1 & i \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} i & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & i & +n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & i & +n_1 \\ n_3 & +n_2 & -n_1 & i \end{vmatrix} . \qquad (2.3.14a)$$

Можно заметить, что по существу мы имеем дело с задачей преобразований матрицы, не меняющих ее ранга (в частности, это линейные комбинирования столбцов). Сначала получим нули в трех столбцах (1), (2), (3) с помощью столбца под номером (0):

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} \sim \begin{vmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & -in_1 n_1 + i & -in_2 n_1 + n_3 & -in_3 n_1 - n_2 \\ n_2 & -in_1 n_2 - n_3 & -in_2 n_2 + i & -in_3 n_2 + n_1 \\ n_3 & -in_1 n_3 + n_2 & -in_2 n_3 - n_1 & -in_3 n_3 + i \end{vmatrix} . \qquad (2.3.14b)$$

Замечаем, что столбец (3) является линейной комбинацией столбцов (1) и (2)

$$in_2\,(1) - in_1\,(2) = (3) .$$

Следовательно, столбец (3) можно отбросить, и матрица линейно независимых решений примет вид (умножим столбцы (1) и (2) на i):

$$\{\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\} \sim \begin{vmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_1^2 - 1 & n_2 n_1 + in_3 & 0 \\ n_2 & n_1 n_2 - in_3 & n_2 n_2 - 1 & 0 \\ n_3 & n_1 n_3 + in_2 & n_2 n_3 - in_1 & 0 \end{vmatrix} . \qquad (2.3.14c)$$

Таким образом, имеем два физических линейно независимых решения уравнений Максвелла; они пропорциональны столбцам (1) и (2):

$$\Psi^{(1)} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ n_1^2 - 1 \\ n_1 n_2 - i n_3 \\ n_1 n_3 + i n_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E^1 + icB^1 \\ E^2 + icB^2 \\ E^3 + ciB^3 \end{array} \right| ,$$

$$\Psi^{(2)} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ n_2 n_1 + i n_3 \\ n_2 n_2 - 1 \\ n_2 n_3 - i n_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E^1 + icB^1 \\ E^2 + icB^2 \\ E^3 + ciB^3 \end{array} \right| . \qquad (2.3.15)$$

Таким образом, построены два решения уравнений Максвелла:

$$(1) \qquad \mathbf{E} = (n_1^2 - 1,\ n_1 n_2,\ n_1 n_3)\ A\ \cos(k_0 x_0 - k_i x_i) \ ,$$

$$c\mathbf{B} = (0,\ -n_3,\ n_2)\ A\ \cos(k_0 x_0 - k_i x_i) \ ; \qquad (2.3.16a)$$

$$(2) \qquad \mathbf{E} = (n_2 n_1,\ n_2 n_2 - 1,\ n_2 n_3)\ A\ \cos(k_0 x_0 - k_i x_i) \ ,$$

$$c\mathbf{B} = (n_3,\ 0,\ -n_1)\ A\ \cos(k_0 x_0 - k_i x_i) \ . \qquad (2.3.16b)$$

Убеждаемся, что амплитуды E и B связаны соотношением $cB = E$. Проверяем ориентируемость двух волн:

$$\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{B}^{(1)} \sim \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ 0 & -n_3 & n_2 \end{array} \right| \sim (1 - n_1^2)\ (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_1) \ \sim \mathbf{k} \ , \qquad (2.3.17a)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{B}^{(2)} \sim \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_3 & 0 & -n_1 \end{array} \right| \sim (1 - n_2^2)\ (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_1) \ \sim \mathbf{k} \ . \qquad (2.3.17b)$$

Проверяем линейную независимость двух решений:

$$\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{E}^{(2)} = -n_1 n_2 \ , \qquad \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{B}^{(2)} = -n_1 n_2 \ . \qquad (2.3.18)$$

2.4 Матричный формализм и дуальная симметрия уравнений Максвелла

Рассмотрим в матричном формализме описание так называемой дуальной симметрии уравнений Максвелла. Если исходить из уравнений Максвелла без источников

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right| , \qquad (2.4.1a)$$

то легко заметить, что существует простое преобразование полевой функции (умножение на мнимое i) со следующими свойствами:

$$\Psi^D = i\ \Psi\ , \qquad \Psi = -i\ \Psi^D\ , \qquad (-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \Psi^D = 0\ ,$$

$$\Psi^D = \left| \begin{array}{c} 0 \\ i\mathbf{E} - c\mathbf{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E}^D + ic\mathbf{B}^D \end{array} \right|\ , \qquad \mathbf{E}^D = -c\mathbf{B}\ , \qquad c\mathbf{B}^D = +\mathbf{E}\ . \tag{2.4.1b}$$

Это преобразование электромагнитного поля называется дуальным преобразованием. Вопрос состоит в следующем: является ли это преобразование симметрией электромагнитного поля? Обычный ответ на этот вопрос – да. Однако здесь есть тонкие моменты и возможность задавать дополнительные вопросы.

Прежде всего напомним, что это преобразование, очевидно, не является симметрией при наличии источников. Действительно, в этом случае имели бы

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i\mathbf{j} \end{array} \right| \tag{2.4.2a}$$

и дальше

$$\Psi^D = i\ \Psi\ , \qquad \Psi = -i\ \Psi^D\ , \qquad (-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \Psi^D = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} i\rho \\ -\mathbf{j} \end{array} \right|,$$

$$\Psi^D = \left| \begin{array}{c} 0 \\ i\mathbf{E} - c\mathbf{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E}^D + ic\mathbf{B}^D \end{array} \right|, \qquad \mathbf{E}^D = -c\mathbf{B}\ , \qquad c\mathbf{B}^D = +\mathbf{E}\ . \tag{2.4.2b}$$

Положение можно "спасти", меняя исходные уравнения Максвелла (обычно это изменение называют обобщением) введением магнитных зарядов и токов:

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho_e + i\rho_m \\ i\mathbf{j}_e + \mathbf{j}_m \end{array} \right| \tag{2.4.2c}$$

и дальше

$$\Psi^D = i\ \Psi\ , \qquad \Psi = -i\ \Psi^D\ ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \Psi^D = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} -\rho_m + i\rho_e \\ i\mathbf{j}_m - \mathbf{j}_e \end{array} \right|,$$

$$\Psi^D = \left| \begin{array}{c} 0 \\ i\mathbf{E} - c\mathbf{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E}^D + ic\mathbf{B}^D \end{array} \right|\ ,\ \mathbf{E}^D = -c\mathbf{B}\ ,\ c\mathbf{B}^D = +\mathbf{E}\ ,$$

$$\rho_e^D = -\rho_m,\ \mathbf{j}_e^D = +\mathbf{j}_m\ ,\ \rho_m^D = +\rho_e\ ,\ \mathbf{j}_m^D = -\mathbf{j}_e\ . \tag{2.4.3}$$

Вещественной формой уравнений (2.4.2c) являются обобщенные уравнения Максвелла с добавленными магнитными источниками:

$$\partial_0 \frac{\Psi - \Psi^*}{2i} + \alpha^j \partial_j \frac{\Psi + \Psi^*}{2} = \frac{J + J^*}{2}\ ,$$

$$\partial_0 \frac{\Psi + \Psi^*}{2} + \alpha^j \partial_j \frac{\Psi - \Psi^*}{2i} = \frac{J - J^*}{2i} \, ,$$

$$Re(J) = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho_e \\ \mathbf{j}_m \end{array} \right| \, , \qquad Im(J) = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho_m \\ \mathbf{j}_e \end{array} \right| \, ,$$

т. е.

$$\partial_0 B + \alpha^j \partial_j E = Re(J) \, , \qquad -\partial_0 E + \alpha^j \partial_j B = Im(J) \, . \qquad (2.4.4)$$

Уравнения (2.4.4) в явном виде запишутся так:

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ \partial_0 cB^1 \\ \partial_0 cB^2 \\ \partial_0 cB^3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{rrrr} 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ -\partial_1 & 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho_e \\ \mathbf{j}_m \end{array} \right| ,$$

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ -\partial_0 E^1 \\ -\partial_0 E^2 \\ -\partial_0 E^3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{rrrr} 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ -\partial_1 & 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ cB^1 \\ cB^2 \\ cB^3 \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho_m \\ \mathbf{j}_e \end{array} \right| \qquad (2.4.5)$$

или в векторных обозначениях

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \qquad \text{rot } \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}_m}{\epsilon_0} - \frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct} \, ,$$

$$\text{div } c\mathbf{B} = \frac{\rho_m}{\epsilon_0} \, , \qquad \text{rot } c\mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_e}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct} \, . \qquad (2.4.6)$$

Возвращаясь снова к уравнениям Максвелла в отсутствие источников, рассмотрим действие преобразования дуальности на плоскую волну. Рассмотрим плоскую волну вдоль оси z (см. (2.3.9a)):

$$(1) \qquad E^2 = -k_3 A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, , \qquad B^1 = \frac{k_0}{c} A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, .$$

В результате действия операции дуальности получим волну

$$E^1_D = -k_0 A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, , \qquad cB^2_D = -k_3 A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, .$$

Замечаем, что это решение, по существу, совпадает с решением типа (2) согласно (2.3.9b):

$$(2) \qquad E^1 = k_3 A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, , \qquad B^2 = \frac{k_0}{c} A \, \cos(k_0 x_0 - k_3 x_3) \, ,$$

что указывает на полезность дуальных преобразований при построении решений уравнения Максвелла без источников: они позволяют по известному решению достраивать сопутствующее ему ортогональное решение.

2.5 О матричной форме электродинамики Максвелла в среде

Напомним, что при наличии среды нужно ввести два электромагнитных тензора $F^{ab} = (\mathbf{E},\ c\mathbf{B})$ и $H^{ab} = (\mathbf{D},\ \mathbf{H}/c)$, которые преобразуются независимо относительно группы Лоренца. При этом после преобразования Лоренца меняются уравнения связи между электромагнитными полями. В системе покоя среды уравнения Максвелла в этих тензорах имеют следующий явный вид:

$$\text{div}\ \mathbf{B} = 0\ , \qquad \text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}\ ,$$

$$\text{div}\ \mathbf{D} = \rho\ , \qquad \text{rot}\ \frac{\mathbf{H}}{c} = \frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial ct}\ . \qquad (2.5.1a)$$

В случае однородной изотропной среды уравнения связи следующие:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon\ \mathbf{E}\ , \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\ \mathbf{B}\ . \qquad (2.5.1b)$$

Относительно группы Лоренца простыми трансформационными свойствами обладают величины

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + ic\mathbf{B}\ , \qquad \mathbf{h} = \frac{1}{\epsilon_0}\ (\mathbf{D} + i\mathbf{H}/c)\ , \qquad j^a = (j^0 = \rho, \mathbf{j} = \mathbf{J}/c)\ , \quad (2.5.2)$$

где $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ – векторы относительно 3-мерной комплексной группы ортогональных вращений $SO(3, C)$; последняя изоморфна группе Лоренца. Обращаем внимание на то, что векторы имеют одинаковую физическую размерность $[\ h\ ] = [\ f\ ]$.

Уравнения Максвелла (2.5.1a) можно записать в виде

$$\text{div}\ (\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + i\ c\mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ ,$$

$$-i\partial_0(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + ic\mathbf{B}) + \text{rot}\ (\mathbf{E} + i\frac{\mathbf{H}/c}{\epsilon_0}) = \frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ . \qquad (2.5.3)$$

Учтем равенства

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}^*}{2}, \qquad i\ \frac{\mathbf{H}/c}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{h} - \mathbf{h}^*}{2}\ ,$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{h}^*}{2}, \qquad ic\mathbf{B} = \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}^*}{2}\ , \qquad (2.5.4)$$

тогда уравнения Максвелла (2.5.3) записываются так:

$$\text{div}\ (\frac{\mathbf{h} + \mathbf{h}^*}{2} + \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}^*}{2}) = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ ,$$

$$-i\partial_0\left(\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2}+\frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2}\right)+\text{rot}\left(\frac{\mathbf{f}+\mathbf{f}^*}{2}+\frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2}\right)=\frac{i}{\epsilon_0}\,\mathbf{j}\,. \qquad (2.5.5)$$

В уравнения (2.5.5) входят величины с простыми трансформационными свойствами относительно комплексной группы вращений $SO(3,C)$. Введем специальные обозначения

$$\mathbf{M}=\frac{\mathbf{h}+\mathbf{f}}{2}\,, \qquad \mathbf{N}=\frac{\mathbf{h}^*-\mathbf{f}^*}{2}\,; \qquad (2.5.6a)$$

эти величины являются разными трехмерными векторами относительно группы $SO(3,C)$:

$$\mathbf{M}'=O\,\mathbf{M}\,, \qquad \mathbf{N}'=O^*\,\mathbf{N}\,; \qquad (2.5.6b)$$

относительно подгруппы евклидовых вещественных вращений $O^*=O$, относительно комплексных вращений $O^*=O^{-1}$. Уравнения (2.5.5) представимы в виде

$$\text{div}\,\mathbf{M}+\text{div}\,\mathbf{N}=\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\,,$$

$$-i\partial_0\mathbf{M}+\text{rot}\,\mathbf{M}-i\partial_0\mathbf{N}-\text{rot}\,\mathbf{N}=\frac{i}{\epsilon_0}\,\mathbf{j}\,; \qquad (2.5.7)$$

их можно записать в матричной форме:

$$(-i\partial_0+\alpha^i\partial_i)\,M+(-i\partial_0+\beta^i\partial_i)\,N=J\,,$$

$$M=\begin{vmatrix}0\\ \mathbf{M}\end{vmatrix}\,,\quad N=\begin{vmatrix}0\\ \mathbf{N}\end{vmatrix}\,,\quad J=\frac{1}{\epsilon_0}\begin{vmatrix}\rho\\ i\,\mathbf{j}\end{vmatrix}\,. \qquad (2.5.8)$$

Выберем матрицы α^i и β^i в виде

$$\alpha^1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix},\alpha^2=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix},\alpha^3=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$\beta^1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{vmatrix},\beta^2=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix},\beta^3=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix}. \qquad (2.5.9a)$$

Выполняются соотношения

$$(\alpha^1)^2=-I\,, \qquad (\alpha^2)^2=-I\,, \qquad (\alpha^3)^2=-I\,,$$

$$\alpha^1\alpha^2=-\alpha^2\alpha^1=+\alpha^3,\alpha^2\alpha^3=-\alpha^3\alpha^2=+\alpha^1,\alpha^3\alpha^1=-\alpha^1\alpha^3=+\alpha^2,$$

$$(\beta^1)^2=-I\,, \qquad (\beta^2)^2=-I\,, \qquad (\beta^3)^2=-I\,,$$

$$\beta^1\beta^2 = -\beta^2\beta^1 = -\beta^3, \beta^2\beta^3 = -\beta^3\beta^2 = -\beta^1, \beta^3\beta^1 = -\beta^1\beta^3 = -\beta^2. \tag{2.5.9b}$$

Это два набора взаимно коммутирующих матриц:

$$\alpha^k\ \beta^l = \beta^l\ \alpha^k\ . \tag{2.5.9c}$$

Заметим, однако, что основной идее Минковского – разбить уравнения Максвелла на две подсистемы уравнений соответственно для двух тензоров, преобразующихся относительно группы Лоренца независимо друг от друга (по одинаковым законам), должны отвечать две группы уравнений, в которые входят $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^*$ и $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}^*$ соответственно. Найдем такое представление уравнений Максвелла. Запишем рядом уравнения (2.5.5) и им сопряженные:

$$\text{div}\ (\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} + \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2}) = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ , \qquad \text{div}\ (\frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2} + \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2}) = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ ,$$

$$-i\partial_0(\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} + \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2}) + \text{rot}\ (\frac{\mathbf{f}+\mathbf{f}^*}{2} + \frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2}) = \frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ ,$$

$$+i\partial_0(\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} - \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2}) + \text{rot}\ (\frac{\mathbf{f}+\mathbf{f}^*}{2} - \frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2}) = -\frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ .$$

Складывая и вычитая уравнения каждой пары, получаем

$$\text{div}\ \frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ , \qquad \text{div}\ \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2} = 0\ ,$$

$$-i\partial_0\frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2} + \text{rot}\ \frac{\mathbf{f}+\mathbf{f}^*}{2} = 0\ , \qquad -i\partial_0\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} + \text{rot}\ \frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2} = \frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ ,$$

т. е. разделение уравнений Максвелла на пары имеет вид

$$\text{div}\ \frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2} = 0\ , \qquad -i\partial_0\frac{\mathbf{f}-\mathbf{f}^*}{2} + \text{rot}\ \frac{\mathbf{f}+\mathbf{f}^*}{2} = 0\ , \tag{2.5.10a}$$

$$\text{div}\ \frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} = \rho\ , \qquad -i\partial_0\frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}^*}{2} + \text{rot}\ \frac{\mathbf{h}-\mathbf{h}^*}{2} = \frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ . \tag{2.5.10b}$$

Заметим, что представление уравнений Максвелла (2.5.10) выглядит не так компактно, как представление (2.5.7). Однако доказать релятивистскую инвариантность уравнений (2.5.10) проще, чем доказать релятивистскую инвариантность уравнений (2.5.7). Относительно группы Лоренца полевые величины преобразуются по законам:

$$\mathbf{f}' = O\ \mathbf{f}\ , \qquad \mathbf{f}^{*'} = O^*\ \mathbf{f}^*\ , \qquad \mathbf{h}' = O\ \mathbf{h}\ , \qquad \mathbf{h}^{*'} = O^*\ \mathbf{h}^*\ .$$

Если сопоставить уравнения (2.5.10) с уравнениями (2.5.7), (2.5.8)

$$\text{div}\ \mathbf{M} + \text{div}\ \mathbf{N} = \frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ ,$$

$$-i\partial_0 \mathbf{M} + \text{rot}\ \mathbf{M} - i\partial_0 \mathbf{N} - \text{rot}\ \mathbf{N} = \frac{i}{\epsilon_0}\ \mathbf{j}\ ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) M + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) N = J\ ,$$

то легко увидеть, что уравнения (2.5.10) можно переписать (почти) в той же самой матричной форме:

$$\text{div}\ \mathbf{f} - \text{div}\ \mathbf{f}^* = 0\ ,\ -i\partial_0 \mathbf{f} + \text{rot}\ \mathbf{f} + i\partial_0 \mathbf{f}^* + \text{rot}\ \mathbf{f}^* = 0\ ; \qquad (2.5.11a)$$

$$\text{div}\ \mathbf{h} + \text{div}\ \mathbf{h}^* = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\ ,\ -i\partial_0 \mathbf{h} + \text{rot}\ \mathbf{h} - i\partial_0 \mathbf{h}^* - \text{rot}\ \mathbf{h}^* = \frac{i}{\epsilon_0}\mathbf{j}. \qquad (2.5.11b)$$

Таким образом, матричная форма записи уравнений Максвелла (в разбиении Минковского) имеет вид

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) f - (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) f^* = 0\ ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) h + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) h^* = J\ . \qquad (2.5.12)$$

2.6 Уравнения связи Минковского в комплексной векторной форме

Исходим из уравнений связи в покоящейся системе отсчета

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon\ \mathbf{E}\ , \qquad \frac{\mathbf{H}}{c} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{1}{c^2}\ c\mathbf{B} = \frac{\epsilon_0}{\mu}\ c\mathbf{B}\ . \qquad (2.6.1)$$

Эти уравнения с учетом (2.5.4) можно переписать в виде

$$\frac{\mathbf{h} + \mathbf{h}^*}{2} = \epsilon\ \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}^*}{2}\ , \qquad \frac{\mathbf{h} - \mathbf{h}^*}{2} = \frac{1}{\mu}\ \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}^*}{2}\ , \qquad (2.6.2)$$

отсюда следуют соотношения

$$2\mathbf{h} = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f} + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}^*\ , \qquad 2\mathbf{h}^* = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}^* + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}\ . \quad (2.6.3a)$$

Это комплексная формулировка уравнений связи (2.6.1). Заметим, что уравнения (2.6.2) можно разрешить и относительно $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^*$:

$$2\mathbf{f} = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\ \mathbf{h} + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\ \mathbf{h}^*\ , \qquad 2\mathbf{f}^* = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\ \mathbf{h}^* + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\ \mathbf{h}\ . \quad (2.6.3b)$$

Это те же уравнения связи (2.6.3a), но записанные в другой форме.

Учтем законы преобразования трехмерных векторов относительно группы Лоренца:

$$\mathbf{f}' = O\ \mathbf{f}\ , \qquad \mathbf{f}^{'*} = O^*\ \mathbf{f}^*\ , \qquad \mathbf{h}' = O\ \mathbf{h}\ , \qquad \mathbf{h}^{'*} = O^*\ \mathbf{h}^*\ .$$

Тогда равенства (2.6.2) примут вид

$$\frac{O^{-1}\mathbf{h}' + (O^{-1})^*\mathbf{h}^{*'}}{2} = \epsilon\ \frac{O^{-1}\mathbf{f}' + (O^{-1})^*\mathbf{f}^{*'}}{2}\ ,$$

$$\frac{O^{-1}\mathbf{h}' - (O^{-1})^*\mathbf{h}^{*'}}{2} = \frac{1}{\mu}\ \frac{O^{-1}\mathbf{f}' - (O^{-1})^*\mathbf{f}^{*'}}{2}\ .$$

Умножаем оба равенства на O и результаты складываем:

$$\mathbf{h}' = \epsilon\ \frac{\mathbf{f}' + O(O^{-1})^*\mathbf{f}^{*'}}{2} + \frac{1}{\mu}\ \frac{\mathbf{f}' - O(O^{-1})^*\mathbf{f}^{*'}}{2}\ . \tag{2.6.4a}$$

Аналогично умножаем оба равенства на O^* и результаты вычитаем:

$$\mathbf{h}^{*'} = \epsilon\ \frac{O^*O^{-1}\mathbf{f}' + \mathbf{f}^{*'}}{2} - \frac{1}{\mu}\ \frac{O^*O^{-1}\mathbf{f}' - \mathbf{f}^{*'}}{2}\ . \tag{2.6.4b}$$

Эти равенства можно переписать как

$$2\mathbf{h}' = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}' + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\ O(O^{-1})^*\ \mathbf{f}^{'*}\ ,$$

$$2\mathbf{h}^{'*} = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}^{'*} + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\ O^*O^{-1}\ \mathbf{f}^{'}\ . \tag{2.6.5a}$$

Аналогично вместо (2.6.3b) можно получить соотношения

$$2\mathbf{f}' = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\ \mathbf{h}' + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\ O(O^{-1})^*\ \mathbf{h}^{'*}\ ,$$

$$2\mathbf{f}^{'*} = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\ \mathbf{h}^{'*} + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\ O^*O^{-1}\ \mathbf{h}'\ . \tag{2.6.5b}$$

Уравнения связи (2.6.5a), (2.6.5b) обобщают уравнения связи (2.6.3a), (2.6.3b) в движущейся системе отсчета. Отметим, что в случае евклидовых вращений выполняются равенства

$$O^* = O\ \Longrightarrow\ O(O^{-1})^* = I\ , \qquad O^*O^{-1} = I$$

и, следовательно, соотношения (2.6.5a), (2.6.5b) принимают вид (2.6.3a), (2.6.3b), т. е. при евклидовых преобразованиях уравнения связи между электромагнитными векторами не меняются. В случае же лоренцевских бустов выполняются равенства

$$O^* = O^{-1}\ \Longrightarrow\ O(O^{-1})^* = 0^2, \qquad O^*O^{-1} = O^{*2}$$

и уравнения связи принимают вид

$$2\mathbf{h}' = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\ \mathbf{f}' + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\ O^2\ \mathbf{f}^{'*}\ ,$$

$$2\mathbf{h}^{'*} = (\epsilon + \frac{1}{\mu})\mathbf{f}^{'*} + (\epsilon - \frac{1}{\mu})\, O^2 \mathbf{f}' , \qquad (2.6.6a)$$

$$2\mathbf{f}' = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\, \mathbf{h}' + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\, O^{*2} \mathbf{h}^{'*} \, ,$$

$$2\mathbf{f}^{'*} = (\frac{1}{\epsilon} + \mu)\mathbf{h}^{'*} + (\frac{1}{\epsilon} - \mu)\, O^{*2} \mathbf{h}' . \qquad (2.6.6b)$$

В трехмерной комплексной форме уравнения связи выглядят компактнее, чем при использовании вещественных векторов. Чтобы получить последние, достаточно перейти в равенствах (2.6.4a), (2.6.4b) к вещественным векторам:

$$\mathbf{D}' + i\mathbf{H}'/c = \epsilon_0 \epsilon \, \frac{(\mathbf{E}' + ic\mathbf{B}') + O(O^{-1})^* (\mathbf{E}' - ic\mathbf{B}')}{2} +$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{\mu} \frac{(\mathbf{E}' + ic\mathbf{B}') - O(O^{-1})^* (\mathbf{E}' - ic\mathbf{B}')}{2} ,$$

$$\mathbf{D}' - i\mathbf{H}'/c = \epsilon_0 \epsilon \frac{(\mathbf{E}' - ic\mathbf{B}') + O^* O^{-1} (\mathbf{E}' + ic\mathbf{B}')}{2} +$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{\mu} \, \frac{(\mathbf{E}' - ic\mathbf{B}') - O^* O^{-1} (\mathbf{E}' + ic\mathbf{B}')}{2}$$

или после очевидной перегруппировки

$$2\mathbf{D}' = \epsilon_0 \epsilon \, [\, \mathbf{E}' + \frac{O(O^{-1})^* + O^* O^{-1}}{2} \, \mathbf{E}' \, + \frac{O(O^{-1})^* - O^* O^{-1}}{2i} \, c\mathbf{B}' \,] \, +$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{\mu} \, [\, \mathbf{E}' - \frac{O(O^{-1})^* + O^* O^{-1}}{2} \, \mathbf{E}' \, - \frac{O(O^{-1})^* - O^* O^{-1}}{2i} \, c\mathbf{B}' \,] \, , \qquad (2.6.7a)$$

$$2\mathbf{H}'/c = \epsilon_0 \epsilon \, [\, c\mathbf{B}' - \frac{O(O^{-1})^* + O^* O^{-1}}{2} \, c\mathbf{B}' \, + \frac{O(O^{-1})^* - O^* O^{-1}}{2i} \, \mathbf{E}' \,] \, +$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{\mu} \, [\, c\mathbf{B}' + \frac{O(O^{-1})^* + O^* O^{-1}}{2} \, c\mathbf{B}' \, - \frac{O(O^{-1})^* - O^* O^{-1}}{2i} \, \mathbf{E}' \,] \, . \qquad (2.6.7b)$$

Это материальные уравнения для электромагнитного поля для движущейся среды согласно Минковскому. В случае евклидовых вращений $O^* = O$ формулы принимают простой вид

$$\mathbf{D}' = \epsilon_0 \epsilon \, \mathbf{E}' \, , \qquad \mathbf{H}'/c = \epsilon_0 \frac{1}{\mu} c\mathbf{B}' \;\Longrightarrow\; \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}' \, ,$$

т. е. при этих преобразованиях материальные уравнения не меняются. В случае лоренцевских бустов выполняется равенство $O^* = O^{-1}$ и полученные материальные уравнения (2.6.7a), (2.6.7b) можно представить в виде

$$2\mathbf{D}' = \epsilon_0 \epsilon \, [\, (I + \frac{OO + O^* O^*}{2}) \, \mathbf{E}' \, + \frac{OO - O^* O^*}{2i} \, c\mathbf{B}' \,] \, +$$

$$
+\frac{\epsilon_0}{\mu}\ [\ (I - \frac{OO + O^*O^*}{2})\ \mathbf{E}'\ - \frac{OO - O^*O^*}{2i}\ c\mathbf{B}'\ ]\ ,
$$

$$
2\mathbf{H}'/c = \epsilon_0 \epsilon\ [\ (I - \frac{OO + O^*O^*}{2})\ c\mathbf{B}'\ + \frac{OO - O^*O^*}{2i}\ \mathbf{E}'\ ] +
$$

$$
+\frac{\epsilon_0}{\mu}\ [\ (I + \frac{OO + O^*O^*}{2})\ c\mathbf{B}'\ - \frac{OO - O^*O^*}{2i}\ \mathbf{E}'\ ]\ . \qquad (2.6.8a)
$$

Их можно переписать иначе:

$$
\mathbf{D}' = \frac{\epsilon_0}{2}\ \Big\{ [\ (\epsilon\ + \frac{1}{\mu}) + (\epsilon\ - \frac{1}{\mu})\ \mathrm{Re}\, O^2\ ]\ \mathbf{E}'\ + (\epsilon\ - \frac{1}{\mu})\ \mathrm{Im}\, O^2\ c\mathbf{B}'\ ] \Big\}\ ,
$$

$$
\frac{\mathbf{H}'}{c} = \frac{\epsilon_0}{2}\ \Big\{ [(\epsilon\ + \frac{1}{\mu}) - (\epsilon\ - \frac{1}{\mu})\ \mathrm{Re}\, O^2\ ]\ c\mathbf{B}'\ + (\epsilon\ - \frac{1}{\mu})\ \mathrm{Im}\, O^2\ \mathbf{E}'\ ] \Big\}\ . \qquad (2.6.8b)
$$

Понятно, что все формулы значительно упрощаются в случае лоренцевских бустов в отдельных плоскостях:

$$
\mathbf{n} = (1,0,0), \qquad O^2 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\ 2b & -i\ \mathrm{sh}\ 2b \\ 0 & +i\ \mathrm{sh}\ 2b & \mathrm{ch}\ 2b \end{array} \right| ,
$$

$$
\mathbf{n} = (0,1,0), \qquad O^2 = \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{ch}\ 2b & 0 & +i\ \mathrm{sh}\ 2b \\ 0 & 1 & 0 \\ -i\ \mathrm{sh}\ 2b & 0 & \mathrm{ch}\ 2b \end{array} \right| ,
$$

$$
\mathbf{n} = (0,0,1), \qquad O^2 = \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{ch}\ 2b & -i\ \mathrm{sh}\ 2b & 0 \\ +i\ \mathrm{sh}\ 2b & \mathrm{ch}\ 2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| . \qquad (2.6.9)
$$

Полученные результаты можно легко обобщить на более сложные среды. Ограничимся линейными средами:

$$
\mathbf{D} = \epsilon_0\ \epsilon(x)\ \mathbf{E} + \epsilon_0 c\ \alpha(x)\ \mathbf{B}\ , \qquad \mathbf{H} = \epsilon_0 c\ \beta(x)\ \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\ \mu(x)\ \mathbf{B}\ , \quad (2.6.10a)
$$

где $\epsilon(x)$, $\mu(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – четыре (3×3)-матрицы. Уравнения (2.6.10a) можно преобразовать к трехмерным комплексным векторам $\mathbf{f}, \mathbf{h}$:

$$
\frac{\mathbf{h} + \mathbf{h}^*}{2} = \epsilon(x)\ \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}^*}{2} + \alpha(x)\ \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}^*}{2i}\ ,
$$

$$
\frac{\mathbf{h} - \mathbf{h}^*}{2i} = \beta(x)\ \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}^*}{2} + \mu(x)\ \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}^*}{2i}\ , \qquad (2.6.10b)
$$

откуда следует

$$\mathbf{h} = [\ (\epsilon(x) + \mu(x)) + i(\beta(x) - \alpha(x))\ ]\ \mathbf{f} + [\ (\epsilon(x) - \mu(x)) + i(\beta(x) + \alpha(x))]\ \mathbf{f}^* \ ,$$

$$\mathbf{h}^* = [\ (\epsilon(x) + \mu(x)) - i(\beta(x) - \alpha(x))\ ]\ \mathbf{f}^* + [\ (\epsilon(x) - \mu(x)) - i(\beta(x) + \alpha(x))\ ]\ \mathbf{f} \ . \tag{2.6.11}$$

Под действием лоренцевских преобразований соотношения (2.6.11) примут вид

$$O^{-1}\mathbf{h}' = [\ (\epsilon(x) + \mu(x)) + i(\beta(x) - \alpha(x))]\ O^{-1}\mathbf{f}' +$$
$$+ [\ (\epsilon(x) - \mu(x)) + i(\beta(x) + \alpha(x))]\ (O^{-1})^* \mathbf{f}^{'*},$$

$$(O^{-1})^* \mathbf{h}^{'*} = [\ (\epsilon(x) + \mu(x)) - i(\beta(x) - \alpha(x))]\ (O^{-1})^* \mathbf{f}^{'*} +$$
$$+ [\ (\epsilon(x) - \mu(x)) - i(\beta(x) + \alpha(x))]\ (O^{-1})\mathbf{f}' \tag{2.6.12}$$

или

$$\mathbf{h}' = \Big[\ (\tilde{\epsilon}(x) + \tilde{\mu}(x)) + i(\tilde{\beta}(x) - \tilde{\alpha}(x))\Big]\ \mathbf{f}' +$$
$$+ \Big[\ (\tilde{\epsilon}(x) - \tilde{\mu}(x)) + i(\tilde{\beta}(x) + \tilde{\alpha}(x))\Big]\ [O(O^{-1})^*]\ \mathbf{f}^{'*} \ ,$$
$$\mathbf{h}^{'*} = \Big[\ (\tilde{\epsilon}^*(x) + \tilde{\mu}^*(x)) - i(\tilde{\beta}^*(x) - \tilde{\alpha}^*(x))\Big]\ \mathbf{f}^{'*} +$$
$$+ \Big[\ (\tilde{\epsilon}^*(x) - \tilde{\mu}^*(x)) - i(\tilde{\beta}^*(x) + \tilde{\alpha}^*(x))\Big]\ [O^*(O^{-1})]\mathbf{f}' \ , \tag{2.6.13}$$

где

$$\tilde{\epsilon}(x) = O\epsilon(x)O^{-1} \ , \qquad \tilde{\mu}(x) = O\mu(x)O^{-1} \ ,$$
$$\tilde{\alpha}(x) = O\alpha(x)O^{-1} \ , \qquad \tilde{\beta}(x) = O\beta(x)O^{-1} \ .$$

Это обобщение уравнений Минковского на случай произвольных линейных сред. Для евклидовых вращений

$$[O(O^{-1})^*] = I \ , \qquad [O^*(O^{-1})] = I \ ,$$

при лоренцевских бустах выполняются тождества

$$[O(O^{-1})^*] = O^2 \ , \qquad [O^*(O^{-1})] = O^{*2} \ .$$

2.7 Симметрия матричного уравнения Максвелла в среде

Напоминаем, что уравнения Максвелла в однородной среде, согласно Минковскому, должны быть разбиты на две группы уравнений, преобразующиеся независимо относительно группы Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{f} - \text{div } \mathbf{f}^* = 0 \ ,$$

$$-i\partial_0 \mathbf{f} + \text{rot } \mathbf{f} + i\partial_0 \mathbf{f}^* + \text{rot } \mathbf{f}^* = 0 \ ,$$

$$\text{div } \mathbf{h} + \text{div } \mathbf{h}^* = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \ ,$$

$$-i\partial_0 \mathbf{h} + \text{rot } \mathbf{h} - i\partial_0 \mathbf{h}^* - \text{rot } \mathbf{h}^* = \frac{i}{\epsilon_0}\mathbf{j} \ . \qquad (2.7.1)$$

Их матричной формой являются соответственно уравнения

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) f - (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) f^* = 0 \ ,$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) h + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) h^* = J \ . \qquad (2.7.2)$$

Уравнения Максвелла представимы также в виде (см. (2.5.7), (2.5.8))

$$\text{div } \mathbf{M} + \text{div } \mathbf{N} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \ ,$$

$$-i\partial_0 \mathbf{M} + \text{rot } \mathbf{M} - i\partial_0 \mathbf{N} - \text{rot } \mathbf{N} = \frac{i}{\epsilon_0}\mathbf{j}$$

или

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) M + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) N = J \ . \qquad (2.7.3)$$

Матрицы α^i и β^i взяты в виде

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \ \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \ \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} , \ \beta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \ \beta^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

(2.7.4)

Обращаем внимание, что в матричных уравнениях (2.7.2) и (2.7.3) часть членов с α^j-матрицами имеет структуру, которая уже исследовалась в разделе **2.1** (см. (2.1.13) и последующие формулы) при анализе вопроса о релятивистской инвариантности, а часть членов имеют другую структуру (сюда входят матрицы β^j и сопряженные полевые функции).

Рассмотрим вопрос о симметрии матричных уравнений (2.7.2), (2.7.3) относительно преобразований Лоренца. Для определенности будем работать с матричным уравнением (2.7.3). Ограничимся анализом частных случаев евклидового и псевдоевклидового вращений.

Относительно евклидового вращения в плоскости 1–2 нужно проверить (дополнительно к вычислениям, проведенным в разделе **2.1** – см. (2.1.14a)–(2.1.14c)) равенства с участием матриц β^i:

$$S\beta^1 S^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ -\cos a & 0 & 0 & -\sin a \\ -\sin a & 0 & 0 & \cos a \\ 0 & \sin a & -\cos a & 0 \end{array} \right| = \cos a\, \beta^1 + \sin a\, \beta^2 = \beta^j O_{j1}\ ; \quad (2.7.5a)$$

$$S\beta^2 S^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ \sin a & 0 & 0 & -\cos a \\ -\cos a & 0 & 0 & -\sin a \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \end{array} \right| = -\sin a\, \beta^1 + \cos a\, \beta^2 = \beta^j O_{j2}\ ; \quad (2.7.5b)$$

$$S\beta^3 S^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = \beta^3 = \beta^j O_{j3}\ . \quad (2.7.5c)$$

Соотношения (2.7.5) свидетельствуют об инвариантности уравнения Максвелла (2.7.3) относительно пространственных вращений в соответствии с соотношениями

$$(-i\partial_0 + S\alpha^i S^{-1}\partial_i)\; M' + (-i\partial_0 + S\beta^i S^{-1}\partial_i)\; N' = +SJ \quad \Longrightarrow$$

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial'_i)\; M' + (-i\partial_0 + \beta^i \partial'_i)\; N' = +J' \;. \tag{2.7.6}$$

Рассмотрим лоренцевские бусты, при этом выполняются соотношения

$$M' = SM \;, \qquad N' = S^* N = S^{-1} N, \qquad S^* = S^{-1} \;;$$

матричное уравнение (2.7.3) принимает вид (с учетом анализа, выполненного в разделе **2.1**; кроме того, поскольку встречаются два типа матриц, то символом α отмечаем, что дополнительное преобразование $\Delta = \Delta_{(\alpha)}$ строится из матриц α^j)

$$\Delta_{(\alpha)} S\; \left[(-i\partial_0 + \alpha^i\partial_i)\; S^{-1}M' + (-i\partial_0 + \beta^i\partial_i)\; SN'\right] = \Delta SJ \tag{2.7.7a}$$

или

$$\Delta_{(\alpha)}\; \left[(-i\partial_0 + S\alpha^i S^{-1}\partial_i)\; M' + S^2(-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\; N'\right] = J' \tag{2.7.7b}$$

и дальше получаем

$$(-i\partial'_0 + \alpha^i\partial'_i)\; M' + \Delta_{(\alpha)} S^2(-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\; N' = J' \;. \tag{2.7.7c}$$

Для доказательства симметрии матричного уравнения нужно показать, что выполняется равенство

$$\Delta_{(\alpha)} S^2\; (-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\; N' = (-i\partial'_0 + \beta^i\partial'_i)\; N' \;. \tag{2.7.8}$$

Можно предположить (из соображений простоты и симметрии), что будут выполняться тождества

$$\Delta_{(\alpha)} S^2 = \Delta_{(\beta)} \iff \Delta_{(\alpha)} S = \Delta_{(\beta)} S^{-1} \;, \tag{2.7.9a}$$

$$\Delta_{(\beta)}(-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\; N' = (-i\partial'_0 + \beta^i\partial'_i)\; N' \;. \tag{2.7.9b}$$

Остается проверить эти соотношения. Выберем для анализа псевдоевклидовое вращение в плоскости 0–3 (в силу циклической симметрии этого достаточно):

$$S = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\, b & -i\,\mathrm{sh}\, b & 0 \\ 0 & i\,\mathrm{sh}\, b & \mathrm{ch}\, b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| , \qquad S^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\, b & i\,\mathrm{sh}\, b & 0 \\ 0 & -i\,\mathrm{sh}\, b & \mathrm{ch}\, b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| .$$

Используя (2.7.5) и прием формальных замен, находим

$$S^{-1}\beta^1 S = \text{ch}\ b\ \beta^1 - i\ \text{sh}\ b\ \beta^2 = \beta^j O^{-1}_{j1}\ ,$$
$$S^{-1}\beta^2 S = i\ \text{sh}\ b\,\beta^1 + \text{ch}\ b\ \beta^2 = \beta^j O^{-1}_{j2}\ ,$$
$$S^{-1}\beta^3 S = \beta^3 = \beta^j O^{-1}_{j3}\ . \qquad (2.7.10)$$

Проверяем соотношение

$$\Delta_{(\alpha)} S = \Delta_{(\beta)} S^{-1}\ ,$$

или

$$(\text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ \alpha^3) S = (\text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ \beta^3) S^{-1}\ .$$

Вычисляем левую часть

$$(\text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ \alpha^3) S = \begin{vmatrix} \text{ch}\ b & 0 & 0 & -i\ \text{sh}\ b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\ \text{sh}\ b & 0 & 0 & \text{ch}\ b \end{vmatrix};$$

вычисляем правую часть

$$(\text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ \beta^3) S^{-1} = \begin{vmatrix} \text{ch}\ b & 0 & 0 & -i\ \text{sh}\ b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\ \text{sh}\ b & 0 & 0 & \text{ch}\ b \end{vmatrix}.$$

Действительно, тождество (2.7.9a) выполняется.

Осталось проверить (2.7.9b). С учетом соотношений для β-матриц

$$(\beta^0)^2 = -I, \qquad (\beta^1)^2 = -I, ... \qquad \beta^1\beta^2 = -\ \beta^3, \qquad \beta^2\beta^1 = +\ \beta^3 ...$$

находим

$$\Delta_{(\beta)}\ (-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\ N' = (\text{ch}\ b - i\ \text{sh}\ b\ \beta^3)\ [\ -i\partial_0 + \beta^3\partial_3 +$$
$$+ (\text{ch}\ b\ \beta^1 - i\ \text{sh}\ b\ \beta^2)\ \partial_1 + (i\ \text{sh}\ b\beta^1 + \text{ch}\ b\ \beta^2)\ \partial_2\ ]\ N' =$$
$$= [\ -i(\text{ch}\ b\ \partial_0 - \text{sh}\ b\ \partial_3) + \beta^3\ (-\text{sh}\ b\ \partial_0 + \text{ch}\ b\ \partial_3) + \beta^1\ \partial_1 + \beta^2\ \partial_2\ ]\ N'\ ,$$
$$(2.7.11a)$$

т. е.

$$\Delta_{(\beta)}(-i\partial_0 + S^{-1}\beta^i S\partial_i)\ N' = (-i\partial'_0 + \beta^1\partial_1 + \beta^2\partial_2 + \beta^3\partial'_3)\ N'\ . \qquad (2.7.11b)$$

Соотношение (2.7.9b) выполняется. Таким образом, симметрия матричного уравнения Максвелла в среде относительно преобразований Лоренца показана.

2.8 Матричное уравнение Максвелла в римановом пространстве в отсутствие материальной среды

Матричное уравнение Максвелла

$$(\alpha^0 \partial_0 + \alpha^j \partial_j)\ \Psi = J\ , \qquad \alpha^0 = -iI\ ,$$

$$\Psi = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| , \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i\mathbf{j} \end{array} \right| \qquad (2.8.1)$$

может быть обобщено на случай риманова пространства-времени. Можно ожидать существования такого обобщения в рамках общего тетрадного подхода Тетроде–Вейля–Фока–Иваненко. Возможная форма уравнения следующая:

$$\alpha^\rho(x)\ [\ \partial_\rho + A_\rho(x)\ ]\ \Psi(x) = J(x)\ ,$$

$$\alpha^\rho(x) = \alpha^c\ e^\rho_{(c)}(x)\ , \qquad A_\rho(x) = \frac{1}{2} j^{ab}\ e^\beta_{(a)}\ \nabla_\rho e_{(n)\beta}\ . \qquad (2.8.2)$$

Здесь j^{ab} – генераторы комплексного векторного представления ортогональной группы $SO(3.C)$, их явный вид будет приведен ниже. Уравнение (2.8.1) может быть представлено иначе

$$\alpha^c\ (\ e^\rho_{(c)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}\ )\ \Psi = J(x)\ , \qquad (2.8.3a)$$

где использованы коэффициенты вращения Риччи

$$\gamma_{bac} = -\gamma_{abc} = -e_{(b)\beta;\alpha} e^\beta_{(a)} e^\alpha_{(c)}\ . \qquad (2.8.3b)$$

Уравнение (2.8.1), чтобы быть корректным, должно обладать калибровочной симметрией относительно локальной группы Лоренца:

$$\Psi'(x) = S(x)\Psi(x)\ , \qquad e'_{(a)\alpha}(x) = L_a^{\ b}(x)\ e_{(b)\alpha}(x)\ ,$$

$$\alpha^\rho(x)\ [\partial_\rho + A_\rho(x)]\ \Psi(x) = J(x)\ ,$$

$$\alpha'^\rho(x)\ [\partial_\rho + A'_\rho(x)]\ \Psi'(x) = J'(x)\ . \qquad (2.8.4)$$

Евклидовые и лоренцевские вращения тетрады будем рассматривать по отдельности.

В случае евклидовых преобразований нужно ожидать реализации калибровочной симметрии согласно

$\underline{S = S[a(x), \mathbf{n}(x)]}$

$$\Psi' = S\Psi\ , \qquad \Psi = S^{-1}\Psi', \qquad SJ(x) = J'\ ,$$

$$S\alpha^\rho S^{-1}\ (\partial_\rho + SA_\rho S^{-1} + S\partial_\rho S^{-1})\ \Psi'(x) = SJ(x)\ ,$$

$$S\alpha^\rho S^{-1} = \alpha'^\rho \;, \qquad SA_\rho S^{-1} + S\partial_\rho S^{-1} = A'_\rho \;. \tag{2.8.5a}$$

В случае лоренцевских (бустовых) тетрадных преобразований нужно ожидать другой реализации калибровочной симметрии (с применением дополнительного линейного преобразования $\Delta(x)$)

$\underline{S = S[ib(x), \mathbf{n}(x)] \;, \;\; \Delta = \Delta[ib(x), \mathbf{n}(x)]}$

$$\Psi' = S\Psi \;, \qquad \Psi = S^{-1}\Psi', \qquad \Delta\, SJ(x) = J' \;,$$

$$\Delta S\alpha^\rho S^{-1} \left(\partial_\alpha + SA_\alpha S^{-1} + S\partial_\alpha S^{-1}\right) \Psi'(x) = \Delta SJ(x) \;,$$

$$\Delta\, S\alpha^\rho S^{-1} = \alpha'^\rho \;, \qquad SA_\alpha S^{-1} + S\partial_\alpha S^{-1} = A'_\alpha \;. \tag{2.8.5b}$$

Необходимые свойства симметрии для обобщенных локальных матриц $\alpha^\rho(x)$ могут быть легко установлены на основе анализа, выполненного в случае плоского пространства. Действительно, для евклидовых вращений выражение

$$S\alpha^\rho S^{-1} = S\alpha^0 e^\rho_{(0)} S^{-1} + S\alpha^l e^\rho_{(l)} S^{-1} =$$
$$= \alpha^0 e^\rho_{(0)} + \alpha^k O_{kl} e^\rho_{(l)} = \alpha^0 e^\rho_{(0)} + \alpha^k e'^\rho_{(k)} = \alpha'^\rho \;. \tag{2.8.6a}$$

В свою очередь, для локальных бустовых преобразований имеем

$$\Delta\, S\alpha^\rho(x) S^{-1} = \Delta\, S\alpha^a e^\rho_{(a)} S^{-1} =$$

$$= [\Delta\, S\alpha^a S^{-1}]\, e^\rho_{(a)} = \alpha^b L_b{}^a\, e^\rho_{(a)} = \alpha^b e'^\rho_{(b)} = \alpha'^\rho(x) \;. \tag{2.8.6b}$$

Правило преобразования для связности $A_\rho(x)$

$$SA_\rho S^{-1} + S\partial_\rho S^{-1} = A'_\rho$$

будет доказано в разделе **2.9**.

2.9 О законе преобразования комплексной векторной связности

Вначале приведем явный вид шести элементарных преобразований над Ψ из группы $SO(3, C)$:

$$S_{23} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & 0 & \sin a & \cos a \end{array} \right|, \qquad S_{01} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}\, b & -i\,\text{sh}\, b \\ 0 & 0 & i\,\text{sh}\, b & \text{ch}\, b \end{array} \right| ,$$

$$S^1 = j^{23} = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{array} \right|, \qquad N^2 = j^{01} = +i \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{array} \right|,$$

$$S_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin a & 0 & \cos a \end{vmatrix}, \qquad S_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\, b & 0 & +i\,\text{sh}\, b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\,\text{sh}\, b & 0 & \text{ch}\, b \end{vmatrix},$$

$$S^2 = j^{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix}, \qquad N^2 = j^{02} = +i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix},$$

$$S_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_{03} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}\, b & -i\,\text{sh}\, b & 0 \\ 0 & +i\,\text{sh}\, b & \text{ch}\, b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S^3 = j^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{vmatrix}, \qquad N^3 = j^{03} = +i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Генераторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$S^1 S^2 - S^2 S^1 = S^3 \; , \; N^1 N^2 - N^2 N^1 = -S^3 \; , \; S^1 N^2 - N^2 S^1 = +N^3 \; ;$$

остальные коммутационные соотношения могут быть легко написаны с привлечением соображений циклической симметрии.

Теперь обращаемся к исследованию тетрадных трансформационных свойств связности $A_\alpha(x)$:

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{2} j^{ab} \; e^{\beta}_{(a)} \; \nabla_\alpha e_{(b)\beta} =$$

$$= S^1 e^{\beta}_{(2)} \; \nabla_\alpha e_{(3)\beta} + S^2 e^{\beta}_{(3)} \; \nabla_\alpha e_{(2)\beta} + S^3 e^{\beta}_{(1)} \; \nabla_\alpha e_{(2)\beta} +$$
$$+ N^1 e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(1)\beta} + N^2 e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(2)\beta} + N^3 e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(3)\beta} \; . \qquad (2.9.1a)$$

Учитывая равенство $N_k = +iS_k$ и вводя новые переменные

$$A_{(1)\alpha} = e^{\beta}_{(2)} \; \nabla_\alpha e_{(3)\beta} + i \; e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(1)\beta} \; ,$$
$$A_{(2)\alpha} = e^{\beta}_{(3)} \; \nabla_\alpha e_{(1)\beta} + i \; e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(2)\beta} \; ,$$
$$A_{(3)\alpha} = e^{\beta}_{(1)} \; \nabla_\alpha e_{(2)\beta} + i \; e^{\beta}_{(0)} \; \nabla_\alpha e_{(3)\beta} \; , \qquad (2.9.1b)$$

можно представить выражение для связности в следующем виде:

$$A_\alpha(x) = S^k \; A_{(k)\alpha} \; . \qquad (2.9.1c)$$

С использованием обозначений

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{2} j^{ab} \; e^{\beta}_{(a)} \; \nabla_\alpha e_{(b)\beta} = \frac{1}{2} j^{ab} \; A_{(a)(b)\alpha} \; , \;\; A_{(a)(b)\alpha} = -A_{(b)(a)\alpha} \qquad (2.9.2a)$$

приведенное выше представление для $A_{(k)\alpha}$ может быть записано иначе:

$$A_{(1)\alpha} = A_{(2)(3)\alpha} + iA_{(0)(1)\alpha} \; ,$$

$$A_{(2)\alpha} = A_{(3)(1)\alpha} + iA_{(0)(2)\alpha} \; ,$$
$$A_{(3)\alpha} = A_{(1)(2)\alpha} + iA_{(0)(3)\alpha} \; . \qquad (2.9.2b)$$

Другими словами, 3-мерная величина $A_{(k)\alpha}$ (по отношению к индексу (k)) строится из "тензора" $A_{(a)(b)\alpha}$ по тому же самому правилу, по которому строится 3-мерный комплексный вектор $-i(\mathbf{E} + ic\mathbf{B})$ из тензора F_{ab}.

Покажем, что построение таких 3-мерных комплексных векторов из антисимметричных тензоров может быть формализовано с помощью простой алгебраической конструкции:

$$\mathrm{Sp}\,(\sigma^k\,\bar{\sigma}^a\sigma^b A_{ab})\;, \qquad \mathrm{Sp}\,(\sigma^k\,\sigma^a\bar{\sigma}^b\sigma^a A_{ab})\;,$$
$$\sigma^a = (I, +\sigma^k)\;, \qquad \bar{\sigma}^a = (I, -\sigma^k)\;,$$
$$\sigma^1 = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| , \qquad \sigma^2 = \left| \begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right| , \qquad \sigma^3 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right| \qquad (2.9.3)$$

и дальше

$$\frac{1}{2}\,\bar{\sigma}^a\sigma^b A_{ab} = (\bar{\sigma}^2\sigma^3 A_{23} + \bar{\sigma}^0\sigma^1 A_{01}) +$$
$$+(\bar{\sigma}^3\sigma^1 A_{31} + \bar{\sigma}^0\sigma^2 A_{02}) + (\bar{\sigma}^1\sigma^2 A_{12} + \bar{\sigma}^0\sigma^3 A_{03}) \; =$$
$$= -i[\;\sigma^1(A_{23} + iA_{01}) + \sigma^2(A_{31} + iA_{02}) + \sigma^3(A_{12} + iA_{03})\;]\;, \qquad (2.9.4a)$$
$$\frac{1}{2}\,\sigma^a\bar{\sigma}^b A_{ab} = (\sigma^2\bar{\sigma}^3 A_{23} + \sigma^0\bar{\sigma}^1 A_{01}) +$$
$$+(\sigma^3\bar{\sigma}^1 A_{31} + \sigma^0\bar{\sigma}^2 A_{02}) + (\sigma^1\bar{\sigma}^2 A_{12} + \sigma^0\bar{\sigma}^3 A_{03}) \; =$$
$$= -i[\;\sigma^1(A_{23} - iA_{01}) + \sigma^2(A_{31} - iA_{02}) + \sigma^3(A_{12} - iA_{03})\;]\;. \qquad (2.9.4b)$$

Следовательно, имеем два разложения:

$$\frac{i}{2}\,\bar{\sigma}^a\sigma^b A_{(a)(b)\alpha} = \sigma^k A_{(k)\alpha}\;, \qquad \frac{i}{2}\,\sigma^a\bar{\sigma}^b A_{(a)(b)\alpha} = \sigma^k A^*_{(k)\alpha}\;\;. \qquad (2.9.5a)$$

Из последнего следуют ковариантные формулы для $A_{(k)\alpha}$ и $A^*_{(k)\alpha}$:

$$A_{(k)\alpha} = \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\bar{\sigma}^a\sigma^b A_{(a)(b)\alpha}]\;, \qquad A^*_{(k)\alpha} = \frac{i}{4}\mathrm{Sp}\,[\sigma_k\sigma^a\bar{\sigma}^b A_{(a)(b)\alpha}]\;. \qquad (2.9.5b)$$

Теперь, используя две тетрады, связанные локальным преобразованием Лоренца

$$e'^{\alpha}_{(a)} = L_a^{\;b} e^{\alpha}_{(b)}\;, \qquad e^{\alpha}_{(a)} = (L^{-1})_a^{\;b} e'^{\alpha}_{(b)}\;, \qquad (2.9.6)$$

будем выводить правило преобразования для комплексной векторной связности:

$$A_{(a)(b)\alpha} = e^{\beta}_{(a)}\;\nabla_\alpha e_{(b)\beta} = (L^{-1})_a^{\;m} e'^{\beta}_{(m)} \nabla_\alpha (L^{-1})_b^{\;n} e'_{(n)\beta} =$$
$$= (L^{-1})_a^{\;m} e'^{\beta}_{(m)} (L^{-1})_b^{\;n}\;\;\nabla_\alpha e'_{(n)\beta} + (L^{-1})_a^{\;m} e'^{\beta}_{(m)}\;\;\frac{\partial (L^{-1})_b^{\;n}}{\partial x^\alpha}\;e'_{(n)\beta}\;,$$

т. е.

$$A_{(a)(b)\alpha} = (L^{-1})_a{}^m (L^{-1})_b{}^n \; A'_{(m)(n)\alpha} + (L^{-1})_a{}^m \; g_{(m)(n)} \; \frac{\partial (L^{-1})_b{}^n}{\partial x^\alpha} \, . \quad (2.9.7)$$

Подействуем на это уравнение слева оператором $\frac{i}{4}$ Sp $[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b \; ...]$; в результате получим

$$A_{(k)\alpha} = \frac{i}{4}\,\text{Sp}\;\left[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b A_{(a)(b)\alpha}\right] =$$

$$= \frac{i}{4}\,\text{Sp}\;\left[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b (L^{-1})_a{}^m (L^{-1})_b{}^n \; A'_{(m)(n)\alpha}\right] +$$

$$+ \frac{i}{4}\,\text{Sp}\;\left[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b (L^{-1})_a{}^m \; g_{(m)(n)} \; \frac{\partial (L^{-1})_b{}^n}{\partial x^\alpha}\right] . \quad (2.9.8)$$

Можно ожидать, что (2.9.8) эквивалентно следующему соотношению:

$$A_{(k)\alpha} = O^{-1}_{kn} A'_{(n)\alpha} + \frac{i}{4}\text{Sp}\;\left[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b (L^{-1})_a{}^m \; g_{(m)(n)} \; \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (L^{-1})_b{}^n\right] . \quad (2.9.9)$$

Это действительно так, если выполняется тождество

$$\frac{i}{4}\text{Sp}\;\left[\sigma_k \bar{\sigma}^a \sigma^b (L^{-1})_a{}^m (L^{-1})_b{}^n \; A'_{(m)(n)\alpha}\right] = O^{-1}_{kl} A'_{(l)\alpha} \, . \quad (2.9.10)$$

По соображениям циклической симметрии и равноправия индексов 1, 2, 3 будет достаточно убедиться в справедливости этого тождества для частных случаев евклидовых и лоренцевских вращений.

Сначала рассмотрим вращение в плоскости 1–2:

$$L^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad (2.9.11a)$$

построим величину (для краткости индекс α опущен и введено обозначение $\Lambda = L^{-1}$)

$$\frac{i}{4}\; \bar{\sigma}^a \sigma^b \; \Lambda_a{}^m \Lambda_b{}^n \; A'_{mn} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \; \sigma^1 (\Lambda_2{}^m \Lambda_3{}^n \; A'_{mn} + i \Lambda_0{}^m \Lambda_1{}^n \; A'_{mn}) + \right.$$

$$+ \sigma^2 (\Lambda_3{}^m \Lambda_1{}^n \; A'_{mn} + i \Lambda_0{}^m \Lambda_2{}^n \; A'_{mn}) +$$

$$\left. + \sigma^3 (\Lambda_1{}^m \Lambda_2{}^n \; A'_{mn} + i \Lambda_0{}^m \Lambda_3{}^n \; A'_{mn}) \; \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\; \sigma^1 \; [\Lambda_2^2 \Lambda_3^3 A'_{23} - \Lambda_2^1 \Lambda_3^3 A'_{31} + i \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 A'_{01} + i \Lambda_0^0 \Lambda_1^2 A'_{02} \;] +$$

$$+ \frac{1}{2}\; \sigma^2 \; [-\Lambda_3^3 \Lambda_1^2 A'_{23} + \Lambda_3^3 \Lambda_1^1 A'_{31} + i \Lambda_0^0 \Lambda_2^1 \; A'_{01} + i \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 A'_{02} \;] +$$

$$+\frac{1}{2}\,\sigma^3\ [(\Lambda_1{}^1\Lambda_2{}^2-\Lambda_1{}^2\Lambda_2{}^1)A'_{12}+i\ \Lambda_0{}^0\Lambda_3{}^3A'_{03}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\sigma^1\ (\cos a A'_{23}+\sin a A'_{31}+i\cos a A'_{01}+i\sin a A'_{02}\ )+$$

$$+\ \frac{1}{2}\,\sigma^2\ (-\sin a A'_{23}+\cos a A'_{31}-i\sin a\ A'_{01}+i\cos a\ A_{02})'+\frac{1}{2}\,\sigma^3(A'_{12}+iA'_{03})=$$

$$=\frac{1}{2}\,\sigma^1[\ \cos a\ (A'_{23}+iA'_{01})+\sin a\ (A'_{31}+iA'_{02})\ ]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\sigma^2[\ \cos a\ (A'_{31}+iA'_{02})-\sin a\ (A'_{23}+iA'_{01})\ ]-\frac{i}{2}\,\sigma^3A'_3=$$

$$=\frac{1}{2}\,[\ \sigma^1\ (\ \cos a\ A_1+\sin a\ A_2\ )+\sigma^2\ (\cos a A'_2-\sin a A'_1)+\sigma^3A'_3\ ]\ .$$

Таким образом,

$$\frac{i}{4}\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\ \Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}=$$

$$=\frac{1}{2}\,[\ \sigma^1\ (\ \cos a\ A'_1+\sin a\ A'_2\ )+\sigma^2\ (\cos a A'_2-\sin a A'_1)+\sigma^3A'_3\ ]\ ,$$

и для

$$\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\ \sigma^k\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}$$

получаем

$$\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\ \sigma^1\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}=\cos a\ A'_1+\sin a\ A'_2\ ,$$

$$\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\ \sigma^2\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}=\cos a A'_2-\sin a A'_1\ ,$$

$$\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\ \sigma^3\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}=A'_3\ ; \qquad (2.9.11b)$$

это частный случай тождества (2.9.10).

Аналогичные вычисления могут быть проделаны и для лоренцевского преобразования в плоскости 0–3; исходим из

$$L^{-1}=\left|\begin{array}{cccc}\mathrm{ch}\ b & 0 & 0 & \mathrm{sh}\ b\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \mathrm{sh}\ b & 0 & 0 & \mathrm{ch}\ b\end{array}\right|\ . \qquad (2.9.12a)$$

Рассмотрим величину (индекс α опущен и введено обозначение $\Lambda=L^{-1}$)

$$\frac{i}{4}\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\ \Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn}=$$

$$=\frac{1}{2}\ \{\ \ \sigma^1(\Lambda_2{}^m\Lambda_3{}^n\ A'_{mn}+i\Lambda_0{}^m\Lambda_1{}^n\ A'_{mn})\ +$$

$$+\ \sigma^2(\Lambda_3{}^m\Lambda_1{}^n\ A'_{mn}+i\Lambda_0{}^m\Lambda_2{}^n\ A'_{mn})\ +$$

$$+ \sigma^3(\Lambda_1{}^m\Lambda_2{}^n\ A'_{mn} + i\Lambda_0{}^m\Lambda_3{}^n\ A'_{mn})\ \ \} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \sigma^1\ \{\ [-\Lambda_2^2\Lambda_3^0 A'_{02} + \Lambda_2^2\Lambda_3^3 A'_{23} + i\ ((\Lambda_0^0\Lambda_1^1 A'_{01} + \Lambda_0^3\Lambda_1^1 A'_{31})]+$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^2\ \{\ [\Lambda_3^0\Lambda_1^1 A'_{01} + \Lambda_3^3\Lambda_1^1 A'_{31} + i\ (\Lambda_0^0\Lambda_2^2\ A'_{02} - \Lambda_0^3\Lambda_2^2 A'_{23})]+$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^3\ [\Lambda_1^1\Lambda_2^2 A'_{12} + i\ (\Lambda_0^0\Lambda_3^3 - \Lambda_0^3\Lambda_3^0)A'_{03}] =$$

$$= \frac{1}{2}\ \sigma^1\ (-\text{sh}\ b\ A'_{02} + \text{ch}\ b\ A'_{23} + i\ \text{ch}\ b\ A'_{01} + i\ \text{sh}\ b\ A'_{31})+$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^2\ (\text{sh}\ b\ A'_{01} + \text{ch}\ b\ A'_{31} + i\ \text{ch}\ b\ A'_{02} - i\ \text{sh}\ b\ A'_{23})+$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^3\ [A'_{12} + i\ (\text{ch}\ b\ \text{ch}\ b - \text{sh}\ b\ \text{sh}\ b\ )A'_{03}] =$$

$$= \frac{1}{2}\ \sigma^1\ [\text{ch}\ b\ (A'_{23} + i\ A'_{01}) + i\ \text{sh}\ b\ (A'_{31} + iA'_{02})] +$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^2\ [-i\ \text{sh}\ b\ (A'_{23} + i\ A'_{01}) + \text{ch}\ b\ (A'_{31} + i\ A'_{02})] +$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^3\ (A'_{12} + i\ A'_{03})\ ,$$

т. е.

$$\frac{i}{4}\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\ \Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \sigma^1\ [\text{ch}\ b\ (A'_{23} + i\ A'_{01}) + i\ \text{sh}\ b\ (A'_{31} + iA'_{02})] +$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^2\ [-i\ \text{sh}\ b\ (A'_{23} + i\ A'_{01}) + \text{ch}\ b\ (A'_{31} + i\ A'_{02})] +$$

$$+\frac{1}{2}\ \sigma^3\ (A'_{12} + i\ A'_{03})\ ,$$

откуда следует

$$\frac{i}{4}\text{Sp}\ \sigma^1\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn} = \text{ch}\ b\ A'_1 + i\ \text{sh}\ b\ A'_2\ ,$$

$$\frac{i}{4}\text{Sp}\ \sigma^2\ \bar{\sigma}^a\bar{\sigma}^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn} = -i\ \text{sh}\ b\ B'_1 + \text{ch}\ b\ B'_2\ ,$$

$$\frac{i}{4}\text{Sp}\ \sigma^3\ \bar{\sigma}^a\sigma^b\Lambda_a{}^m\Lambda_b{}^n\ A'_{mn} = +B'_3\ ; \qquad (2.9.12b)$$

это частный случай тождества (2.9.10).

Отметим общее соотношение, лежащее в основе изоморфизма между группой Лоренца и 3-мерной комплексной ортогональной группой $SO(3, C)$:

$$\psi_k = \frac{i}{4}\ \text{Sp}\ (\sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b\psi_{ab})\ , \qquad \psi_k^* = \frac{i}{4}\text{Sp}\ (\sigma_k\sigma^a\bar{\sigma}^b\Psi_{ab})\ ,$$

$$\frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,\left[\sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b L_a{}^m L_b{}^n\ \psi_{mn}\right] = O_{kl}\ \psi_l\ ,$$

$$\frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,\left[\sigma_k\sigma^a\bar{\sigma}^b L_a{}^m L_b{}^n\ \psi_{mn}\right] = O^*_{kl}\ \psi^*_l\ . \qquad (2.9.13)$$

Теперь готовы доказать необходимое соотношение:

$$OA_\rho O^{-1} + O\partial_\rho O^{-1} = A'_\rho\ . \qquad (2.9.14a)$$

Подставляя в (2.9.14a) разложение

$$A_\alpha = A_{(k)\alpha}\ \tau_k\ ,$$

имеем

$$O\tau^k A_{(k)\alpha}O^{-1} + O\partial_\alpha O^{-1} = \tau^k A'_{(k)\alpha}$$

или

$$\tau^l O_{lk}A_{(k)\alpha} + O\partial_\alpha O^{-1} = \tau^k A'_{(k)\alpha}\ . \qquad (2.9.14b)$$

Отсюда, используя (2.9.9), получаем

$$A_{(k)\alpha} = O^{-1}_{kn}A'_{(n)\alpha} + \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\ (\sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b(L^{-1})_a{}^m\ g_{(m)(n)}\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(L^{-1})_b{}^n\ ]$$

или

$$\tau^l O_{lk}\left[O^{-1}_{kn}A'_{(n)\alpha} + \frac{i}{4}\mathrm{Sp}\,[\ \sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b(L^{-1})_a{}^m\ g_{(m)(n)}\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(L^{-1})_b{}^n\ ]\right] +$$

$$+\ O\partial_\alpha O^{-1} = \tau^k A'_{(k)\alpha}\ .$$

Следовательно, должно выполняться тождество

$$\tau^l O_{lk}\ \frac{i}{2}\mathrm{Sp}\,[\ \sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b(L^{-1})_a{}^m\ g_{(m)(n)}\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(L^{-1})_b{}^n\ ] + O\partial_\alpha O^{-1} = 0\ , \quad (2.9.15)$$

или иначе

$$\tau^l O_{lk}\ \frac{i}{4}\mathrm{Sp}\,[\ \sigma_k\bar{\sigma}^a\sigma^b C_{ab,\alpha}\ ]\ +\ O\partial_\alpha O^{-1} = 0\ , \qquad (2.9.16)$$

где

$$C_{ab,\alpha} = (L^{-1})_a{}^m\ g_{(m)(n)}\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(L^{-1})_b{}^n\ . \qquad (2.9.17)$$

Достаточно доказать справедливость тождества (2.9.15) для частных случаев элементарных преобразований.

Для евклидового вращения 1–2 имеем

$$L^{-1} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|\ , \qquad \partial_\alpha L^{-1} = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & -\cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|\partial_\alpha a\ ,$$

(2.9.18a)

$$
C_{ab,\alpha} = (L^{-1})_a{}^m \;\; g_{(m)(n)} \;\; \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (L^{-1})_b{}^n =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & -\cos a & \sin a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \partial_\alpha a =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \partial_\alpha a \qquad (2.9.18b)
$$

и дальше

$$
\frac{i}{4} \; \bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha} = \frac{1}{2} \sigma^3 \; \partial_\alpha a \; , \qquad \frac{i}{4} \mathrm{Sp} \; [\; \sigma^k \bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha} \;] = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \partial_\alpha a \; ,
$$

т. е.

$$
O_{lk} = \left| \begin{array}{ccc} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| , \qquad \tau^l O_{lk} \; \frac{i}{4} \mathrm{Sp} \; [\; \sigma^k \bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha} \;] = + \; \tau^3 \; \partial_\alpha a \; . \qquad (2.9.18c)
$$

Сравнивая это с

$$
O \partial_\alpha O^{-1} = \left| \begin{array}{ccc} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} -\sin a & \cos a & 0 \\ -\cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \partial_\alpha a =
$$

$$
= \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \partial_\alpha = - \tau^3 \; \partial_\alpha a \; , \qquad (2.9.18d)
$$

заключаем, что тождество (2.9.16) выполняется.

Аналогично рассматриваем преобразование Лоренца в плоскости 0–3:

$$
L^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} \mathrm{ch}\; b & 0 & 0 & \mathrm{sh}\; b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\; b & 0 & 0 & \mathrm{ch}\; b \end{array} \right| , \qquad \partial_\alpha L^{-1} = \left| \begin{array}{cccc} \mathrm{sh}\; b & 0 & 0 & \mathrm{ch}\; b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{ch}\; b & 0 & 0 & \mathrm{sh}\; b \end{array} \right| \partial_\alpha b \; , \quad (2.9.19a)
$$

$$
C_{ab,\alpha} = (L^{-1})_a{}^m \;\; g_{(m)(n)} \;\; \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (L^{-1})_b{}^n =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} \mathrm{ch}\; b & 0 & 0 & \mathrm{sh}\; b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}\; b & 0 & 0 & \mathrm{ch}\; b \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} \mathrm{sh}\; b & 0 & 0 & \mathrm{ch}\; b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{ch}\; b & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\; b \end{array} \right| \partial_\alpha b = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \partial_\alpha b \qquad (2.9.19b)
$$

и дальше

$$\frac{i}{4}\,\bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha} = +\frac{i}{2}\sigma^3\,\partial_\alpha b\,, \qquad \frac{i}{4}\mathrm{Sp}\,[\,\sigma^k \bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha}\,] = +i\,\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\partial_\alpha b\,,$$

т. е.

$$O_{lk} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\,b & -i\,\mathrm{sh}\,b & 0 \\ +i\,\mathrm{sh}\,b & \mathrm{ch}\,b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \tau^l O_{lk}\,\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\,[\,\sigma^k \bar{\sigma}^a \sigma^b C_{ab,\alpha}\,] = +i\,\tau^3\,\partial_\alpha b\,; \tag{2.9.19c}$$

сравнивая это с

$$O\partial_\alpha O^{-1} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\,b & -i\,\mathrm{sh}\,b & 0 \\ +i\,\mathrm{sh}\,b & \mathrm{ch}\,b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \mathrm{sh}\,b & +i\,\mathrm{ch}\,b & 0 \\ -i\,\mathrm{ch}\,b & \mathrm{sh}\,b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\partial_\alpha b = -i\tau^3 \partial_\alpha b\,, \tag{2.9.19d}$$

заключаем, что тождество (2.9.16) выполняется.

Таким образом, матричное уравнение Максвелла в римановом пространстве-времени

$$\alpha^\rho(x)\,[\partial_\rho + A_\rho(x)]\,\Psi(x) = J(x) \tag{2.9.20}$$

обладает всеми необходимыми для его корректности свойствами симметрии относительно локальной тетрадной группы Лоренца.

2.10 Матричное уравнение Максвелла в искривленном пространстве в материальной среде

Теперь обратимся к матричной форме уравнений Максвелла в среде и обобщим ее на случай риманова пространства-времени. Исходим из уравнения

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i)\,M + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i)\,N = J\,,$$
$$M' = SM\,, \qquad N' = S^* N\,; \tag{2.10.1}$$

в качестве обобщения предлагаем следующее уравнение:

$$\alpha_\rho(x)(\partial_\rho + A_\rho)\,M + \beta_\rho(x)(\partial_\rho + B_\rho)\,N = J\,, \tag{2.10.2}$$

где нужно вводить две связности $A(x)$ и $B_\rho = A^*(x)$, соответствующие полям $M(x)$ и $N(x)$.

Евклидовые и лоренцевские вращения рассматриваем по отдельности. В случае евклидовых преобразований нужно ожидать следующей симметрии:

$$
\begin{gathered}
S^{*} = S\ , \qquad S(x)J(x) = J'(x)\ , \\
M'(x) = S(x)M(x)\ , \qquad N'(x) = S(x)N(x)\ , \qquad (2.10.3a)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
S\alpha^{\rho}S^{-1}\left(\partial_{\rho} + SA_{\rho}S^{-1} + S\partial_{\rho}S^{-1}\right) M'(x) + \\
+S\beta^{\rho}S^{-1}\left(\partial_{\rho} + SB_{\rho}S^{-1} + S\partial_{\rho}S^{-1}\right) N'(x) = SJ(x)\ , \qquad (2.10.3b)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
S\alpha^{\rho}S^{-1} = \alpha^{'\rho}\ , \qquad S\beta^{\rho}S^{-1} = \beta^{'\rho}\ , \\
SA_{\rho}S^{-1} + S\partial_{\rho}S^{-1} = A'_{\rho}\ , \qquad SB_{\rho}S^{-1} + S\partial_{\rho}S^{-1} = B'_{\rho}\ . \qquad (2.10.3c)
\end{gathered}
$$

В случае лоренцевских преобразований нужно ожидать следующей симметрии:

$$
\begin{gathered}
S^{*} = S^{-1}\ , \qquad \Delta_{\alpha}(x)\ , \qquad \Delta_{\alpha}(x)\ S(x)\ J(x) = J'\ , \\
M(x)' = S(x)M(x)\ , \qquad N'(x) = S^{*}(x)N'(x) = S^{-1}(x)N'(x)\ , \qquad (2.10.4a)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\Delta_{\alpha}S\alpha^{\rho}S^{-1}\left(\partial_{\alpha} + SA_{\alpha}S^{-1} + S\partial_{\alpha}S^{-1}\right) M'(x) + \\
+\Delta_{\alpha}S^{2}\ S^{-1}\beta^{\rho}S\left(\partial_{\alpha} + S^{-1}B_{\alpha}S + S^{-1}\partial_{\alpha}S\right) N'(x) = \Delta SJ(x)\ , \qquad (2.10.4b)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\Delta_{\alpha}\ S\alpha^{\rho}S^{-1} = \alpha^{'\rho}\ , \qquad SA_{\alpha}S^{-1} + S\partial_{\alpha}S^{-1} = A'_{\alpha}\ , \\
\Delta_{\alpha}S^{2}\ S^{-1}\beta^{\rho}S = \beta^{'\rho}\ , \qquad S^{-1}B_{\alpha}S + S^{-1}\partial_{\alpha}S = B'_{\alpha}\ . \qquad (2.10.4c)
\end{gathered}
$$

В добавление к вычислениям, проведенным в разделах **2.8, 2.9**, нужно исследовать только часть уравнения, в которую вовлечены матрицы β^{ρ} и связность B_{ρ}. Для евклидовых вращений имеем

$$
\begin{gathered}
S\beta^{\rho}S^{-1} = S\beta^{0}e^{\rho}_{(0)}S^{-1} + S\beta^{l}e^{\rho}_{(l)}S^{-1} = \\
= \beta^{0}e^{\rho}_{(0)} + \beta^{k}O_{kl}e^{\rho}_{(l)} = \beta^{0}e^{\rho}_{(0)} + \beta^{k}e^{'\rho}_{(k)} = \beta^{'\rho}\ . \qquad (2.10.5a)
\end{gathered}
$$

Для лоренцевских вращений необходимые свойства симметрии для матриц $\beta^{\rho}(x)$ также выполняются (см. (2.7.8), (2.7.9)):

$$
\begin{gathered}
\Delta S^{2}\ S^{-1}\beta^{\rho}(x)S = \Delta S^{2}\ S^{-1}\beta^{a}e^{\rho}_{(a)}S = \\
= \left[\Delta S^{2}\ (S^{-1}\alpha^{a}S)\ \right]\ e^{\rho}_{(a)} = \alpha^{b}L_{b}{}^{a}\ e^{\rho}_{(a)} = \beta^{b}e^{'\rho}_{(b)} = \beta^{'\rho}(x)\ . \qquad (2.10.5b)
\end{gathered}
$$

Трансформационные свойства связностей описываются формулами

$$
SA_{\rho}S^{-1} + S\partial_{\rho}S^{-1} = A'_{\rho}\ , \qquad S^{-1}B_{\rho}S + S^{-1}\partial_{\rho}S = B'_{\rho}\ ; \qquad (2.10.6)
$$

фактически это комплексно сопряженные друг другу соотношения, поскольку имеют место равенства

$$
S^{-1} = S^{*}, \qquad S = (S^{*})^{-1}, \qquad (B_{\alpha})^{*} = A_{\alpha}\ ,
$$

поэтому никаких дополнительных вычислений здесь проводить не нужно.

2.11 Тетрадное представление матричного уравнения, явная компонентная формулировка

Теперь из матричного уравнения Максвелла в римановом пространстве

$$\alpha^c \; (\; e^{\rho}_{(c)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \;) \; \Psi = J(x) \; ,$$

$$\alpha^0 = -iI \; , \qquad \Psi = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| \; , \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i\mathbf{j} \end{array} \right| \tag{2.11.1}$$

будем получать общековариантную тензорную формулировку. В более детальной записи это уравнение имеет вид

$$-i \; (\; e^{\rho}_{(0)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} \;) \Psi + \alpha^k \; (\; e^{\rho}_{(k)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} \;) \Psi = J(x) \; . \tag{2.11.2}$$

Учитывая

$$\frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} = [s^1 (\gamma_{230} + i\gamma_{010}) + s^2 (\gamma_{310} + i\gamma_{020}) + s^3 (\gamma_{120} + i\gamma_{030}) \;] \; ,$$

$$\frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} = [s^1 (\gamma_{23k} + i\gamma_{01k}) + s^2 (\gamma_{31k} + i\gamma_{02k}) + s^3 (\gamma_{12k} + i\gamma_{03k}) \;] \tag{2.11.3}$$

и используя обозначения

$$e^{\rho}_{(0)} \partial_\rho = \partial_{(0)} \; , \qquad e^{\rho}_{(k)} \partial_\rho = \partial_{(k)} \; ,$$

$$(\gamma_{01a}, \gamma_{02a}, \gamma_{03a}) = \mathbf{v}_a \; , \qquad (\gamma_{23a}, \gamma_{31a}, \gamma_{12a}) = \mathbf{p}_a \; , \qquad a = 0, 1, 2, 3 \; , \tag{2.11.4}$$

уравнение (2.11.2) можно представить как

$$-i \; [\; \partial_{(0)} + \mathbf{s} (\mathbf{p}_0 + i\mathbf{v}_0 \;) \;] \; \Psi + \alpha^k \; [\;\; \partial_{(k)} + \mathbf{s} (\mathbf{p}_k + i\mathbf{v}_k \;) \;] \; \Psi = J(x) \; ,$$

или

$$(\; \alpha^k \; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| -$$

$$-i \; (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i \; \mathbf{j} \end{array} \right| \; . \tag{2.11.5}$$

Выделим из (2.11.5) вещественную и мнимую части:

$$(\; \alpha^k \; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} \end{array} \right| + (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \left| \begin{array}{c} 0 \\ c\mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ 0 \end{array} \right| \; , \tag{2.11.6}$$

$$(\; \alpha^k \; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \left| \begin{array}{c} 0 \\ c\mathbf{B} \end{array} \right| - (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{j} \end{array} \right| \; . \tag{2.11.7}$$

Принимая во внимания тождества

$$\alpha^k\ \partial_{(k)} \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{(k)}E_k \\ \partial_{(2)}E_3 - \partial_{(3)}E_2 \\ \partial_{(3)}E_1 - \partial_{(1)}E_3 \\ \partial_{(1)}E_2 - \partial_{(2)}E_1 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{sv}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ v_{20}E_3 - v_{30}E_2 \\ v_{30}E_1 - v_{10}E_3 \\ v_{10}E_2 - v_{20}E_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{gathered} \alpha^k\ \mathbf{sp}_k = \\ = \alpha^1(S^1p_{11} + S^2p_{21} + S^3p_{31}) + \\ +\alpha^2(S^1p_{12} + S^2p_{22} + S^3p_{32}) + \\ +\alpha^3(S^1p_{13} + S^2p_{23} + S^3p_{33}) = \end{gathered}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & p_{32} - p_{23} & -p_{31} + p_{13} & p_{21} - p_{12} \\ 0 & -p_{22} - p_{33} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{21} & -p_{11} - p_{33} & p_{23} \\ 0 & p_{31} & p_{32} & -p_{11} - p_{22} \end{vmatrix},$$

$$\alpha^k\ \mathbf{sp}_k \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(p_{23} - p_{32})E_1 - (p_{31} - p_{13})E_2 - (p_{12} - p_{21})E_3 \\ -(p_{22} + p_{33})E_1 + p_{12}E_2 + p_{13}E_3 \\ p_{21}E_1 - (p_{11} + p_{33})E_2 + p_{23}E_3 \\ p_{31}E_1 + p_{32}E_2 - (p_{11} + p_{22})E_3 \end{vmatrix},$$

уравнения (2.11.6) и (2.11.7) приводим к виду

$$\begin{gathered} \left(\begin{vmatrix} \partial_{(k)}E_k \\ \partial_{(2)}E_3 - \partial_{(3)}E_2 \\ \partial_{(3)}E_1 - \partial_{(1)}E_3 \\ \partial_{(1)}E_2 - \partial_{(2)}E_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ v_{20}E_3 - v_{30}E_2 \\ v_{30}E_1 - v_{10}E_3 \\ v_{10}E_2 - v_{20}E_1 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} -(p_{23} - p_{32})E_1 - (p_{31} - p_{13})E_2 - (p_{12} - p_{21})E_3 \\ -(p_{22} + p_{33})E_1 + p_{12}E_2 + p_{13}E_3 \\ p_{21}E_1 - (p_{11} + p_{33})E_2 + p_{23}E_3 \\ p_{31}E_1 + p_{32}E_2 - (p_{11} + p_{22})E_3 \end{vmatrix} \right) + \\ + \left(\partial_{(0)} \begin{vmatrix} 0 \\ cB_{1)} \\ cB_2 \\ cB_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ p_{20}cB_3 - p_{30}cB_2 \\ p_{30}cB_1 - p_{10}cB_3 \\ p_{10}cB_2 - p_{20}cB_1 \end{vmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{vmatrix} -(v_{23} - v_{32})cB_1 - (v_{31} - v_{13})cB_2 - (v_{12} - v_{21})cB_3 \\ -(v_{22} + v_{33})cB_1 + v_{12}cB_2 + v_{13}cB_3 \\ v_{21}cB_1 - (v_{11} + v_{33})cB_2 + v_{23}cB_3 \\ v_{31}cB_1 + v_{32}cB_2 - (v_{11} + v_{22})cB_3 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} \rho(x) \\ 0 \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{2.11.8}$$

и

$$
\left(\left| \begin{array}{c} \partial_{(k)} cB_k \\ \partial_{(2)} cB_3 - \partial_{(3)} cB_2 \\ \partial_{(3)} cB_1 - \partial_{(1)} cB_3 \\ \partial_{(1)} cB_2 - \partial_{(2)} cB_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 0 \\ v_{20} cB_3 - v_{30} cB_2 \\ v_{30} cB_1 - v_{10} cB_3 \\ v_{10} cB_2 - v_{20} cB_1 \end{array} \right| + \right.
$$

$$
+ \left. \left| \begin{array}{c} -(p_{23} - p_{32}) cB_1 - (p_{31} - p_{13}) cB_2 - (p_{12} - p_{21}) cB_3 \\ -(p_{22} + p_{33}) cB_1 + p_{12} cB_2 + p_{13} cB_3 \\ p_{21} cB_1 - (p_{11} + p_{33}) cB_2 + p_{23} cB_3 \\ p_{31} cB_1 + p_{32} cB_2 - (p_{11} + p_{22}) cB_3 \end{array} \right| \right) -
$$

$$
- \left(\partial_{(0)} \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 0 \\ p_{20} E_3 - p_{30} E_2 \\ p_{30} E_1 - p_{10} E_3 \\ p_{10} E_2 - p_{20} E_1 \end{array} \right| - \right.
$$

$$
- \left. \left| \begin{array}{c} -(v_{23} - v_{32}) E_1 - (v_{31} - v_{13}) E_2 - (v_{12} - v_{21}) E_3 \\ -(v_{22} + v_{33}) E_1 + v_{12} E_2 + v_{13} E_3 \\ v_{21} E_1 - (v_{11} + v_{33}) E_2 + v_{23} E_3 \\ v_{31} E_1 + v_{32} E_2 - (v_{11} + v_{22}) E_3 \end{array} \right| \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{j} \end{array} \right| .
$$

(2.11.9)

Выпишем получающиеся отдельные уравнения в явном виде:

$$
\partial_{(k)} E_k - [(p_{23} - p_{32}) E_1 + (p_{31} - p_{13}) E_2 + (p_{12} - p_{21}) E_3] +
$$

$$
+ [(v_{23} - v_{32}) cB_1 + (v_{31} - v_{13}) cB_2 + (v_{12} - v_{21}) cB_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \ ,
$$

(2.11.10a)

$$
\partial_{(k)} cB_k - [(p_{23} - p_{32}) cB_1 + (p_{31} - p_{13}) cB_2 + (p_{12} - p_{21}) cB_3] -
$$

$$
- [(v_{23} - v_{32}) E_1 + (v_{31} - v_{13}) E_2 + (v_{12} - v_{21}) E_{(3)} = 0 \ ,
$$

(2.11.10b)

$$
(\partial_{(2)} E_3 - \partial_{(3)} E_2) + (v_{20} E_3 - v_{30} E_2) + [-(p_{22} + p_{33}) E_1 + p_{12} E_2 + p_{13} E_3] +
$$

$$
+ \partial_{(0)} cB_1 + (p_{20} cB_3 - p_{30} cB_2) - [-(v_{22} + v_{33}) cB_1 + v_{12} cB_2 + v_{13} cB_3] = 0 \ ,
$$

(2.11.11a)

$$
(\partial_{(2)} cB_3 - \partial_{(3)} cB_2) + (v_{20} cB_3 - v_{30} cB_2) + [-(p_{22} + p_{33}) cB_1 + p_{12} cB_2 + p_{13} cB_3] -
$$

$$
- \partial_{(0)} E_1 - (p_{20} E_3 - p_{30} E_2) + [-(v_{22} + v_{33}) E_1 + v_{12} E_2 + v_{13} E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^1 \ ,
$$

(2.11.11b)

$$
(\partial_{(3)} E_1 - \partial_{(1)} E_3) + (v_{30} E_1 - v_{10} E_3) + [p_{21} E_1 - (p_{11} + p_{33}) E_2 + p_{23} E_3] +
$$

$$+\partial_{(0)}cB_2 + (p_{30}cB_1 - p_{10}cB_1) - [v_{21}cB_1 - (v_{11} + v_{33})cB_2 + v_{23}cB_3] = 0 \; , \tag{2.11.12a}$$

$$(\partial_{(3)}cB_1 - \partial_{(0)}cB_3) + (v_{30}cB_1 - v_{10}cB_3) + [+p_{31}cB_1 - (p_{11} + p_{33})cB_2 + p_{23}cB_3] -$$
$$-\partial_{(0)}E_2 - (p_{30}E_1 - p_{10}E_3) + [v_{21}E_1 - (v_{11} + v_{33})E_2 + v_{23}E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^2 \; , \tag{2.11.12b}$$

$$(\partial_{(1)}E_2 - \partial_{(2)}E_1) + (v_{10}E_2 - v_{20}E_1) + [p_{31}E_1 + p_{32}E_2 - (p_{11} + p_{22})E_3] +$$
$$+\partial_{(0)}cB_3 + (p_{10}cB_2 - p_{20}cB_1) - [v_{31}cB_1 + v_{32}cB_2 - (v_{11} + v_{22})cB_3] = 0 \; , \tag{2.11.13a}$$

$$(\partial_{(1)}cB_2 - \partial_{(2)}cB_1) + (v_{10}cB_2 - v_{20}cB_1) + [+p_{31}cB_1 + p_{32}cB_2 - (p_{11} + p_{22})cB_3] -$$
$$-\partial_{(0)}E_3 - (p_{10}E_2 - p_{20}E_1) + [v_{31}E_1 + v_{32}E_2 - (v_{11} + v_{22})E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^3 \; . \tag{2.11.13b}$$

В следующем разделе покажем, что эти уравнения эквивалентны системе общековариантных тензорных уравнений Максвелла в тетрадном представлении.

2.12 Связь между матричной и тензорной формой уравнений Максвелла в римановом пространстве

В общековариантных тензорных уравнениях Максвелла (в отсутствие материальной среды)

$$\nabla^\alpha F^{\beta\gamma} + \nabla^\beta F^{\gamma\alpha} + \nabla^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \; , \qquad \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{1}{\epsilon_0}\, j^\alpha \tag{2.12.1}$$

перейдем к тетрадным компонентам

$$\nabla^\alpha \, (e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} F^{(b)(c)}) + \nabla^\beta \, (e^\gamma_{(c)} e^\alpha_{(a)} F^{(c)(a)}) + \nabla^\gamma \, (e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} F^{(a)(b)}) = 0 \; ,$$

$$\nabla_\beta \; e^\beta_{(b)} e^\alpha_{(a)} F^{(b)(a)} = \frac{1}{\epsilon_0} \; e^\alpha_{(a)} j^{(a)} \; ,$$

или

$$g^{\alpha\rho} \nabla_\rho \, (e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} F^{(b)(c)}) + g^{\beta\rho} \nabla_\rho \, (e^\gamma_{(c)} e^\alpha_{(a)} F^{(c)(a)}) + g^{\gamma\rho} \nabla_\rho \, (e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} F^{(a)(b)}) = 0 \; ,$$

$$\nabla_\beta e^\beta_{(b)} e^\alpha_{(a)} F^{(b)(a)} = \frac{1}{\epsilon_0} \; e^\alpha_{(a)} j^{(a)} \; .$$

Учитывая свойства ковариантной производной, получаем

$$g^{\alpha\rho} \; e^\beta_{(b);\rho} \; e^\gamma_{(c)} \; F^{(b)(c)} + g^{\alpha\rho} \; e^\beta_{(b)} \; e^\gamma_{(c);\rho} \; F^{(b)(c)} + g^{\alpha\rho} \; e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} \; \partial_\rho F^{(b)(c)} +$$

$$+g^{\beta\rho}\ e^{\gamma}_{(c);\rho}\ e^{\alpha}_{(a)}\ F^{(c)(a)} + g^{\beta\rho}\ e^{\gamma}_{(c)}\ e^{\alpha}_{(a);\rho}\ F^{(c)(a)} + g^{\beta\rho} e^{\gamma}_{(c)} e^{\alpha}_{(a)}\ \partial_\rho\ F^{(c)(a)} +$$

$$+g^{\gamma\rho}\ e^{\alpha}_{(a);\rho}\ e^{\beta}_{(b)}\ F^{(a)(b)} + g^{\gamma\rho}\ e^{\alpha}_{(a)}\ \nabla_\rho e^{\beta}_{(b);\rho}\ F^{(a)(b)} + g^{\gamma\rho}\ e^{\alpha}_{(a)}\ e^{\beta}_{(b)}\ \partial_\rho F^{(a)(b)} = 0\ , \tag{2.12.2a}$$

$$e^{\beta}_{(b);\beta}\ e^{\alpha}_{(a)}\ F^{(b)(a)} + e^{\beta}_{(b)}\ e^{\alpha}_{(a);\beta}\ F^{(b)(a)} + e^{\beta}_{(b)}\ e^{\alpha}_{(a)}\ \partial_\beta F^{(b)(a)} = \frac{1}{\epsilon_0}\ e^{\alpha}_{(a)} j^{(a)}\ . \tag{2.12.2b}$$

Принимая во внимание определение коэффициентов вращения Риччи

$$\gamma_{abc} = -e_{(a)\alpha;\beta}\ e^{\alpha}_{(b)} e^{\beta}_{(c)}\ ,$$

умножаем уравнение (2.12.2a) на $e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)}$:

$$e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\alpha\rho} e^{\beta}_{(b);\rho} e^{\gamma}_{(c)} F^{(b)(c)} + e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\alpha\rho} e^{\beta}_{(b)} e^{\gamma}_{(c);\rho} F^{(b)(c)} +$$

$$+e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\alpha\rho} e^{\beta}_{(b)} e^{\gamma}_{(c)} \partial_\rho F^{(b)(c)} +$$

$$+e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\beta\rho} e^{\gamma}_{(c);\rho} e^{\alpha}_{(a)} F^{(c)(a)} + e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\beta\rho} e^{\gamma}_{(c)}\ e^{\alpha}_{(a);\rho} F^{(c)(a)} +$$

$$+e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\beta\rho} e^{\gamma}_{(c)} e^{\alpha}_{(a)} \partial_\rho F^{(c)(a)} +$$

$$+e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\gamma\rho} e^{\alpha}_{(a);\rho} e^{\beta}_{(b)} F^{(a)(b)} + e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\gamma\rho} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b);\rho} F^{(a)(b)} +$$

$$+e_{\alpha(n)} e_{\beta(m)} e_{\gamma(l)} g^{\gamma\rho} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)} \partial_\rho F^{(a)(b)} = 0\ ,$$

т. е.

$$(e^{\beta}_{(b);\rho} e_{\beta(m)} e^{\rho}_{(n)})\ F^{(b)}_{\ \ (l)} + (e^{\gamma}_{(c);\rho} e_{\gamma(l)} e^{\rho}_{(n)})\ F_{(m)}^{\ \ \ (c)} + e^{\rho}_{(n)} \partial_\rho F_{(m)(l)} +$$

$$+(e^{\gamma}_{(c);\rho} e_{\gamma(l)} e^{\rho}_{(m)})\ F^{(c)}_{\ \ (n)} + (e^{\alpha}_{(a);\rho} e_{\alpha(n)} e^{\rho}_{(m)})\ F_{(l)}^{\ \ \ (a)} + e^{\rho}_{(m)}\ \partial_\rho\ F_{(l)(n)} +$$

$$+(e^{\alpha}_{(a);\rho} e_{\alpha(n)} e^{\rho}_{(l)})\ F^{(a)}_{\ \ (m)} + (e^{\beta}_{(b);\rho} e_{\beta(m)} e^{\rho}_{(l)})\ F_{(n)}^{\ \ \ (b)} + e^{\rho}_{(l)}\ \partial_\rho F_{(n)(m)} = 0$$

и дальше

$$-\gamma_{bmn}\ F^{(b)}_{\ \ (l)} - \gamma_{cln}\ F_{(m)}^{\ \ \ (c)} + \partial_{(n)} F_{(m)(l)} -$$

$$-\gamma_{clm}\ F^{(c)}_{\ \ (n)} - \gamma_{anm}\ F_{(l)}^{\ \ \ (a)} +\ \partial_{(m)}\ F_{(l)(n)} -$$

$$-\gamma_{anl}\ F^{(a)}_{\ \ (m)} - \gamma_{bml}\ F_{(n)}^{\ \ \ (b)} +\ \partial_{(l)} F_{(n)(m)} = 0\ .$$

Последнее может быть переписано следующим образом:

$$\partial_{(n)} F_{(m)(l)} + \gamma_{mbn}\ F^{(b)}_{\ \ (l)} - \gamma_{lbn}\ F^{(b)}_{\ \ (m)} +$$

$$+\ \partial_{(m)}\ F_{(l)(n)}\ + \gamma_{lbm}\ F^{(b)}_{\ \ (n)} - \gamma_{nbm}\ F^{(b)}_{\ \ (l)} +$$

$$+\ \partial_{(l)} F_{(n)(m)} + \gamma_{nbl}\ F^{(b)}_{\ \ (m)} - \gamma_{mbl}\ F^{(b)}_{\ \ (n)} = 0\ . \tag{2.12.3a}$$

Аналогично умножим уравнение (2.12.2b) на $e_{\alpha(c)}$:

$$e_{\alpha(c)}\ e^{\beta}_{(b);\beta}\ e^{\alpha}_{(a)}\ F^{(b)(a)} + e_{\alpha(c)}\ e^{\beta}_{(b)}\ e^{\alpha}_{(a);\beta}\ F^{(b)(a)} +$$

$$+ e_{\alpha(c)}\ e^{\beta}_{(b)}\ e^{\alpha}_{(a)}\ \partial_{\beta} F^{(b)(a)} = e_{\alpha(c)}\ \frac{1}{\epsilon_0}\ e^{\alpha}_{(a)} j^{(a)}\ ,$$

т. е.

$$e^{\beta}_{(b);\beta}\ F^{(b)}_{\ \ (c)} + (e^{\alpha}_{(a);\beta} e_{\alpha(c)}\ e^{\beta}_{(b)})\ F^{(b)(a)} + e^{\beta}_{(b)}\ \partial_{\beta} F^{(b)}_{\ \ (c)} = \frac{1}{\epsilon_0}\ j_{(c)}$$

или

$$\partial_{(b)} F^{(b)}_{\ \ (c)} + e^{\beta}_{(b);\beta}\ F^{(b)}_{\ \ (c)} + \gamma_{cab}\ F^{(b)(a)} = \frac{1}{\epsilon_0}\ j_{(c)}\ . \qquad (2.12.3b)$$

Соотношения (2.12.3a), (2.12.3b) представляют собой уравнения Максвелла в тетрадной форме; рассмотрим их при частных значениях индексов

$$n, m, l = 1, 2, 3, \qquad 0, 2, 3, \qquad 0, 3, 1, \qquad 0, 1, 2$$

$$\text{и} \qquad c = 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3\ .$$

Пусть $n, m, l = 1, 2, 3$:

$$\partial_{(1)} F_{(2)(3)} + \gamma_{2b1}\ F^{(b)}_{\ \ (3)} - \gamma_{3b1}\ F^{(b)}_{\ \ (2)} +$$

$$+ \partial_{(2)}\ F_{(3)(1)}\ + \gamma_{3b2}\ F^{(b)}_{\ \ (1)} - \gamma_{1b2}\ F^{(b)}_{\ \ (3)} +$$

$$+ \partial_{(3)} F_{(1)(2)} + \gamma_{1b3}\ F^{(b)}_{\ \ (2)} - \gamma_{2b3}\ F^{(b)}_{\ \ (1)} = 0\ ,$$

или

$$\partial_{(1)} F_{(2)(3)} + \gamma_{201} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{211} F^{(1)}_{\ \ (3)} - \gamma_{301} F^{(0)}_{\ \ (2)} - \gamma_{311} F^{(1)}_{\ \ (2)} +$$

$$+ \partial_{(2)}\ F_{(3)(1)}\ + \gamma_{302} F^{(0)}_{\ \ (1)} + \gamma_{322} F^{(2)}_{\ \ (1)} - \gamma_{102} F^{(0)}_{\ \ (3)} - \gamma_{122} F^{(2)}_{\ \ (3)}\ ) +$$

$$+ \partial_{(3)} F_{(1)(2)} + \gamma_{103} F^{(0)}_{\ \ (2)} + \gamma_{133} F^{(3)}_{\ \ (2)} - \gamma_{203} F^{(0)}_{\ \ (1)} - \gamma_{233} F^{(3)}_{\ \ (1)} = 0\ .$$

Последнее с использованием обозначений

$$(F_{(2)(3)}, F_{(3)(1)}, F_{(1)(2)}) = (cB_{(i)})\ , \qquad (F_{(0)(1)}, F_{(0)(2)}, F_{(0)(3)} = (E_{(i)})$$

переписывается в виде

$$\partial_{(k)} cB_{(k)} - v_{21} E_{(3)} - p_{31} cB_{(2)} + v_{31} E_{(2)} + p_{21} cB_{(3)} -$$

$$- v_{32} E_{(1)} - p_{12} cB_{(3)} + v_{12} E_{(3)} + p_{32} cB_{(1)} -$$

$$- v_{13} E_{(2)} - p_{23} cB_{(1)} + v_{23} E_{(1)} + p_{13} cB_{(2)} = 0\ , \qquad (2.12.4a)$$

или

$$- \partial_{(k)} cB_{(k)} + [\ (p_{23} - p_{32}) cB_{(1)} + (p_{31} - p_{13}) cB_{(2)} + (p_{12} - p_{21}) cB_{(3)}\ ] -$$

$$-[\ (v_{23}-v_{32})E_{(1)}+(v_{31}-v_{13})E_{(2)}+(v_{12}-v_{21})E_{(3)}\ ]=0\ .$$

Полученное совпадает с уравнением

$$\partial_{(k)}cB_k-[(p_{23}-p_{32})cB_1+(p_{31}-p_{13})cB_2+(p_{12}-p_{21})cB_3]-$$
$$-[(v_{23}-v_{32})E_1+(v_{31}-v_{13})E_2+(v_{12}-v_{21})E_3=0\ , \tag{2.12.4b}$$

если

$$E_k=E_{(k)}=\mathbf{E}\ ,\qquad B_k=-B_{(k)}=\mathbf{B}\ . \tag{2.12.4c}$$

Теперь, пусть $n,m,l=0,1,2$:

$$\partial_{(0)}F_{(1)(2)}+\gamma_{1b0}\ F^{(b)}_{\ \ (2)}-\gamma_{2b0}\ F^{(b)}_{\ \ (1)}+$$
$$+\partial_{(1)}\ F_{(2)(0)}\ +\gamma_{2b1}\ F^{(b)}_{\ \ (0)}-\gamma_{0b1}\ F^{(b)}_{\ \ (2)}+$$
$$+\partial_{(2)}F_{(0)(1)}+\gamma_{0b2}\ F^{(b)}_{\ \ (1)}-\gamma_{1b2}F^{(b)}_{\ \ (0)}=0 \tag{2.12.5a}$$

и дальше

$$\partial_{(0)}F_{(1)(2)}+\gamma_{100}\ F^{(0)}_{\ \ (2)}+\gamma_{130}\ F^{(3)}_{\ \ (2)}-\gamma_{200}\ F^{(0)}_{\ \ (1)}-\gamma_{230}\ F^{(3)}_{\ \ (1)}+$$
$$+\partial_{(1)}\ F_{(2)(0)}\ +\gamma_{211}\ F^{(1)}_{\ \ (0)}+\gamma_{231}\ F^{(3)}_{\ \ (0)}-\gamma_{011}\ F^{(1)}_{\ \ (2)}-\gamma_{031}\ F^{(3)}_{\ \ (2)}+$$
$$+\partial_{(2)}F_{(0)(1)}+\gamma_{022}\ F^{(2)}_{\ \ (1)}+\gamma_{032}\ F^{(3)}_{\ \ (1)}-\gamma_{122}\ F^{(2)}_{\ \ (0)}-\gamma_{132}\ F^{(3)}_{\ \ (0)}=0\ ,$$

или

$$\partial_{(0)}cB_{(3)}-v_{10}E_{(2)}-p_{20}cB_{(1)}+v_{20}E_{(1)}+p_{10}cB_{(2)}-$$
$$-\partial_{(1)}\ E_{(2)}-p_{31}E_{(1)}+p_{11}E_{(3)}+v_{11}cB_{(3)}-v_{31}cB_{(1)}+$$
$$+\partial_{(2)}E_{(1)}+v_{22}cB_{(3)}-v_{32}cB_{(2)}-p_{32}E_{(2)}+p_{22}E_{(3)}=0\ ,$$

что с точностью до умножения на -1 совпадает с уравнением $(2.11.13a)$:

$$-(\partial_{(1)}E_2-\partial_{(2)}E_1)-(v_{10}E_2-v_{20}E_1)-[p_{31}E_1+p_{32}E_2-(p_{11}+p_{22})E_3]-$$
$$-\partial_{(0)}cB_3-(p_{10}cB_2-p_{20}cB_1)+[v_{31}cB_1+v_{32}cB_2-(v_{11}+v_{22})cB_3]=0\ , \tag{2.12.5b}$$

если

$$E_k=E_{(k)}=\mathbf{E},\qquad B_k=-B_{(k)}=\mathbf{B}\ . \tag{2.12.5c}$$

Пусть $c=0$ в $(2.12.3b)$:

$$\partial_{(b)}F^{(b)}_{\ \ (0)}+e^{\beta}_{(b);\beta}\ F^{(b)}_{\ \ (0)}+\gamma_{0ab}\ F^{(b)(a)}=\frac{1}{\epsilon_0}\ \rho\ . \tag{2.12.6a}$$

Учитывая тождество

$$e^{\beta}_{(b);\beta}\,F^{(b)}_{\ \ (0)} = -\gamma_{kc}{}^{c}F^{(k)}_{\ \ (0)} = -(\gamma_{k00}-\gamma_{k11}-\gamma_{k22}-\gamma_{k33})F^{(k)}_{\ \ ((0)} =$$

$$= -\gamma_{k00}F^{(k)}_{\ \ (0)} + \gamma_{211}F^{(2)}_{\ \ (0)} + \gamma_{311}F^{(3)}_{\ \ (0)} + \gamma_{122}F^{(1)}_{\ \ (0)} + \gamma_{322}F^{(3)}_{\ \ (0)} + \gamma_{133}F^{(1)}_{\ \ (0)} + \gamma_{233}F^{(2)}_{\ \ (0)}\ ,$$

получаем

$$\partial_{(k)}F^{(k)}_{\ \ (0)} - \gamma_{k00}F^{(k)}_{\ \ (0)} +$$
$$+\gamma_{211}F^{(2)}_{\ \ (0)} + \gamma_{311}F^{(3)}_{\ \ (0)} + \gamma_{122}F^{(1)}_{\ \ (0)} + \gamma_{322}F^{(3)}_{\ \ (0)} + \gamma_{133}F^{(1)}_{\ \ (0)} + \gamma_{233}F^{(2)}_{\ \ (0)} +$$
$$+\gamma_{010}F^{(0)(1)} + \gamma_{012}F^{(2)(1)} + \gamma_{013}F^{(3)(1)} +$$
$$+\gamma_{020}F^{(0)(2)} + \gamma_{021}F^{(1)(2)} + \gamma_{023}F^{(3)(2)} +$$
$$+\gamma_{030}F^{(0)(3)} + \gamma_{031}F^{(1)(3)} + \gamma_{032}F^{(2)(3)} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\ ,$$

или

$$\partial_{(k)}E_{(k)} + v_{k0}E_{(k)} -$$
$$-p_{31}E_{(2)} + p_{21}E_{(3)} + p_{32}E_{(1)} - p_{12}E_{(3)} - p_{23}E_{(1)} + p_{13}E_{(2)} -$$
$$-v_{10}E_{(1)} - v_{12}cB_{(3)} + v_{13}cB_{(2)} -$$
$$-v_{20}E_{(2)} + v_{21}cB_{(3)} - v_{23}cB_{(1)} -$$
$$-v_{30}E_{(3)} - v_{31}cB_{(2)} + v_{32}cB_{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\ ,$$

или

$$\partial_{(k)}E_{(k)} - p_{31}E_{(2)} + p_{21}E_{(3)} + p_{32}E_{(1)} - p_{12}E_{(3)} - p_{23}E_{(1)} + p_{13}E_{(2)} -$$
$$-v_{12}cB_{(3)} + v_{13}cB_{(2)} + v_{21}cB_{(3)} - v_{23}cB_{(1)} - v_{31}cB_{(2)} + v_{32}cB_{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\ ;$$

полученное совпадает с уравнением (2.11.11a)

$$\partial_{(k)}E_k - [(p_{23}-p_{32})E_1 + (p_{31}-p_{13})E_2 + (p_{12}-p_{21})E_3] -$$
$$-[(v_{23}-v_{32})cB_1 + (v_{31}-v_{13})cB_2 + (v_{12}-v_{21})cB_3 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\ , \qquad (2.12.6b)$$

если

$$E_k = E_{(k)} = \mathbf{E}, \qquad B_k = -B_{(k)} = \mathbf{B}\ . \qquad (2.12.6c)$$

Теперь пусть $c = 3$ в (2.12.3b):

$$\partial_{(b)}F^{(b)}_{\ \ (3)} + e^{\beta}_{(b);\beta}\,F^{(b)}_{\ \ (3)} + \gamma_{3ab}\,F^{(b)(a)} = \frac{1}{\epsilon_0}\,j_{(3)}\ . \qquad (2.12.7a)$$

Учитывая тождества

$$e^{\beta}_{(b);\beta}\,F^{(b)}_{\ \ (3)} = -\gamma_{bc}{}^{c}F^{(b)}_{\ \ (3)} = -(\gamma_{b00}-\gamma_{b11}-\gamma_{b22}-\gamma_{b33})F^{(b)}_{\ \ (3)} =$$

$$= \gamma_{100} F^{(1)}_{\ \ (3)} - \gamma_{200} F^{(2)}_{\ \ (3)} +$$
$$+ \gamma_{011} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{211} F^{(2)}_{\ \ (3)} +$$
$$+ \gamma_{022} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{122} F^{(1)}_{\ \ (3)} +$$
$$+ \gamma_{033} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{133} F^{(1)}_{\ \ (3)} + \gamma_{233} F^{(2)}_{\ \ (3)} \ ,$$

$$\gamma_{3ab}\, F^{(b)(a)} = -(\gamma_{30b}\, F^{(0)(b)} + \gamma_{31b}\, F^{(1)(b)} + \gamma_{32b}\, F^{(2)(b)}) =$$
$$= -\gamma_{301}\, F^{(0)(1)} - \gamma_{302}\, F^{(0)(2)} - \gamma_{303}\, F^{(0)(3)} -$$
$$-\gamma_{310}\, F^{(1)(0)} - \gamma_{312}\, F^{(1)(2)} - \gamma_{313}\, F^{(1)(3)} -$$
$$-\gamma_{320}\, F^{(2)(0)} - \gamma_{321}\, F^{(2)(1)} - \gamma_{323}\, F^{(2)(3)} \ ,$$

получим

$$\partial_{(0)} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \partial_{(1)} F^{(1)}_{\ \ (3)} + \partial_{(2)} F^{(2)}_{\ \ (3)} -$$
$$-\gamma_{100} F^{(1)}_{\ \ (3)} - \gamma_{200} F^{(2)}_{\ \ (3)} + \gamma_{011} F^{(0)}_{\ \ (3)} +$$
$$+\gamma_{211} F^{(2)}_{\ \ (3)} + \gamma_{022} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{122} F^{(1)}_{\ \ (3)} +$$
$$+\gamma_{033} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{133} F^{(1)}_{\ \ (3)} + \gamma_{233} F^{(2)}_{\ \ (3)} -$$
$$-\gamma_{301} F^{(0)(1)} - \gamma_{302} F^{(0)(2)} - \gamma_{303} F^{(0)(3)} -$$
$$-\gamma_{310} F^{(1)(0)} - \gamma_{312} F^{(1)(2)} - \gamma_{313} F^{(1)(3)} -$$
$$-\gamma_{320} F^{(2)(0)} - \gamma_{321} F^{(2)(1)} - \gamma_{323} F^{(2)(3)} = \frac{1}{\epsilon_0}\, j_{(3)} \ ,$$

или

$$\partial_{(0)} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \partial_{(1)} F^{(1)}_{\ \ (3)} + \partial_{(2)} F^{(2)}_{\ \ (3)} -$$
$$-\gamma_{100} F^{(1)}_{\ \ (3)} - \gamma_{200} F^{(2)}_{\ \ (3)} + \gamma_{011} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{211} F^{(2)}_{\ \ (3)} + \gamma_{022} F^{(0)}_{\ \ (3)} + \gamma_{122} F^{(1)}_{\ \ (3)} -$$
$$-\gamma_{301} F^{(0)(1)} - \gamma_{302} F^{(0)(2)} - \gamma_{310} F^{(1)(0)} - \gamma_{312} F^{(1)(2)} -$$
$$-\gamma_{320} F^{(2)(0)} - \gamma_{321} F^{(2)(1)} = \frac{1}{\epsilon_0}\, j_{(3)}$$

и дальше (после умножения на -1)

$$-\partial_{(0)} E_{(3)} - \partial_{(1)} cB_{(2)} + \partial_{(2)} cB_{(1)} -$$
$$-v_{10} cB_{(2)} + v_{20} cB_{(1)} - v_{11} E_{(3)} - p_{31} cB_{(1)} - v_{22} E_{(3)} - p_{32} cB_{(2)} +$$
$$+v_{31} E_{(1)} + v_{32} E_{(2)} + p_{20} E_{(1)} + p_{22} cB_{(3)} - p_{10} E_{(2)} + p_{11} cB_{(3)} = -\frac{1}{\epsilon_0}\, j_{(3)} \ ;$$

полученное совпадает с (2.11.13b):

$$(\partial_{(1)} cB_2 - \partial_{(2)} cB_1) - (v_{10} cB_2 - v_{20} cB_1) + [p_{31} cB_1 + p_{32} cB_2 - (p_{11} + p_{22}) cB_3] -$$

$$-\partial_{(0)}E_3 - (p_{10}E_2 - p_{20}E_1) - [v_{31}E_1 + v_{32}E_2 - (v_{11} + v_{22})E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^{(3)} \; , \tag{2.12.7b}$$

если

$$E_k = E_{(k)} = \mathbf{E}, \qquad B_k = -B_{(k)} = \mathbf{B} \; . \tag{2.12.7c}$$

Таким образом, три следующие формы представления уравнений Максвелла в римановом пространстве-времени эквивалентны между собой:

матричная форма

$$\alpha^\alpha(x) \; [\; \partial_\rho + A_\alpha(x) \;] \; \Psi = J(x) \; ; \tag{2.12.8a}$$

тензорная форма

$$\nabla^\alpha F^{\beta\gamma} + \nabla^\beta F^{\gamma\alpha} + \nabla^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \; ,$$

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{1}{\epsilon_0} \, j^\alpha \; ; \tag{2.12.8b}$$

компонентная тетрадная форма

$$\begin{gathered}
\partial_{(k)}E_k - [(p_{23} - p_{32})E_1 + (p_{31} - p_{13})E_2 + (p_{12} - p_{21})E_3] + \\
+ [(v_{23} - v_{32})cB_1 + (v_{31} - v_{13})cB_2 + (v_{12} - v_{21})cB_3 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \; , \\
\partial_{(k)}cB_k - [(p_{23} - p_{32})cB_1 + (p_{31} - p_{13})cB_2 + (p_{12} - p_{21})cB_3] - \\
- [(v_{23} - v_{32})E_1 + (v_{31} - v_{13})E_2 + (v_{12} - v_{21})E_{(3)} = 0 \; , \\
(\partial_{(2)}E_3 - \partial_{(3)}E_2) + (v_{20}E_3 - v_{30}E_2) + [-(p_{22} + p_{33})E_1 + p_{12}E_2 + p_{13}E_3] + \\
+ \partial_{(0)}cB_1 + (p_{20}cB_3 - p_{30}cB_2) - [-(v_{22} + v_{33})cB_1 + v_{12}cB_2 + v_{13}cB_3] = 0 \; , \\
(\partial_{(2)}cB_3 - \partial_{(3)}cB_2) + (v_{20}cB_3 - v_{30}cB_2) + [-(p_{22} + p_{33})cB_1 + p_{12}cB_2 + p_{13}cB_3] - \\
- \partial_{(0)}E_1 - (p_{20}E_3 - p_{30}E_2) + [-(v_{22} + v_{33})E_1 + v_{12}E_2 + v_{13}E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^1 \; , \\
(\partial_{(3)}E_1 - \partial_{(1)}E_3) + (v_{30}E_1 - v_{10}E_3) + [p_{21}E_1 - (p_{11} + p_{33})E_2 + p_{23}E_3] + \\
+ \partial_{(0)}cB_2 + (p_{30}cB_1 - p_{10}cB_1) - [v_{21}cB_1 - (v_{11} + v_{33})cB_2 + v_{23}cB_3] = 0 \; , \\
(\partial_{(3)}cB_1 - \partial_{(0)}cB_3) + (v_{30}cB_1 - v_{10}cB_3) + [+p_{31}cB_1 - (p_{11} + p_{33})cB_2 + p_{23}cB_3] - \\
- \partial_{(0)}E_2 - (p_{30}E_1 - p_{10}E_3) + [v_{21}E_1 - (v_{11} + v_{33})E_2 + v_{23}E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^2 \; , \\
(\partial_{(1)}E_2 - \partial_{(2)}E_1) + (v_{10}E_2 - v_{20}E_1) + [p_{31}E_1 + p_{32}E_2 - (p_{11} + p_{22})E_3] + \\
+ \partial_{(0)}cB_3 + (p_{10}cB_2 - p_{20}cB_1) - [v_{31}cB_1 + v_{32}cB_2 - (v_{11} + v_{22})cB_3] = 0 \; , \\
(\partial_{(1)}cB_2 - \partial_{(2)}cB_1) + (v_{10}cB_2 - v_{20}cB_1) + [+p_{31}cB_1 + p_{32}cB_2 - (p_{11} + p_{22})cB_3] - \\
- \partial_{(0)}E_3 - (p_{10}E_2 - p_{20}E_1) + [v_{31}E_1 + v_{32}E_2 - (v_{11} + v_{22})E_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j^3 \; .
\end{gathered} \tag{2.12.8c}$$

2.13 Связь между матричным и тензорным уравнениями в римановом пространстве в присутствии среды

Установим связь между матричным и тензорным уравнениями в римановом пространстве в присутствии среды; исходим из

$$\alpha_\rho(x)(\partial_\rho + A_\rho)\, M + \beta_\rho(x)(\partial_\rho + B_\rho)\, N = J\,, \tag{2.13.1}$$

где

$$M = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{M} \end{array} \right|, \qquad N = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{N} \end{array} \right|, \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ \mathbf{j} \end{array} \right| ,$$

$$\mathbf{E} + ic\mathbf{B} = \mathbf{f}\,, \qquad \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} + i\mathbf{H}/c) = \mathbf{h}\,,$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{f}}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + \mathbf{E}) + i\frac{1}{2}(c\mathbf{B} + \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c})\,,$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \mathbf{E}) + i\frac{1}{2}(c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c})\,. \tag{2.13.2a}$$

Некоторое время будем пользоваться более простыми обозначениями:

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \Longrightarrow \mathbf{D}\,, \qquad c\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{B}\,, \qquad \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c} \Longrightarrow \mathbf{H}\,. \tag{2.13.2b}$$

Уравнение (2.13.1) может быть переписано как

$$\alpha^c\, (\, e^\rho_{(c)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc}\,)\, M + \beta^c\, (\, e^\rho_{(c)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{*ab}\gamma_{abc}\,)\, N = J(x)\,, \tag{2.13.3}$$

или в более детальном виде

$$-i\, (\, e^\rho_{(0)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{ab0}\,) M + \alpha^k\, (\, e^\rho_{(k)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abk}\,) M -$$

$$-i\, (\, e^\rho_{(0)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{ab0}\,) N + \beta^k\, (\, e^\rho_{(k)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{*ab}\gamma_{abk}\,) N = J(x)\,. \tag{2.13.4}$$

Используя обозначения

$$\frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc} = [s^1(\gamma_{23c} + i\gamma_{01c}) + s^2(\gamma_{31c} + i\gamma_{02c}) + s^3(\gamma_{12c} + i\gamma_{03c})\,]\,,$$

$$\frac{1}{2} j^{*ab}\gamma_{abc} = [s^1(\gamma_{23c} - i\gamma_{01c}) + s^2(\gamma_{31c} - i\gamma_{02c}) + s^3(\gamma_{12c} - i\gamma_{03c})\,]\,,$$

$$e^\rho_{(0)}\partial_\rho = \partial_{(0)}, \qquad e^\rho_{(k)}\partial_\rho = \partial_{(k)}\,,$$

$$(\gamma_{01a}, \gamma_{02a}, \gamma_{03a}) = \mathbf{v}_a\,, \qquad (\gamma_{23a}, \gamma_{31a}, \gamma_{12a}) = \mathbf{p}_a\,, \qquad a = 0, 1, 2, 3\,,$$

уравнение (2.13.4) можно преобразовать к виду

$$-i\, [\, \partial_{(0)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_0 + i\mathbf{v}_0\,)\,]\, M + \alpha^k\, [\, \partial_{(k)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_k + i\mathbf{v}_k\,)\,]\, M -$$

$$-i\ [\ \partial_{(0)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_0 - i\mathbf{v}_0\ )\ ]\ N + \beta^k\ [\ \ \partial_{(k)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_k - i\mathbf{v}_k\ )\ ]\ N = J(x)\ . \tag{2.13.5}$$

Выделим из уравнения (2.13.5) вещественную и мнимую части:

$$(\alpha^k\partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k\mathbf{s}\mathbf{p}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{E} \end{array}\right| + (\partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k\mathbf{s}\mathbf{v}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{B}+\mathbf{H} \end{array}\right| +$$

$$+(\beta^k\partial_{(k)} - \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \beta^k\mathbf{s}\mathbf{p}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}-\mathbf{E} \end{array}\right| + (\partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 + \beta^k\mathbf{s}\mathbf{v}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{B}-\mathbf{H} \end{array}\right| = \frac{1}{\epsilon_0}\left|\begin{array}{c} \rho \\ 0 \end{array}\right|, \tag{2.13.6}$$

$$(\alpha^k\partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k\mathbf{s}\mathbf{p}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{B}+\mathbf{H} \end{array}\right| - (\partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k\mathbf{s}\mathbf{v}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{E} \end{array}\right| +$$

$$+(\ \beta^k\partial_{(k)} - \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \beta^k\mathbf{s}\mathbf{p}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{B}-\mathbf{H} \end{array}\right| - (\partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 + \beta^k\mathbf{s}\mathbf{v}_k)\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}-\mathbf{E} \end{array}\right| = \frac{1}{\epsilon_0}\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{j} \end{array}\right|. \tag{2.13.7}$$

Учитывая тождества

$$\alpha^k\ \partial_{(k)}\ \left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{E} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \partial_{(k)}(D_k + E_k) \\ \partial_{(2)}(D_3 + E_3) - \partial_{(3)}(D_2 + E_2) \\ \partial_{(3)}(D_1 + E_1) - \partial_{(1)}(D_3 + E_3) \\ \partial_{(1)}(D_2 + E_2) - \partial_{(2)}(D_1 + E_1) \end{array}\right|,$$

$$\beta^k\ \partial_{(k)}\ \left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}-\mathbf{E} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \partial_{(k)}(D_k - E_k) \\ -\partial_{(2)}(D_3 - E_3) + \partial_{(3)}(D_2 - E_2) \\ -\partial_{(3)}(D_1 - E_1) + \partial_{(1)}(D_3 - E_3) \\ -\partial_{(1)}(D_2 - E_2) + \partial_{(2)}(D_1 - E_1) \end{array}\right|, \tag{2.13.8a}$$

$$\mathbf{s}\mathbf{v}_0\left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{E} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ v_{20}(D_3 + E_3) - v_{30}(D_2 + E_2) \\ v_{30}(D_1 + E_1) - v_{10}(D_3 + E_3) \\ v_{10}(D_2 + E_2) - v_{20}(D_1 + E_1) \end{array}\right|,$$

$$-\mathbf{s}\mathbf{v}_0\ \left|\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{E} \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c} 0 \\ v_{20}(D_3 - E_3) - v_{30}(D_2 - E_2) \\ v_{30}(D_1 + E_1) - v_{10}(D_3 - E_3) \\ v_{10}(D_2 - E_2) - v_{20}(D_1 - E_1) \end{array}\right| \tag{2.13.8b}$$

и

$$\alpha^k\ \mathbf{s}\mathbf{p}_k =$$
$$= \alpha^1(S^1p_{11} + S^2p_{21} + S^3p_{31}) +$$
$$+\alpha^2(S^1p_{12} + S^2p_{22} + S^3p_{32}) +$$
$$+\alpha^3(S^1p_{13} + S^2p_{23} + S^3p_{33}) =$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & p_{32} - p_{23} & -p_{31} + p_{13} & p_{21} - p_{12} \\ 0 & -p_{22} - p_{33} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{21} & -p_{11} - p_{33} & p_{23} \\ 0 & p_{31} & p_{32} & -p_{11} - p_{22} \end{vmatrix},
$$

$$
\alpha^k \mathbf{sp}_k \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{D} + \mathbf{E} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} -(p_{23} - p_{32})(D_1 + E_1) - (p_{31} - p_{13})(D_2 + E_2) - (p_{12} - p_{21})(D_3 + E_3) \\ -(p_{22} + p_{33})(D_1 + E_1) + p_{12}(D_2 + E_2) + p_{13}(D_3 + E_3) \\ p_{21}(D_1 + E_1) - (p_{11} + p_{33})(D_2 + E_2) + p_{23}(D_3 + E_3) \\ p_{31}(D_1 + E_1) + p_{32}(D_2 + E_2) - (p_{11} + p_{22})(D_3 + E_3) \end{vmatrix},
$$

$$
\beta^k \, \mathbf{sp}_k =
$$

$$
= \beta^1(S^1 p_{11} + S^2 p_{21} + S^3 p_{31}) +
$$

$$
+ \beta^2(S^1 p_{12} + S^2 p_{22} + S^3 p_{32}) +
$$

$$
+ \beta^3(S^1 p_{13} + S^2 p_{23} + S^3 p_{33}) =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & p_{32} - p_{23} & -p_{31} + p_{13} & p_{21} - p_{12} \\ 0 & p_{22} + p_{33} & -p_{12} & -p_{13} \\ 0 & -p_{21} & p_{11} + p_{33} & -p_{23} \\ 0 & -p_{31} & -p_{32} & p_{11} + p_{22} \end{vmatrix},
$$

$$
\beta^k \mathbf{sp}_k \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{D} - \mathbf{E} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} -(p_{23} - p_{32})(D_1 - E_1) - (p_{31} - p_{13})(D_2 - E_2) - (p_{12} - p_{21})(D_3 - E_3) \\ (p_{22} + p_{33})(D_1 - E_1) - p_{12}(D_2 - E_2) - p_{13}(D_3 - E_3) \\ -p_{21}(D_1 - E_1) + (p_{11} + p_{33})(D_2 - E_2) - p_{23}(D_3 - E_3) \\ -p_{31}(D_1 - E_1) - p_{32}(D_2 - E_2) + (p_{11} + p_{22})(D_3 - E_3) \end{vmatrix}, \tag{2.13.8c}
$$

из уравнений (2.11.6) получаем (рассматриваем нулевое и первое уравнения)

$$
\partial_{(k)}(D_k + E_k) + \partial_{(k)}(D_k - E_k) -
$$

$$
-(p_{23} - p_{32})(D_1 + E_1) - (p_{31} - p_{13})(D_2 + E_2) - (p_{12} - p_{21})(D_3 + E_3) +
$$

$$
+(p_{23} - p_{32})(D_1 - E_1) - (p_{31} - p_{13})(D_2 - E_2) - (p_{12} - p_{21})(D_3 - E_3) +
$$

$$
+(v_{23} - v_{32})(B_1 + H_1) + (v_{31} - v_{13})(B_2 + H_2) + (v_{12} - v_{21})(B_3 + H_3) -
$$

$$
-(v_{23} - v_{32})(B_1 - H_1) - (v_{31} - v_{13})(B_2 - H_2) - (v_{12} - v_{21})(B_3 - H_3) = \frac{1}{\epsilon_0} 2\rho \, ,
$$

или (вспоминаем о (2.13.2b))

$$
\partial_{(k)} D_k - (p_{23} - p_{32}) D_1 - (p_{31} - p_{13}) D_2 - (p_{12} - p_{21}) D_3 +
$$

$$+(v_{23}-v_{32})\frac{H_1}{c}+(v_{31}-v_{13})\frac{H_2}{c}+(v_{12}-v_{21})\frac{H_3}{c}=\rho\,. \qquad (2.13.9)$$

Аналогично

$$\partial_{(2)}(D_3+E_3)-\partial_{(3)}(D_2+E_2)-\partial_{(2)}(D_3-E_3)+\partial_{(3)}(D_2-E_2)+$$
$$+v_{20}(D_3+E_3)-v_{30}(D_2+E_2)-v_{20}(D_3-E_3)+v_{30}(D_2-E_2)-$$
$$-(p_{22}+p_{33})(D_1+E_1)+p_{12}(D_2+E_2)+p_{13}(D_3+E_3)+$$
$$+(p_{22}+p_{33})(D_1-E_1)-p_{12}(D_2-E_2)-p_{13}(D_3-E_3)+$$
$$+p_{20}(B_3+H_3)-p_{30}(B_2+H_2)+p_{20}(B_3-H_3)-p_{30}(B_2-H_2)+$$
$$+(v_{22}+v_{33})(B_1+H_1)-v_{12}(B_2+H_2)-v_{13}(B_3+H_3)+$$
$$+(v_{22}+v_{33})(B_1-H_1)-v_{12}(B_2-H_2)-v_{13}(B_3-H_3)=0\,,$$

или (вспоминаем о (2.13.2b))

$$\partial_{(2)}E_3-\partial_{(3)}E_2+v_{20}E_3-v_{30}E_2-(p_{22}+p_{33})E_1+p_{12}E_2+p_{13}E_3+$$
$$+p_{20}cB_3-p_{30}cB_2+(v_{22}+v_{33})cB_1-v_{12}cB_2-v_{13}cB_3=0\,. \qquad (2.13.10)$$

Теперь рассмотрим уравнения из (2.13.7). Первое уравнение

$$\partial_{(k)}(B_k+H_k)+\partial_{(k)}(B_k-H_k)-$$
$$-(p_{23}-p_{32})(B_1+H_1)-(p_{31}-p_{13})(B_2+H_2)-(p_{12}-p_{21})(B_3+H_3)-$$
$$-(p_{23}-p_{32})(B_1-H_1)-(p_{31}-p_{13})(B_2-H_2)-(p_{12}-p_{21})(B_3-H_3)-$$
$$-(v_{23}-v_{32})(D_1+E_1)-(v_{31}-v_{13})(D_2+E_2)-(v_{12}-v_{21})(D_3+E_3)+$$
$$+(v_{23}-v_{32})(D_1-E_1)+(v_{31}-v_{13})(D_2-E_2)+(v_{12}-v_{21})(D_3-E_3)=0\,,$$

или (вспоминаем о (2.13.2b))

$$\partial_{(k)}cB_k-$$
$$-(p_{23}-p_{32})cB_1-(p_{31}-p_{13})cB_2-(p_{12}-p_{21})cB_3-$$
$$-(v_{23}-v_{32})E_1-(v_{31}-v_{13})E_2-(v_{12}-v_{21})E_3=0 \qquad (2.13.11)$$

и второе уравнение

$$\partial_{(2)}(B_3+H_3)-\partial_{(3)}(B_2+H_2)-\partial_{(2)}(B_3-H_3)+\partial_{(3)}(B_2-H_2)+$$
$$+v_{20}(B_3+H_3)-v_{30}(B_2+H_2)-v_{20}(B_3-H_3)+v_{30}(B_2-H_2)-$$
$$-(p_{22}+p_{33})(B_1+H_1)+p_{12}(B_2+H_2)+p_{13}(B_3+H_3)+$$
$$+(p_{22}+p_{33})(B_1-H_1)-p_{12}(B_2-H_2)-p_{13}(B_3-H_3)-$$
$$-p_{20}(D_3+E_3)+p_{30}(D_2+E_2)-p_{20}(D_3-E_3)+p_{30}(D_2-E_2)-$$
$$-(v_{22}+v_{33})(D_1+E_1)+v_{12}(D_2+E_2)+v_{13}(D_3+E_3)-$$

$$-(v_{22}+v_{33})(D_1-E_1)+v_{12}(D_2-E_2)+v_{13}(D_3-E_3)=\frac{1}{\epsilon_0}2j^1 \ ,$$

или

$$\partial_{(2)}\frac{H_3}{c}-\partial_{(3)}\frac{H_2}{c}+v_{20}\frac{H_3}{c}-v_{30}\frac{H_2}{c}-(p_{22}+p_{33})\frac{H_1}{c}+p_{12}\frac{H_2}{c}+p_{13}\frac{H_3}{c}-$$

$$-p_{20}D_3+p_{30}D_2-(v_{22}+v_{33})D_1+v_{12}D_2+v_{13}D_3=j^1 \ . \quad (2.13.12)$$

Очевидно, что полученные уравнения (и их цикличные партнеры) эквивалентны тензорным уравнениям Максвелла в среде

$$\nabla^\alpha F^{\beta\gamma}+\nabla^\beta F^{\gamma\alpha}+\nabla^\gamma F^{\alpha\beta}=0 \ ,$$

$$\nabla_\beta H^{\beta\alpha}= \ j^\alpha \quad (2.13.13)$$

в тетрадной записи

$$(F_{(2)(3)},F_{(3)(1)},F_{(1)(2)})=(cB_{(i)}) \ , \qquad (F_{(0)(1)},F_{(0)(2)},F_{(0)(3)}=(E_{(i)}) \ ,$$

$$(H_{(2)(3)},H_{(3)(1)},H_{(1)(2)})=(\frac{H_{(i)}}{c}) \ , \qquad (H_{(0)(1)},H_{(0)(2)},H_{(0)(3)}=(cD_{(i)}) \ ,$$

$$E_k=E_{(k)}=\mathbf{E} \ , \qquad B_k=-B_{(k)}=\mathbf{B} \ ,$$

$$D_k=D_{(k)}=\mathbf{D} \ , \qquad H_k=-H_{(k)}=\mathbf{H} \ . \quad (2.13.14)$$

Глава 3

ФОРМАЛИЗМ ДАФФИНА–КЕММЕРА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

3.1 Введение

Распространенной является точка зрения, что способ учета воздействия гравитационного поля на квантово-механическую частицу существенно зависит от того, фермион эта частица или бозон. При этом считается, что тензорные уравнения (для бозонных полей) обобщаются на случай искривленного пространства легче, чем спинорные уравнения (для фермионов). Так, исходное уравнение Дирака в плоском пространстве обобщается на случай присутствия внешнего гравитационного поля с обязательным использованием тетрадного формализма. В отношении к бозонам, как правило, используется совершенно другой подход, состоящий в простой замене всех участвующих в исходном плоском уравнении тензоров и обычных производных на общековариантные – соответственно тензоры и производные. Так, например, уравнение Прока для векторной частицы в пространстве Минковского

$$\partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = m \Psi_{ab} , \qquad \partial^b \Psi_{ab} = m \Psi_a , \qquad (3.1.1a)$$

будучи подвергнуто этой формальной процедуре, превращается в

$$\nabla_\alpha \Psi_\beta - \nabla_\beta \Psi_\alpha = m \Psi_{\alpha\beta}, \qquad \nabla^\beta \Psi_{\alpha\beta} = m \Psi_\alpha . \qquad (3.1.1b)$$

Однако известно и уже довольно долгое время (см., например, Дуань И-ши [175], Сильвейра [121], Хьялмарса [176], Вайнберг [177]), что все частицы независимо от величины их спина подчиняются в искривленном пространстве-времени единому тетрадному подходу, можно констатировать, что тетрадный формализм в применении к бозонам до недавнего времени почти не применялся[1]. В частности, потенциально существующее общековариантное уравнение Даффина–Кеммера (Д–К) для векторной частицы фактически не использовалось в литературе. Положение стало меняться совсем недавно.

Ниже мы покажем, что на основе известного формализма Даффина–Кеммера способ воздействия гравитационного поля на бозон со спином единица (и спином ноль также) легко может быть унифицирован с подходом, использованным для описания гравитационного воздействия на фермион.

[1]Формализм изотропной (световой) тетрады Ньюмана–Пенроуза является в конечном итоге тетрадным формализмом. Однако этот метод был развит в соответствии со своими особыми внутренними критериями и требованиями без всякой явно видимой или отчетливо прослеживаемой связи с формализмом Тетроде–Вейля–Фока–Иваненко.

3.2 Уравнение Даффина–Кеммера в гравитационном поле

Будем исходить из уравнения Д–К в плоском пространстве [178]:

$$(\, i \, \beta^a \, \partial_a \; - \; m \,) \, \Phi(x) = 0 \; . \qquad (3.2.1)$$

Здесь $\Phi(x)$ – это 10-компонентная волновая функция; β^a – (10×10)-матрицы; в декартовом представлении

$$\Phi = (\Phi_0, \; \Phi_1, \; \Phi_2, \; \Phi_3; \; \Phi_{01}, \; \Phi_{02}, \; \Phi_{03}, \; \Phi_{23}, \; \Phi_{31}, \; \Phi_{12}) \; ,$$

$$\beta^a = \left| \begin{array}{cc} 0 & \kappa^a \\ \lambda^a & 0 \end{array} \right| = \kappa^a \oplus \lambda^a \; ,$$

$$(\kappa^a)_j^{[mn]} \; = \; -i \; (\delta_j^m \; g^{na} \; - \; \delta_j^n \; g^{ma}) \;\; ,$$

$$(\lambda^a)^j_{[mn]} \; = \; -i \; (\delta^a_m \; \delta^j_n - \delta^a_n \; \delta^j_m) \; = -i \; \delta^{aj}_{mn} \; , \qquad (3.2.2a)$$

где $(g^{na}) = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор пространства Минковского. Введенная здесь блочная структура матриц Даффина–Кеммера оказывается полезной и будет использоваться дальше при вычислениях.

Используя представление (3.2.2a), можем легко установить основные, существенные для нижеследующего, свойства этих матриц β^a:

$$\beta^c \; \beta^a \; \beta^b = \left| \begin{array}{cc} 0 & \kappa^c \; \lambda^a \; \kappa^b \\ \lambda^c \; \kappa^a \; \lambda^b & 0 \end{array} \right| ,$$

$$(\lambda^c \; \kappa^a \; \lambda^b)^j_{[mn]} = i \; (\; \delta^{cb}_{mn} \; g^{aj} \; - \; \delta^{cj}_{mn} \; g^{ab} \;) \; , \qquad (3.2.2b)$$

$$(\kappa^c \; \lambda^a \; \kappa^b)_j^{[mn]} = i \; [\; \delta^a_j \; (g^{cm} \; g^{bn} \; - \; g^{cn} \; g^{bm}) \; + \; \; g^{ac} \; (\delta^n_j \; g^{mb} \; - \; \delta^m_j \; g^{nb}) \;] \; ,$$

а также

$$\beta^c \; \beta^a \; \beta^b \; + \; \beta^b \; \beta^a \; \beta^c = \beta^c \; g^{ab} \; + \; \beta^b g^{ac} \; ,$$

$$[\beta^c, j^{ab}] = g^{ca} \; \beta^b \; - \; g^{cb} \; \beta^a \; , \qquad j^{ab} = \beta^a \; \beta^b \; - \; \beta^b \; \beta^a \; ,$$

$$[j^{mn}, j^{ab}] = (\; g^{na} \; j^{mb} \; - \; g^{nb} \; j^{ma} \;) \; - \; (\; g^{ma} \; j^{nb} \; - \; g^{mb} \; j^{na} \;) \; . \qquad (3.2.2c)$$

Следуя тетрадному рецепту, уравнение (3.2.1) должно быть обобщено на риманово пространство-время с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ и какой-либо сопутствующей ей тетрадой $e^\alpha_{(a)}(x)$ согласно

$$[\; i \; \beta^\alpha(x) \; (\partial_\alpha \; + \; B_\alpha(x)) \; - m \;] \; \Phi(x) = 0 \; ,$$

$$\beta^\alpha(x) = \beta^a e^\alpha_{(a)}(x) \; , \qquad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} \; j^{ab} e^\beta_{(a)} \nabla_\alpha (e_{(b)\beta}) \; . \qquad (3.2.3)$$

Это уравнение содержит тетраду $e^\alpha_{(a)}(x)$ явно. Следовательно (аналогично тому, как это было для спинорной частицы), должна существовать возможность преобразовывать друг в друга уравнения, записанные в разных тетрадах; в противном случае уравнение некорректно. Покажем, что построенные на основе двух тетрад, связываемых неким локальным преобразованием Лоренца

$$e^{\alpha}_{(a)}(x) \;, \qquad e'^{\alpha}_{(b)}(x) \;=\; L_a{}^b(x)\, e^{\alpha}_{(b)}(x) \;, \tag{3.2.4a}$$

два уравнения

$$[\; i\beta^{\alpha}(x)\;(\partial_\alpha + B_\alpha(x)) \;-\; m \;]\; \Phi(x) = 0 \;,$$

$$[\; i\beta'^{\alpha}(x)\;(\partial_\alpha + B'_\alpha(x)) - m \;]\; \Phi'(x) = 0 \;, \tag{3.2.4b}$$

построенные соответственно с помощью тетрад $e^{\alpha}_{(a)}(x)$ и $e'^{\alpha}_{(b)}(x)$, могут быть пересчитаны друг в друга через локальное преобразование $\Phi'(x) = S(x)\Phi(x)$:

$$\left| \begin{array}{c} \phi'_a(x) \\ \phi'_{[ab]}(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} L_a{}^l & 0 \\ 0 & L_a{}^m L_b{}^n \end{array} \right| \; \left| \begin{array}{c} \phi_l(x) \\ \phi_{[mn]}(x) \end{array} \right| . \tag{3.2.4c}$$

Здесь $L(x)$ – то же самое преобразование, что и в соотношении (3.2.4a). Итак, исходя из первого уравнения в (3.2.4b), будем получать уравнение для функции $\Phi'(x)$. Учитывая $\Phi(x) = S(x)\;\Phi(x)$, имеем

$$[\; i\; S\; \beta^{\alpha}\; S^{-1}(\partial_\alpha \;+\; S\; B_\alpha\; S^{-1} \;+\; S\; \partial_\alpha\; S^{-1}) \;-\; m \;]\; \Phi'(x) = 0 \;.$$

Задача состоит в проверке соотношений

$$S(x)\; \beta^{\alpha}(x)\; S^{-1}(x) = \beta'^{\alpha}(x) \;, \tag{3.2.5a}$$

$$S(x)\; B_\alpha(x)\; S^{-1}(x) \;+\; S(x)\; \partial_\alpha\; S^{-1}(x) = B'_\alpha(x) \;. \tag{3.2.5b}$$

Первое соотношение может быть переписано как

$$S(x)\; \beta^{a}\; e^{\alpha}_{(a)}(x)\; S^{-1}(x) \;=\beta^{b}\; e'^{\alpha}_{(b)}(x) \;,$$

откуда, учитывая связь (3.2.4a) между тетрадами, можем прийти к

$$S(x)\; \beta^{a}\; S^{-1}(x) \;=\; \beta^{b}\; L_b{}^a(x) \;. \tag{3.2.5c}$$

Последнее условие хорошо известно в обычном формализме Даффина–Кеммера [178]; его можно, в частности, легко проверить, используя блочную структуру для матриц β^a, что дает два равенства:

$$L(x)\; \kappa^{a}\; [\; L^{-1}(x) \otimes L(x)^{-1} \;] \;=\; \kappa^{b}\; L_b{}^a(x) \;,$$

$$[\; L(x) \otimes L(x) \;]\; \lambda^{a}\; L(x)^{-1} \;=\; \lambda^{b}\; L_b{}^a(x) \;.$$

Эти равенства обращаются в тождества, после того как мы учтем явные выражения для κ^a и λ^a, а также учтем свойство псевдоортогональности для матрицы Лоренца $L_a{}^b$:

$$g^{al}\ (L^{-1})_l{}^k(x) = g^{kb}\ L_b{}^a(x)\ .$$

Теперь обратимся к доказательству равенства (3.2.5b). Используя определяющее соотношение для связности, а также формулу (3.2.5c), получаем

$$S(x)\ \partial_\alpha\ S^{-1}(x)\ =\ B'_\alpha(x)\ -\ \frac{1}{2}\ j^{mn} L_m{}^n(x)\ g_{ab}\ \partial_\alpha\ L_n{}^b(x)\ .$$

Затем соотношение (3.2.5b) приводит к

$$S(x)\ \partial_\alpha\ S^{-1}(x) =\ \frac{1}{2}\ L_m{}^a(x)\ g_{ab}\ (\ \partial_\alpha\ L_n{}^b(x)\ )\ .$$

Последнее условие представляет собой тождество: это легко проверяется с использованием блочной структуры всех вовлеченных сюда матриц. Таким образом, уравнения (3.2.4b) могут быть преобразованы друг в друга; тем самым они проявляют калибровочную симметрию относительно локальных лоренцевских преобразований в полной аналогии с более знакомым случаем общековариантного уравнения Дирака.

В то же время волновая функция из этого уравнения представляет скалярную величину по отношению к общекоординатным преобразованиям, т. е. если

$$x^\alpha\ \to\ x'^\alpha = f^\alpha(x)\ , \qquad \text{тогда} \qquad \Phi'(x) = \Phi(x)\ .$$

Остается показать, что этот общековариантный формализм Даффина–Кеммера не противоречит обычно используемому формализму Прока, обобщенному в терминах общековариантных тензоров. Для этого учтем блочную структуру для β^a, J^{ab} и $\Phi(x)$ в уравнении Даффина–Кеммера; тогда вместо (3.2.3) получим

$$i\ [\ \lambda^c\ e^\alpha_{(c)}\ (\ \partial_\alpha\ +\ \kappa^a\ \lambda^b\ e^\beta_{(a)}\ \nabla_\alpha\ e_{(b)\beta}\ )\ ]_{[mn]}{}^l\ \Phi_l = m\ \Phi_{[mn]}\ ,$$
$$i\ [\kappa^c\ e^\alpha_{(c)}\ (\ \partial_\alpha\ +\ \lambda^a\ \kappa^b\ e^\beta_{(a)}\ \nabla_\alpha\ e_{(b)\beta}\ )\ ]_l{}^{[mn]}\ \Phi_{[mn]} = m\Phi_l\ , \qquad (3.2.6a)$$

что после учета явного вида ($\lambda^c,\ \lambda^c\ \kappa^a\ \lambda^b\ ,\ \kappa^c,\ \kappa^c\ \lambda^a\ \kappa^b$) приводит к

$$(e^\alpha_{(a)}\ \partial_\alpha\ \Phi_b\ -\ e^\alpha_{(b)}\ \partial_\alpha\ \Phi_a)\ +\ (\gamma^c{}_{ab} - \gamma^c{}_{ba})\ \Phi_c = m\ \Phi_{ab}\ ,$$
$$e^{(b)\alpha}\ \partial_\alpha\ \Phi_{ab}\ +\ \gamma^{nb}{}_n\Phi_{ab} + \gamma_a{}^{mn}\Phi_{mn} = m\ \Phi_a\ . \qquad (3.2.6b)$$

В свою очередь, эти уравнения представляют тензорные уравнения Прока (3.1.1b), записанные в терминах тетрадных компонент согласно

$$\Phi_a(x)\ =\ e^\alpha_{(a)}(x)\ \Phi_\alpha(x),$$

$$\Phi_{ab}(x) = e^{\alpha}_{(a)}(x)\ e^{\beta}_{(b)}(x)\ \Phi_{\alpha\beta}(x)\ ; \tag{3.2.7}$$

символ $\gamma_{abc}(x)$ обозначает коэффициенты вращения Риччи:

$$\gamma_{abc}(x)\ =\ -\ e_{(a)\alpha;\beta}\ e^{\alpha}_{(b)}\ e^{\beta}_{(c)}\ .$$

Таким образом, установлено, что способ введения взаимодействия между частицей спина 1 и внешним классическим гравитационным полем может быть унифицирован с общим подходом, который возник в связи с описанием гравитационных свойств фермиона со спином 1/2. Саму эту возможность унификации следовало бы оценивать как важный факт; ее отсутствие было бы действительно очень удивительным.

Глава 4

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В 3-МЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ФОРМАЛИЗМЕ, СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ S_3 И H_3

4.1 Сферические координаты и тетрада в пространстве Римана S_3

Рассмотрим матричное уравнение Максвелла в цилиндрических координатах и тетраде сферического пространства Римана S_3 (предполагаем отсутствие источников):

$$dS^2 = c^2 dt^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \, ,$$

$$x^\alpha = (ct, \chi, \theta, \phi) \, , \qquad g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\chi\sin^2\theta \end{vmatrix} . \qquad (4.1.1)$$

Будем использовать диагональную сферическую тетраду:

$$e^\alpha_{(0)} = (1, 0, 0, 0) \, , \qquad e^\alpha_{(3)} = (0, 1, 0, 0) \, ,$$

$$e^\alpha_{(1)} = (0, 0, \frac{1}{\sin\chi}, 0) \, , \qquad e^\alpha_{(2)} = (1, 0, 0, \frac{1}{\sin\chi\sin\theta}) \, . \qquad (4.1.2)$$

Символы Кристоффеля в этой системе координат равны

$$\Gamma^\chi_{\phi\phi} = -\sin\chi\cos\chi\sin^2\theta \, , \qquad \Gamma^\chi_{\theta\theta} = -\sin\chi\cos\chi \, ,$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \, , \; \Gamma^\theta_{\theta\chi} = \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \, , \; \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \operatorname{ctg}\theta \, , \; \Gamma^\phi_{\chi\phi} = \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \, . \qquad (4.1.3)$$

Отвечающие тетраде (4.1.2) коэффициенты вращения Риччи равны $\gamma_{ab0} = 0$, $\gamma_{ab3} = 0$ и

$$\gamma_{ab1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\operatorname{tg}\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{\operatorname{tg}\chi} & 0 & 0 \end{vmatrix} \, ,$$

$$\gamma_{ab2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{\operatorname{tg}\theta\,\sin\chi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta\,\sin\chi} & 0 & -\frac{1}{\operatorname{tg}\chi} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{\operatorname{tg}\chi} & 0 \end{vmatrix} . \qquad (4.1.4)$$

Используя явный вид тетрады и коэффициентов вращения Риччи, находим обобщенные матрицы $\alpha^{\alpha}(x)$ и связность $A_{\alpha}(x)$:

$$\alpha^{\alpha}(x) = (\ \alpha^0,\ \alpha^3,\ \frac{\alpha^1}{\sin\chi}\ ,\ \frac{\alpha^2}{\sin\chi\sin\theta}\ )\ , \qquad A_0(x) = 0\ ,$$

$$A_{\chi}(x) = 0\ , \qquad A_{\theta}(x) = j^{31}\ , \qquad A_{\phi}(x) = \sin\theta\ j^{32} + \cos\theta\ j^{12}\ . \qquad (4.1.5)$$

С учетом (4.1.5) уравнение Максвелла без внешних источников

$$\alpha^c\ (\ e^{\rho}_{(c)}\partial_{\rho} + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc}\ )\ \Psi = 0$$

принимает вид

$$\left[-i\partial_0\ +\ \alpha^3\partial_r + \frac{\alpha^1 j^{31} + \alpha^2 j^{32}}{\operatorname{tg}\chi}\ +\ \frac{1}{\sin\chi}\ \Sigma_{\theta,\phi} \right]\ \Psi(x) = 0\ , \qquad (4.1.6a)$$

где зависящий от угловых переменных оператор $\Sigma_{\theta,\phi}$ равен

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \alpha^1\ \partial_{\theta}\ +\ \alpha^2\ \frac{\partial_{\phi} + \cos\theta j^{12}}{\sin\theta}\ . \qquad (4.1.6b)$$

Для дальнейшего удобно иметь матрицу j^{12} диагональной. Этого можно добиться с помощью преобразования к циклическому базису:

$$\Psi' = U_4\Psi\ , \qquad U_4 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & U \end{array} \right|\ , \qquad (4.1.7a)$$

где

$$U = \left| \begin{array}{ccc} -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{array} \right|\ , \qquad U^{-1} = U_3^{+} = \left| \begin{array}{ccc} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|\ .$$

Легко находим равенства

$$U\tau_1 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{array} \right| = \tau_1'\ , \qquad j^{'23} = s_1' = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1' \end{array} \right|\ ,$$

$$U\tau_2 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = \tau_2'\ , \qquad j^{'31} = s_2' = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2' \end{array} \right|\ ,$$

$$U\tau_3 U^{-1} = -i\ \left| \begin{array}{ccc} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = \tau_3'\ , \qquad j^{'12} = s_3' = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3' \end{array} \right|\ . \qquad (4.1.7b)$$

$$
\alpha^{'1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} , \; \alpha^{'2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} ,
$$

$$
\alpha^{'3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{vmatrix} . \tag{4.1.7c}
$$

Уравнение (4.1.6) примет вид

$$
\left[-i\frac{\partial}{\partial t} \; + \; \alpha^{'3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha^{'1} s'_2 - \alpha^{'2} s'_1}{\text{tg}\,\chi} \; + \; \frac{1}{\sin\chi}\, \Sigma'_{\theta,\phi} \right] \; \Psi'(x) = 0 \, ,
$$

$$
\Sigma'_{\theta,\phi} = \alpha^{'1}\, \partial_\theta \; + \; \alpha^{'2}\, \frac{\partial_\phi + \cos\theta \; s'_3}{\sin\theta} \, . \tag{4.1.8}
$$

4.2 Разделение переменных и функции Вигнера

Будем диагонализировать на решениях квадрат и третью проекцию полного момента электромагнитного поля, этому отвечает подстановка для полевой функции (см. в [197])

$$
\psi = e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} 0 \\ f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{vmatrix} , \tag{4.2.1}
$$

где использованы краткие обозначения для D-функций Вигнера

$$
D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0) \, , \qquad \sigma = -1, 0, +1;
$$

j, m определяют квадрат и третью проекцию полного момента. Приведем необходимые в дальнейшем при разделении переменных рекуррентные соотношения для D-функций Вигнера [179]:

$$
\partial_\theta \; D_{-1} = \frac{1}{2} \, (\; a \; D_{-2} - \nu \; D_0 \;) \, , \qquad \frac{m - \cos\theta}{\sin\theta} \; D_{-1} = \frac{1}{2} \, (\; a \; D_{-2} + \nu \; D_0 \;) \, ,
$$

$$
\partial_\theta \; D_0 = \frac{1}{2} \, (\; \nu \; D_{-1} - \nu \; D_{+1} \;) \, , \qquad \frac{m}{\sin\theta} \; D_0 = \frac{1}{2} \, (\; \nu \; D_{-1} + \nu \; D_{+1} \;) \, ,
$$

$$
\partial_\theta \; D_{+1} = \frac{1}{2} \, (\; \nu \; D_0 - a \; D_{+2} \;) \, , \qquad \frac{m + \cos\theta}{\sin\theta} \; D_{+1} = \frac{1}{2} \, (\; \nu \; D_0 + \; a \; D_{+2} \;) \, ,
$$

$$
\nu = \sqrt{j(j+1)} \, , \;\; a = \sqrt{(j-1)(j+2)} \, . \tag{4.2.2}
$$

Найдем результат действия углового оператора (фактор $e^{-i\omega t}$ опускаем)

$$
\sqrt{2}\, \Sigma'_{\theta\phi}\, \Psi' = \sqrt{2}\ \left[\ \alpha^{'1}\, \partial_\theta \ +\ \alpha^{'2}\, \frac{\partial_\phi + \cos\theta\ s'_3}{\sin\theta}\ \right] \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{array} \right| =
$$

$$
= \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{array} \right| \partial_\theta \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1 D_{-1} \\ f_2 D_0 \\ f_3 D_{+1} \end{array} \right| +
$$

$$
+ \frac{1}{\sin\theta} \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1 (im - i\cos\theta)\ D_{-1} \\ f_2 (im)\ D_0 \\ f_3 (im + i\cos\theta)\ D_{+1} \end{array} \right| =
$$

$$
= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1 (\ a\ D_{-2} - \nu\ D_0\ ) \\ f_2 (\ \nu\ D_{-1} - \nu\ D_{+1}\ ) \\ f_3 (\ \nu\ D_0 - a\ D_{+2}\ ) \end{array} \right| +
$$

$$
+ \frac{1}{2} \left| \begin{array}{rrrr} 0 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ +1 & 0 & i & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1 (\ a\ D_{-2} + \nu\ D_0\ ) \\ f_2 (\ \nu\ D_{-1} + \nu\ D_{+1}\ ) \\ f_3 (\ \nu\ D_0 +\ a\ D_{+2}\ ) \end{array} \right| \ ;
$$

откуда получим искомую формулу

$$
\Sigma'_{\theta\phi} \Psi' = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{r} (f_1 + f_3) D_0 \\ -i\ f_2 D_{-1} \\ i\ (f_1 - f_3) D_0 \\ +i\ f_2 D_{+1} \end{array} \right| . \qquad (4.2.3)
$$

Возвращаемся к уравнению Максвелла (4.1.8):

$$
[\ -i\partial_0 \ +\ \alpha^{'3} \partial_r + \frac{\alpha^{'1} s'_2 - \alpha^{'2} s'_1}{\mathrm{tg}\ \chi} \ +\ \frac{1}{\sin\chi}\ \Sigma'_{\theta,\phi}\ ]\ \Psi'(x) = 0\ ,
$$

с учетом (4.2.3) и равенств

$$
-i\partial_0 \Psi = -\omega\ e^{-i\omega t} \left| \begin{array}{c} 0 \\ f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{array} \right| , \qquad \alpha^{'3} \partial_r \Psi' = e^{-i\omega t} \left| \begin{array}{c} f'_2\ D_0 \\ -i\ f'_1\ D_{-1} \\ 0 \\ +i\ f'_3\ D_{+1} \end{array} \right| ,
$$

$$
\frac{\alpha'^1 s_2' - \alpha'^2 s_1'}{\text{tg}\,\chi}\,\Psi' = \frac{e^{-i\omega t}}{\text{tg}\,\chi}\;\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{array}\right|\left|\begin{array}{c} 0 \\ f_1(r)D_{-1} \\ f_2(r)D_0 \\ f_3(r)D_{+1} \end{array}\right| =
$$

$$
= \frac{e^{-i\omega t}}{\text{tg}\,\chi}\left|\begin{array}{c} 2f_2(r)D_0 \\ -i\;f_1(r)D_{-1} \\ 0 \\ +i\;f_3(r)D_{+1} \end{array}\right|
$$

оно принимает вид

$$
-\omega\left|\begin{array}{c} 0 \\ f_1 D_{-1} \\ f_2 D_0 \\ f_3 D_{+1} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} f_2'\;D_0 \\ -i\;f_1'\;D_{-1} \\ 0 \\ +i\;f_3'\;D_{+1} \end{array}\right| + \frac{1}{\text{tg}\,\chi}\left|\begin{array}{c} 2f_2(r)D_0 \\ -i\;f_1(r)D_{-1} \\ 0 \\ +i\;f_3(r)D_{+1} \end{array}\right| +
$$

$$
+\frac{1}{\sin\chi}\;\frac{\nu}{\sqrt{2}}\left|\begin{array}{r} (f_1+f_3)D_0 \\ -i\;f_2 D_{-1} \\ i\;(f_1-f_3)D_0 \\ +i\;f_2 D_{+1} \end{array}\right| = 0\;. \qquad (4.2.4)
$$

Откуда следуют радиальные уравнения

$$
f_2' + \frac{2}{\text{tg}\,\chi} f_2 + \frac{1}{\sin\chi}\;\frac{\nu}{\sqrt{2}}\;(f_1+f_3) = 0\;,
$$

$$
-\omega f_1 - i\;f_1' - \frac{i}{\text{tg}\,\chi} f_1 - \frac{i}{\sin\chi}\;\frac{\nu}{\sqrt{2}}\;f_2 = 0\;,
$$

$$
-\omega f_2 + \frac{i}{\sin\chi}\;\frac{\nu}{\sqrt{2}}(f_1 - f_3) = 0\;,
$$

$$
-\omega f_3 + i\;f_3' + \frac{i}{\text{tg}\,\chi} f_3 + \frac{i}{\sin\chi}\;\frac{\nu}{\sqrt{2}}\;f_2 = 0\;. \qquad (4.2.5)
$$

Система упрощается с использованием подстановки

$$
f_1 = \frac{1}{\sin\chi}\;F_1 \qquad f_2 = \frac{1}{\sin\chi}\;F_2\;, \qquad f_3 = \frac{1}{\sin\chi}\;F_3\;,
$$

в результате получим

$$
(1) \qquad (\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\text{tg}\,\chi})\;\omega F_2 + \frac{\omega\;\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\;(F_1+F_3) = 0\;,
$$

$$
(2) \qquad -\,\omega^2 F_1 - i\omega\;F_1' - \frac{i\;\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\;\omega F_2 = 0\;,
$$

$$
(3) \qquad \omega F_2 = \frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}(F_1 - F_3)\;,
$$

$$(4) \qquad -\omega^2 F_3 + i\,\omega F_3' + \frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\,\omega F_2 = 0\,. \tag{4.2.6}$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), с учетом (3) получим

(2) + (4) ,

$$-\omega(F_1 + F_3) - i(F_1' - F_3') = 0\,, \tag{4.2.7a}$$

−(2) + (4) ,

$$\omega^2(F_1 - F_3) + i\omega(F_1' + F_3') + \frac{2i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\,\frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}(F_1 - F_3) = 0\,. \tag{4.2.7b}$$

Если в уравнении (1) (4.2.6) учесть уравнение (3) из (4.2.6) и (4.2.7a), то придем к тождеству $0 \equiv 0$:

$$\left(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi}\right)\,\frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}(F_1 - F_3) + \frac{\omega\ \nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\,(-i)(F_1' - F_3') = 0\,. \tag{4.2.8}$$

Таким образом, задача сведена к системе из трех независимых уравнений:

$$\omega F_2 = \frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}(F_1 - F_3)\,, \qquad -\omega(F_1 + F_3) - i(F_1' - F_3') = 0\,,$$

$$\omega^2(F_1 - F_3) + i\omega(F_1' + F_3') + \frac{2i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}\,\frac{i\nu}{\sqrt{2}\sin\chi}(F_1 - F_3) = 0\,. \tag{4.2.9}$$

Введем новые функции:

$$F = \frac{F_1 + F_3}{\sqrt{2}}\,, \qquad G = \frac{F_1 - F_3}{\sqrt{2}}\,,$$

тогда (4.2.9) переписывается так:

$$F_2 = \frac{i\nu}{\omega\ \sin\chi}\,G\,, \qquad F = -\frac{i}{\omega}\,\frac{d}{d\chi}G\,,$$

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\,G + \omega^2 G - \frac{\nu^2}{\sin^2\chi}\,G = 0\,. \tag{4.2.10}$$

4.3 Решение радиальных уравнений

Ближайшая задача – решить уравнение

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\,G + \omega^2 G - \frac{\nu^2}{\sin^2\chi}\,G = 0\,. \tag{4.3.1}$$

Введем новую переменную $z = 1 - e^{-2i\chi}$, $z = 2\sin\chi\ e^{i(-\chi+\pi/2)}$; переменная z пробегает на комплексной плоскости замкнутый контур, начинающийся и заканчивающийся в точке $(0,0)$; схематически он изображен на рисунке 1.

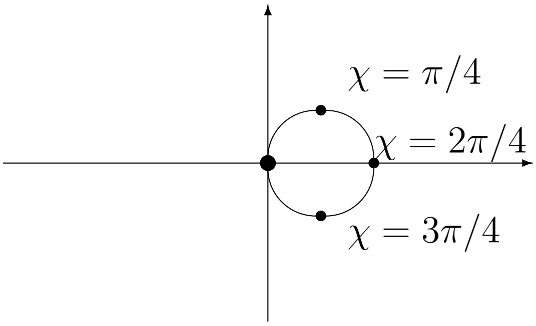


Рисунок 1 – Переменная z

Учитывая соотношения

$$\frac{d}{d\chi} = 2i(1-z)\frac{d}{dz}\,, \qquad \frac{\cos\chi}{\sin\chi} = i\frac{2-z}{z}\,, \qquad \frac{1}{\sin^2\chi} = -\frac{4(1-z)}{z^2}\,,$$

уравнение (4.3.1) преобразуется к виду

$$4(1-z)^2\frac{d^2G}{dz^2} - 4(1-z)\frac{dG}{dz} - \omega^2 G - \frac{4(1-z)\nu^2}{z^2}\,G = 0\,. \qquad (4.3.2)$$

Для G вводим подстановку

$$G = z^a(1-z)^b g(z)\,,$$

$$G' = az^{a-1}(1-z)^b g(z) - bz^a(1-z)^{b-1}g(z) + z^a(1-z)^b\frac{dg(z)}{dz}\,,$$

$$G'' = a(a-1)z^{a-2}(1-z)^b g(z) - abz^{a-1}(1-z)^{b-1}g(z) + az^{a-1}(1-z)^b\frac{dg(z)}{dz} -$$
$$-abz^{a-1}(1-z)^{b-1}g(z) + b(b-1)z^a(1-z)^{b-2}g(z) - bz^a(1-z)^{b-1}\frac{dg(z)}{dz} +$$
$$+az^{a-1}(1-z)^b\frac{dg(z)}{dz} - bz^a(1-z)^{b-1}\frac{dg(z)}{dz} + z^a(1-z)^b\frac{d^2g(z)}{dz^2}\,. \qquad (4.3.3a)$$

Подставляя функцию G из (4.3.3a) в уравнение (4.3.2), получим следующее дифференциальное уравнение для $g(z)$:

$$z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2} + \left[2a - (2a+2b+1)z\right]\frac{dg}{dz} +$$
$$+\left[\frac{\omega^2}{4} - (a+b)^2 + (a(a-1)-\nu^2)\frac{1}{z} + (b^2 - \frac{\omega^2}{4})\frac{1}{1-z}\right] g = 0.$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$a = j+1, -j\,, \qquad b = \pm\frac{\omega}{2}\,. \qquad (4.3.3b)$$

В результате для функции g получаем уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\ \frac{dg}{dz} - \left[(a+b)^2 - \frac{\omega^2}{4}\right] g = 0\ , \qquad (4.3.4)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\ F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\ F' - \alpha\beta\ F = 0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 2a\ , \qquad \alpha+\beta = 2a+2b\ , \qquad \alpha\beta = (a+b)^2 - \frac{\omega^2}{4}\ ,$$

т. е.

$$\alpha = a+b-\frac{\omega}{2}\ , \qquad \beta = a+b+\frac{\omega}{2}\ . \qquad (4.3.5)$$

Функция G равна

$$G = z^a(1-z)^b g(z) = \left[\ 2i\sin\chi e^{-i\chi}\ \right]^a\ \left[\ 1-2i\sin\chi e^{-i\chi}\ \right]^b\ g(z)\ ;$$

это решение конечно в точках $\chi = 0$ и $\chi = \pi$ только при положительном a (см. (4.3.3)):

$$a = j+1\ . \qquad (4.3.6)$$

и при $b = -\omega/2$, когда гипергеометрический ряд можно оборвать до полинома (предполагаем $\omega > 0$):

$$\alpha = j+1-\omega = -n = \{0, -1, -2, ...\ \} \implies \omega = n+1+j\ .$$

Таким образом, физические решения уравнения Максвелла в сферическом пространстве Римана описываются соотношениями

$$G = z^a(1-z)^b g(z) = \left[\ 2i\sin\chi e^{-i\chi}\ \right]^a\ \left[\ 1-2i\sin\chi e^{-i\chi}\ \right]^b\ g(z)\ ,$$

$$g(z) = F(-n, j+1, 2j+2;\ z) = F(-n, j+1, 2j+2; 2i\sin\chi e^{-i\chi})\ ; \quad (4.3.7a)$$

квантование частоты описывается формулой

$$\omega = n+1+j\ , \qquad j = 0, 1, 2, ..., \qquad n = 0, 1, 2, ...; \qquad (4.3.7b)$$

или в обычных единицах (ρ – радиус кривизны пространства)

$$\omega = \frac{c}{\rho}\ (n+1+j)\ . \qquad (4.3.7c)$$

4.4 Сферические координаты и тетрада в гиперболическом пространстве Лобачевского

Рассмотрим матричное уравнение Максвелла в цилиндрических координатах пространства Лобачевского H_3:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - d\chi^2 - \text{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ ,$$

$$x^\alpha = (ct, \chi, \theta, \phi)\ , \qquad g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sh}^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sh}^2\chi\sin^2\theta \end{vmatrix} . \qquad (4.4.1)$$

Будем использовать тетраду:

$$e^\alpha_{(0)} = (1,0,0,0)\ , \qquad e^\alpha_{(3)} = (0,1,0,0)\ ,$$

$$e^\alpha_{(1)} = (0,0,\frac{1}{\text{sh}\,\chi},0)\ , \qquad e^\alpha_{(2)} = (1,0,0,\frac{1}{\text{sh}\,\chi\sin\theta})\ . \qquad (4.4.2)$$

Символы Кристоффеля в этой системе координат равны

$$\Gamma^\chi_{\phi\phi} = -\text{sh}\,\chi\text{ch}\chi\sin^2\theta\ , \qquad \Gamma^\chi_{\theta\theta} = -\text{sh}\,\chi\text{ch}\,\chi\ ,$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\ ,\ \Gamma^\theta_{\theta\chi} = \frac{\text{ch}\,\chi}{\text{sh}\,\chi},\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \text{ctg}\,\theta\ ,\ \Gamma^\phi_{\chi\phi} = \frac{\text{ch}\,\chi}{\text{sh}\,\chi}\ . \qquad (4.4.3)$$

Отвечающие тетраде (4.4.2) коэффициенты вращения Риччи равны

$$\gamma_{ab0} = 0\ ,\ \gamma_{ab3} = 0\ , \qquad \gamma_{ab1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\text{th}\,\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{\text{th}\,\chi} & 0 & 0 \end{vmatrix}\ ,$$

$$\gamma_{ab2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{\text{tg}\,\theta\,\text{sh}\,\chi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\text{tg}\,\theta\,\text{sh}\,\chi} & 0 & -\frac{1}{\text{th}\,\chi} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{\text{th}\,\chi} & 0 \end{vmatrix} . \qquad (4.4.4)$$

Используя явный вид тетрады и коэффициентов вращения Риччи, находим обобщенные матрицы $\alpha^\alpha(x)$ и связность $A_\alpha(x)$:

$$\alpha^\alpha(x) = (\ \alpha^0,\ \alpha^3,\ \frac{\alpha^1}{\text{sh}\,\chi}\ ,\ \frac{\alpha^2}{\text{sh}\,\chi\sin\theta}\ )\ , \qquad A_0(x) = 0\ ,$$

$$A_\chi(x) = 0\ , \qquad A_\theta(x) = j^{31}\ , \qquad A_\phi(x) = \sin\theta\, j^{32} + \cos\theta\, j^{12}\ . \qquad (4.4.5)$$

С учетом (4.4.5) уравнение Максвелла без внешних источников

$$\alpha^{c} \; (\; e^{\rho}_{(c)} \partial_{\rho} + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \;) \; \Psi = 0 \tag{4.4.6}$$

принимает вид (используем циклический базис)

$$[\; -i \frac{\partial}{\partial t} \; + \; \alpha^{'3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha^{'1} s'_2 - \alpha^{'2} s'_1}{\text{th} \; \chi} \; + \; \frac{1}{\text{sh} \; \chi} \; \Sigma'_{\theta,\phi} \;] \; \Psi'(x) = 0 \; ,$$

$$\Sigma'_{\theta,\phi} = \alpha^{'1} \; \partial_{\theta} \; + \; \alpha^{'2} \; \frac{\partial_{\phi} + \cos\theta \; s'_3}{\sin\theta} \; . \tag{4.4.7}$$

4.5 Разделение переменных в модели H_3

Будем диагонализировать на решениях квадрат и третью проекцию полного момента электромагнитного поля, этому отвечает подстановка для полевой функции

$$\psi = e^{-i\omega t} \left| \begin{array}{l} 0 \\ f_1(r) D_{-1} \\ f_2(r) D_0 \\ f_3(r) D_{+1} \end{array} \right| . \tag{4.5.1}$$

Проведя вычисления, аналогичные выполненным выше, получим систему радиальных уравнений

$$f'_2 + \frac{2}{\text{th} \; \chi} f_2 + \frac{1}{\text{sh} \; \chi} \; \frac{\nu}{\sqrt{2}} \; (f_1 + f_3) = 0 \; ,$$

$$-\omega f_1 - i \; f'_1 - \frac{i}{\text{th} \; \chi} f_1 - \frac{i}{\text{sh} \; \chi} \; \frac{\nu}{\sqrt{2}} \; f_2 = 0 \; ,$$

$$-\omega f_2 + \frac{i}{\text{sh} \; \chi} \; \frac{\nu}{\sqrt{2}} (f_1 - f_3) = 0 \; ,$$

$$-\omega f_3 + i \; f'_3 + \frac{i}{\text{th} \; \chi} f_3 + \frac{i}{\text{sh} \; \chi} \; \frac{\nu}{\sqrt{2}} \; f_2 = 0 \; . \tag{4.5.2}$$

Система упрощается при использовании подстановки

$$f_1 = \frac{1}{\text{sh} \; \chi} \; F_1 \; , \qquad f_2 = \frac{1}{\text{sh} \; \chi} \; F_2 \; , \qquad f_3 = \frac{1}{\text{sh} \; \chi} \; F_3 \; ,$$

в результате получим

$$(1) \qquad (\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\text{th} \; \chi}) \; \omega F_2 + \frac{\omega \; \nu}{\sqrt{2} \text{sh} \; \chi} \; (F_1 + F_3) = 0 \; ,$$

$$(2) \qquad - \omega^2 F_1 - i\omega \; F'_1 - \frac{i \; \nu}{\sqrt{2} \text{sh} \; \chi} \; \omega F_2 = 0 \; ,$$

$$(3) \qquad \omega F_2 = \frac{i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}(F_1 - F_3)\;,$$

$$(4) \qquad -\omega^2 F_3 + i\,\omega F_3' + \frac{i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}\,\omega F_2 = 0\;. \qquad (4.5.3)$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), с учетом (3) получим

$(2) + (4)$,

$$-\omega(F_1 + F_3) - i(F_1' - F_3') = 0\;, \qquad (4.5.4a)$$

$-(2) + (4)$,

$$\omega^2(F_1 - F_3) + i\omega(F_1' + F_3') + \frac{2i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}\,\frac{i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}(F_1 - F_3) = 0\;. \qquad (4.5.4b)$$

Если в уравнении (1) (4.5.3) учесть уравнение (3) из (4.5.3) и (4.5.4a), то придем к тождеству $0 \equiv 0$. Таким образом, задача сведена к системе из трех независимых уравнений:

$$\omega F_2 = \frac{i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}(F_1 - F_3)\;, \qquad -\omega(F_1 + F_3) - i(F_1' - F_3') = 0\;,$$

$$\omega^2(F_1 - F_3) + i\omega(F_1' + F_3') + \frac{2i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}\,\frac{i\nu}{\sqrt{2}\text{sh}\,\chi}(F_1 - F_3) = 0\;. \qquad (4.5.5)$$

Введем новые функции:

$$F = \frac{F_1 + F_3}{\sqrt{2}}\;, \qquad G = \frac{F_1 - F_3}{\sqrt{2}}\;,$$

тогда (4.5.5) переписывается так:

$$F_2 = \frac{i\nu}{\omega\;\text{sh}\,\chi}\,G\;, \qquad F = -\frac{i}{\omega}\,\frac{d}{d\chi}G\;,$$

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\,G + \omega^2 G - \frac{\nu^2}{\text{sh}^2\chi}\,G = 0\;. \qquad (4.5.6)$$

4.6 Решение радиальных уравнений в модели H_3

В уравнении

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\,G + \omega^2 G - \frac{\nu^2}{\text{sh}\,^2\chi}\,G = 0 \qquad (4.6.1)$$

введем новую переменную $z = 1 - e^{-2\chi}$, $\qquad z = 2\;\text{sh}\,\chi\;e^{-\chi}$; в этом случае значениям $\chi = 0, \infty$ соответствуют $z = 0, 1$. Учитывая соотношения

$$\frac{d}{d\chi} = 2(1-z)\frac{d}{dz}\;, \qquad \frac{\text{ch}\,\chi}{\text{sh}\,\chi} = \frac{2-z}{z}\;, \qquad \frac{1}{\text{sh}^2\chi} = \frac{4(1-z)}{z^2}\;,$$

уравнение (4.6.1) преобразуется к виду

$$4(1-z)^2\frac{d^2G}{dz^2}\ -4(1-z)\frac{dG}{dz}+\omega^2G-\frac{4(1-z)\nu^2}{z^2}\,G=0\ . \qquad (4.6.2)$$

Для G вводим подстановку $G=z^a(1-z)^b g(z)$, тогда уравнение (4.6.2) примет вид:

$$z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2}+[2a-(2a+2b+1)z]\,\frac{dg}{dz}+$$
$$+\left[-\frac{\omega^2}{4}-(a+b)^2+(a(a-1)-\nu^2)\frac{1}{z}+(b^2+\frac{\omega^2}{4})\frac{1}{1-z}\right]g=0\ .$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$a=j+1,-j\ , \qquad b=\pm\frac{i\omega}{2}\ . \qquad (4.6.3)$$

В результате для функции g получаем уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2}+[2a-(2a+2b+1)z]\ \frac{dg}{dz}-\left[(a+b)^2+\frac{\omega^2}{4}\right]g=0\ , \qquad (4.6.4)$$

что является уравнением гипергеометрического типа. Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha=a+b-\frac{i\omega}{2}, \qquad \beta=a+b+\frac{i\omega}{2}\ . \qquad (4.6.5)$$

Функция G равна

$$G=z^a(1-z)^b g(z)=\left[\,2\,\mathrm{sh}\,\chi e^{-\chi}\,\right]^a\ \left[\,1-2\,\mathrm{sh}\,\chi e^{-\chi}\,\right]^b\ g(z)\ . \qquad (4.6.6)$$

Глава 5

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ ДАФФИНА–КЕММЕРА НА ФОНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

5.1 Разделение переменных

Рассмотрим задачу о сферических волнах для электромагнитного поля в пространстве Римана S_3, на основе общековариантного матричного формализма Даффина–Кеммера. В гиперсферических координатах и тетраде S_3

$$dS^2 = c^2 dt^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \qquad (5.1.1a)$$

$$e^{\alpha}_{(0)} = (1,0,0,0)\,, \qquad e^{\alpha}_{(3)} = (0,1,0,0)\,,$$

$$e^{\alpha}_{(1)} = (0,0,\frac{1}{\sin\chi},0)\,, \qquad e^{\alpha}_{(2)} = (1,0,0,\frac{1}{\sin\chi\sin\theta}) \qquad (5.1.1b)$$

уравнение Даффина–Кеммера для безмассовой векторной частицы (фотона) записывается так:

$$[\; i\,\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\,\beta^3 \frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{i}{\sin\chi}\,(\beta^1 J^{31} + \beta^2 J^{32}) + \frac{1}{\sin\chi}\,\Sigma_{\theta,\phi} - P_6\;]\;\Phi(x) = 0\,,$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \; i\,\beta^1\partial_\theta + \beta^2 \frac{i\partial + iJ^{12}\cos\theta}{\sin\theta}\,, \qquad P_6 = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right|\,. \qquad (5.1.2)$$

Будем использовать циклическое представление для матриц Даффина–Кеммера, в котором матрица iJ^{12} имеет диагональную структуру

$$iJ^{12} = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{array}\right|\,, \qquad t_3 = \left|\begin{array}{ccc} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right|\,.$$

Три компоненты сохраняющегося общего момента здесь равны

$$J_1 = l_1 + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\,iJ^{12}\,, \qquad J_2 = \; l_2 + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,iJ^{12}\,, \qquad J_3 = l_3\,.$$

Согласно общей методике [197], волновая функция векторной частицы с квантовыми числами $(\epsilon,\ j,\ m)$ должна строиться следующим образом:

$$\Phi_{\epsilon jm}(x) = e^{-i\omega t}\;[\; f_1(r)\,D_0,\; f_2(r)\,D_{-1},\; f_3(r)\,D_0,\; f_4(r)\,D_{+1},$$

$$f_5(r)\ D_{-1}, f_6(r)\ D_0,\ \ f_7(r)\ D_{+1}, f_8(r)\ D_{-1},\ \ f_9(r)\ D_0,\ \ f_{10}(r)\ D_{+1}\ ]\ . \qquad (5.1.3)$$

Приведем необходимые в дальнейшем рекуррентные соотношения [179]:

$$\partial_\theta\ D_{-1} = (1/2)\ (\ a\ D_{-2} - \sqrt{j(j+1)}\ D_0\ )\ ,$$
$$\frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta}\ D_{-1} = (1/2)\ (\ -a\ D_{-2} - \sqrt{j(j+1)}\ D_0\ )\ ,$$
$$\partial_\theta\ D_0 = (1/2)\ \sqrt{j(j+1)}\ (\ D_{-1} - D_{+1}\ )\ ,$$
$$\frac{-m}{\sin\theta}\ D_0 = (1/2)\ \sqrt{j(j+1)}\ (-D_{-1} - D_{+1}\ )\ ,$$
$$\partial_\theta\ D_{+1} = (1/2)\ (\ \sqrt{j(j+1)}\ D_0 - a\ D_{+2}\ )\ ,$$
$$\frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}\ D_{+1} = (1/2)\ (\ -\sqrt{j(j+1)}\ D_0 -\ a\ D_{+2}\ )\ ,$$
$$a = \sqrt{(j-1)(j+2)}\ .$$

Принимая во внимание равенства (экспоненциальный множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем)

$$\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi}\ \Phi = \sqrt{j(j+1)} \left| \begin{array}{r} (-f_5 - f_7)\ D_0 \\ -\ i\ f_9\ D_{-1} \\ (\ -if_8 +\ if_{10})\ D_0 \\ -if_9\ D_{+1} \\ f_1\ D_{-1} \\ 0 \\ f_1\ D_{+1} \\ -if_3\ D_{-1} \\ (+if_2 - if_4)\ D_0 \\ +if_3\ D_{+1} \end{array} \right| , \qquad i\ \beta^0\ \partial_t\ \Phi = \ \epsilon \left| \begin{array}{r} 0 \\ if_5\ D_{-1} \\ if_6\ D_0 \\ if_7\ D_{+1} \\ -if_2\ D_{-1} \\ -if_3\ D_0 \\ -if_4\ D_{+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| ,$$

$$i\ (\ \beta^3\ \frac{\partial}{\partial\chi}\ +\ \frac{\beta^1\ J^{31} + \beta^2\ J^{32}}{\sin\chi}\ )\ \Phi_{\epsilon jm} = \left| \begin{array}{c} (-d/d\chi - 2/\sin\chi) f_6\ D_0 \\ (id/d\chi + i/\sin\chi) f_8\ D_{-1} \\ 0 \\ (-id/d\chi - i/\sin\chi) f_{10}\ D_{+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (-id/d\chi - i/\sin\chi) f_2\ D_{-1} \\ 0 \\ (id/d\chi + i/\chi) f_4\ D_{+1} \end{array} \right| ,$$

находим систему для 10 радиальных уравнений ($\nu = \sqrt{j(j+1)/2}$):

$$-(\frac{d}{d\chi}+\frac{2}{\mathrm{tg}\ \chi})\ f_6 - \frac{\nu}{\chi}\ (f_5+f_7) = 0\ , \qquad i\omega f_5 + i(\frac{d}{d\chi}+\frac{1}{\mathrm{tg}\ \chi})\ f_8 + i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_9 = 0\ ,$$

$$i\epsilon f_6 + i\frac{\nu}{\sin\chi}(-f_8 + f_{10}) = 0\ , \qquad i\omega f_7 - i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_{10} - i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_9 = 0\ ,$$

$$-i\omega f_2 + \frac{\nu}{\sin\chi}\ f_1 - f_5 = 0\ , \qquad -i\omega f_3 - \frac{d}{d\chi}\ f_1 - f_6 = 0\ ,$$

$$-i\omega f_4 + \frac{\nu}{\sin\chi}\ f_1 - f_7 = 0\ , \qquad -i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_2 - i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_3 - f_8 = 0\ ,$$

$$i\frac{\nu}{r}\ (f_2 - f_4) - f_9 = 0\ , \qquad i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_4 + i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_3 - f_{10} = 0\ . \qquad (5.1.4)$$

Диагонализируя на решениях $\Phi_{\epsilon jm}$ оператор пространственной инверсии (в циклическом базисе), из уравнения $\hat{P}^{cycl.}_{sph.}\ \Phi_{jm} = P\ \Phi_{jm}$ получаем:

$$P = (-1)^{j+1}\ ,$$

$$f_1 = f_3 = f_6 = 0\ , \ \ f_4 = -f_2\ , \ \ f_7 = -f_5\ , \ \ f_{10} = +f_8\ ; \qquad (5.1.5a)$$

$$P = (-1)^{j}\ ,$$

$$f_9 = 0\ , \ \ f_4 = +f_2\ , \ \ f_7 = +f_5\ , \ \ f_{10} = -f_8\ . \qquad (5.1.5b)$$

Учитывая соотношения (5.1.5a), (5.1.5b) в уравнениях (5.1.4), находим две системы:

$$P = (-1)^{j+1}\ ,$$

$$i\omega\ f_5 + i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_8 + i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_9 = 0\ , \qquad -i\omega\ f_2 - f_5 = 0\ ,$$

$$-i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_2 - f_8 = 0\ , \qquad 2i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_2 - f_9 = 0\ ; \qquad (5.1.6a)$$

$$P = (-1)^{j}\ ,$$

$$(\frac{d}{d\chi} + \frac{2}{\operatorname{tg}\chi})\ f_6 + \frac{2\nu}{\sin\chi}\ f_5 = 0\ , \qquad i\omega\ f_5 + i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_8 = 0\ ,$$

$$i\omega\ f_6 - \frac{2i\nu}{\sin\chi}\ f_8 = 0\ , \qquad -i\omega\ f_2 + \frac{\nu}{\sin\chi}\ f_1 - f_5 = 0\ ,$$

$$i\omega\ f_3 + \frac{d}{d\chi}f_1 + f_6 = 0\ , \qquad i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_2 + i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_3 + f_8 = 0\ . \qquad (5.1.6b)$$

5.2 Решение радиальных уравнений для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$

Рассмотрим сначала уравнения (5.1.6a). Выражая f_5, f_8, f_9 через f_2, и подставляя их в первое уравнение, для функции f $(f_2 = \sin^{-1}\chi \; f(\chi))$ получаем

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\, f + (\, \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sin^2\chi}\,)\, f = 0\,. \qquad (5.2.1)$$

Введем новую переменную

$$z = 1 - e^{-2i\chi}\,, \qquad z = 2\sin\chi\; e^{i(-\chi+\pi/2)}\,;$$

переменная z пробегает на комплексной плоскости замкнутый контур, начинающийся и заканчивающийся в точке $(0,0)$. Учитывая соотношения

$$\frac{d}{d\chi} = 2i(1-z)\frac{d}{dz}\,, \qquad \frac{\cos\chi}{\sin\chi} = i\frac{2-z}{z}\,, \qquad \frac{1}{\sin^2\chi} = -\frac{4(1-z)}{z^2}\,,$$

уравнение (5.2.1) преобразуется к виду

$$4(1-z)^2\frac{d^2 f}{dz^2} - 4(1-z)\frac{df}{dz} - \omega^2 f - \frac{4(1-z)\nu^2}{z^2}\, f = 0\,. \qquad (5.2.2)$$

Для f вводим подстановку $f = z^a(1-z)^b F(z)$; уравнение (5.2.2) дает

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\,\frac{dF}{dz} +$$

$$+\left[\frac{\omega^2}{4} - (a+b)^2 + (a(a-1)-\nu^2)\frac{1}{z} + (b^2 - \frac{\omega^2}{4})\frac{1}{1-z}\right] F = 0\,.$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$a(a-1) - \nu^2 = 0\,, \qquad b^2 - \frac{\omega^2}{4} = 0,$$

т. е.

$$a = j+1, -j\,, \qquad b = \pm\frac{\omega}{2}\,. \qquad (5.2.3)$$

В результате для функции F получаем уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\;\frac{dF}{dz} - [(a+b)^2 - \frac{\omega^2}{4}]\; F = 0, \quad (5.2.4)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\; F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\; F' - \alpha\beta\; F = 0\,.$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 2a \,, \qquad \alpha + \beta = 2a + 2b \,, \qquad \alpha\beta = (a+b)^2 - \frac{\omega^2}{4} \,,$$

т. е.

$$\alpha = a + b - \frac{\omega}{2} \,, \qquad \beta = a + b + \frac{\omega}{2} \,. \tag{5.2.5}$$

Функция G равна

$$f = z^a (1-z)^b F(z) = \Big[\, 2i \sin\chi e^{-i\chi} \, \Big]^a \, \Big[\, 1 - 2i\sin\chi e^{-i\chi} \, \Big]^b \, F(z) \,;$$

это решение конечно в точках $\chi = 0$ и $\chi = \pi$ только при положительном a (см. (5.2.3)):

$$a = j + 1 \tag{5.2.6}$$

и при $b = -\omega/2$, когда гипергеометрический ряд можно оборвать до полинома (предполагаем $\omega > 0$):

$$\alpha = j + 1 - \omega = -n = \{0, -1, -2, ... \} \quad \Longrightarrow$$

$$\omega = n + 1 + j \,.$$

Таким образом, физические решения со значением четности $P = (-1)^{j+1}$ описываются соотношениями

$$P = (-1)^{j+1} \,, \qquad f_2 = \frac{1}{\sin\chi} \, f(\chi) \,,$$

$$f = z^a (1-z)^b F(z) = \Big[\, 2i \sin\chi e^{-i\chi} \, \Big]^a \, \Big[\, 1 - 2i\sin\chi e^{-i\chi} \, \Big]^b \, F(z) \,,$$

$$F(z) = F(-n, \, j+1, \, 2j+2; \, 2i\sin\chi e^{-i\chi}) \,; \tag{5.2.7a}$$

квантование частоты описывается формулой

$$\omega = n + 1 + j \,, \qquad j = 0, 1, 2, ..., \qquad n = 0, 1, 2, ...; \tag{5.2.7b}$$

или в обычных единицах (ρ – радиус кривизны пространства)

$$\omega = \frac{c}{\rho} \, (n + 1 + j) \,. \tag{5.2.7c}$$

5.3 Решения градиентного типа

Уравнения для безмассового векторного поля (запишем их в тензорной форме Прока) в любом пространстве-времени имеют всегда решения тривиального (градиентного) типа

$$\nabla_\alpha \Phi_\beta - \nabla_\beta \Phi_\alpha = \Phi_{\alpha\beta} \,, \qquad \nabla^\beta \Phi_{\alpha\beta} = 0 \,;$$

$$\Phi^{grad}_{\alpha} = \nabla_{\alpha}\Phi \; , \qquad \Phi_{\alpha\beta} = 0 \; . \tag{5.3.1}$$

В тетрадной форме Даффина–Кеммера этим решениям отвечает следующая подстановка для радиальных функций

$$f_1, \, f_2, \, f_3, \, f_4; \qquad f_5 = ... = f_{10} = 0 \; . \tag{5.3.2}$$

Легко видеть, что среди состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ таких градиентных решений быть не может. Система уравнений (5.1.6b) для решений с противоположной четностью $P = (-1)^{j}$ примет с учетом (5.3.2) следующий вид:

$P = (-1)^{j}$, (градиентное решение)

$$0 = 0 \; , \qquad 0 = 0 \; , \qquad 0 = 0 \; ,$$

$$-i\omega \; f_2 + \frac{\nu}{\sin\chi} \; f_1 = 0 \; , \qquad i\omega \; f_3 + \frac{d}{d\chi} f_1 = 0 \; ,$$

$$i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\chi}) \; f_2 + i \frac{\nu}{\sin\chi} \; f_3 = 0 \; . \tag{5.3.3a}$$

Исключая функции f_2 и f_3, получим

$P = (-1)^{j}$, (градиентное решение)

$$i\omega \; f_2 = \frac{\nu}{\sin\chi} \; f_1 \; , \qquad i\omega \; f_3 = -\frac{d}{d\chi} f_1 \; , \qquad 0 = 0 \; . \tag{5.3.3b}$$

Введем дополнительное условие: пусть условие градиентного типа удовлетворяет условию Лоренца

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\Phi = 0 \; , \qquad \nabla^{\alpha} \; \Phi^{grad}_{\alpha} = 0 \; . \tag{5.3.4}$$

Исходим из уравнения Лапласа, принимающего в гиперсферических координатах вид (используем обозначение для оператора орбитального момента)

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\sin^2\chi} \frac{\partial}{\partial\chi} \sin^2\chi \frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{1}{\sin^2\chi} \; \hat{l}^2 \;) \; \Phi = 0 \; .$$

Используем подстановку

$$\Phi = e^{-i\omega t} \; f(\chi) \; D^{j}_{-m,0}(\phi, \theta, 0) \; , \tag{5.3.5a}$$

находим уравнение для радиальной функции $f(\chi)$:

$$[\; \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{2}{\operatorname{tg}\chi} \; \frac{d}{d\chi} + \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sin^2\chi} \;] \; f = 0 \; . \tag{5.3.5b}$$

Найдем подстановку $f(\chi) = M \; F(\chi)$, исключающую член с первой производной:

$$f(\chi) = \frac{1}{\sin\chi} \; F(\chi) \; , \qquad \frac{d^2}{d\chi^2} F + [\omega^2 + 1 - \frac{j(j+1)}{\sin^2\chi}] \; F = 0 \; . \tag{5.3.5c}$$

Уравнение этого вида уже исследовалось в разделе **5.2**. В анализе достаточно сделать простые формальные замены:

$$z = 1 - e^{-2i\chi} \, , \qquad z = 2\sin\chi \; e^{i(-\chi+\pi/2)} \, ,$$

$$4(1-z)^2 \frac{d^2 F}{dz^2} \; - 4(1-z)\frac{dF}{dz} - \omega^2 F - F - \frac{4(1-z)\nu^2}{z^2} \; F = 0 \, ,$$

$$F = z^a (1-z)^b F(z) \, ,$$

$$a = j+1, -j \, , \qquad b = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+1} \, ,$$

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z] \; \frac{dF}{dz} - \left[(a+b)^2 - \frac{\omega^2+1}{4} \right] F = 0 \, ,$$

$$z(1-z) \; F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z] \; F' - \alpha\beta \; F = 0 \, ,$$

$$\alpha = a + b - \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+1} \, , \qquad \beta = a + b + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+1} \, . \qquad (5.3.6)$$

Условие квантования выглядит так:

$$a = j + 1 \, , \qquad b = -\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+1} \, ,$$

$$\alpha = j + 1 - \sqrt{\omega^2+1} = -n \, , \qquad \omega^2 = (j+1+n)^2 - 1 \, . \qquad (5.3.7)$$

Имея теперь уже известным выражение для скалярной функции $\Phi = e^{-i\omega t} \; f(\chi) \; D_0$, найдем явный вид градиентного решения

$$\Phi^{grad}_{\beta} = \nabla_{\beta}\Phi = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \; e^{-i\omega t} \; f(\chi) \; D_0 \implies$$

$$\Phi^{grad}_0 = -i\omega \; e^{-i\omega t} \; f \; D_0 \, , \qquad \Phi^{grad}_{\chi} = e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial\chi} \; f \; D_0 \, ,$$

$$\Phi^{grad}_{\theta} = e^{-i\omega t} f \; \frac{\partial}{\partial\theta} D_0 \, , \qquad \Phi^{grad}_{\phi} = e^{-i\omega t} f \; im D_0 \, . \qquad (5.3.8a)$$

Находим тетрадные компоненты этого 4-вектора

$$\Phi^{grad}_{(a)} = e^{\beta}_{(a)} \Phi^{grad}_{\beta} \implies$$

$$\Phi^{grad}_{(0)} = -i\omega \; e^{-i\omega t} \; f \; D_0 \, , \qquad \Phi^{grad}_{(3)} = e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial\chi} \; f \; D_0 \, ,$$

$$\Phi^{grad}_{(1)} = \frac{1}{\sin\chi} \; e^{-i\omega t} f \; \frac{\partial}{\partial\theta} D_0 \, , \qquad \Phi^{grad}_{(2)} = \frac{im}{\sin\chi\sin\theta} \; e^{-i\omega t} f \; D_0 \, , \qquad (5.3.8b)$$

где Φ_a – тетрадные компоненты 4-вектора, взятые при использовании декартова базиса для матриц Даффина–Кеммера. Нужно это представление пересчитать к циклическому базису

$$e^{-i\omega t}\left|\begin{array}{c} f_1 D_0 \\ f_2 D_{-1} \\ f_3 D_0 \\ f_4 D_{+1} \end{array}\right|_{grad} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} \Phi^{grad}_{(0)} \\ \Phi^{grad}_{(1)} \\ \Phi^{grad}_{(2)} \\ \Phi^{grad}_{(3)} \end{array}\right| \; ;$$

получаем

$$f_1 = -i\omega\, f \; , \qquad f_3 = \frac{d}{d\chi}\, f \; ,$$

$$f_2\; D_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sin\chi}\; f\;\; (\, -\partial_\theta D_0 - \frac{m}{\sin\theta}\; D_0\,)\; ,$$

$$f_4\; D_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\chi}\; f\; (\, \partial_\theta D_0 - \frac{m}{\sin\theta}\, D_0\,)\; . \qquad (5.3.8c)$$

Воспользовавшись известными рекуррентными соотношениями

$$\partial_\theta D_0 + \frac{m}{\sin\theta} D_0 = \sqrt{j(j+1)}\; D_{-1}\; ,$$

$$\partial_\theta D_0 - \frac{m}{\sin\theta} D_0 = -\sqrt{j(j+1)}\; D_{+1}\; ,$$

(5.3.8c) преобразуем к виду

$$f_1 = -i\omega\, f \; , \qquad f_3 = \frac{d}{d\chi}\, f \; ,$$

$$f_2 = f_4 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}}\;\frac{f}{\sin\chi}\; . \qquad (5.3.8d)$$

Отметим, что (5.3.8d) согласуется с условием $f_4 = f_2$ для решений с четностью $P = (-1)^j$ – см. (5.1.5b). Также убеждаемся, что (5.3.8d) согласуется с полученными ранее соотношениями (5.3.3b).

5.4 Условие Лоренца в сферическом пространстве

Рассмотрим детальнее формулировку условия Лоренца $\nabla_\beta \Phi^\beta(x) = 0$. Записанное в тетрадных компонентах оно имеет вид

$$\Phi_a e^{(a)\alpha}_{\;\;;\alpha} + e^{(a)\alpha}\partial_a \Phi_a = 0\; , \qquad (5.4.1)$$

где Φ_a – тетрадные компоненты 4-вектора, взятые при использовании декартова базиса для матриц Даффина–Кеммера. Этот 4-вектор имеет следующий явный вид

$$\left| \begin{array}{c} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} f_1 D_0 \\ f_2 D_{-1} \\ f_3 D_0 \\ f_4 D_{+1} \end{array} \right| . \tag{5.4.2}$$

Находим

$$e^{(0)\alpha}_{\ \ ;\alpha} = 0 , \qquad e^{(3)\alpha}_{\ \ ;\alpha} = -\frac{2}{\text{tg}\,\chi} ,$$
$$e^{(1)\alpha}_{\ \ ;\alpha} = -\frac{1}{\sin\chi}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} , \qquad e^{(2)\alpha}_{\ \ ;\alpha} = 0 \tag{5.4.3}$$

и, следовательно, условие (5.4.1) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-f_2 D_{-1} + f_4 D_{+1})(-\frac{1}{\sin\chi}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}) + f_3 D_0(-\frac{2}{\text{tg}\,\chi}) - i\omega f_1 D_0 - \partial_\chi f_3 D_0 -$$
$$-\frac{1}{\sin\chi}\partial_\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(-f_2 D_{-1} + f_4 D_{+1}) - \frac{1}{\sin\chi\sin\theta}\partial_\phi\frac{1}{\sqrt{2}}(-i f_2 D_{-1} - i f_4 D_{+1}) = 0 . \tag{5.4.4}$$

Последнее равенство после элементарного преобразования записывается так:

$$-i\omega f_1 D_0 - \partial_\chi f_3 D_0 - \frac{2}{\text{tg}\,\chi} f_3 D_0 +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}\sin\chi}\left[f_2(\frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta} D_{-1} + \partial_\theta D_{-1}) - f_4(\frac{m+\cos\theta}{\sin\theta} D_{+1} + \partial_\theta D_{+1}) \right] = 0. \tag{5.4.5}$$

Воспользуемся известными рекуррентными соотношениями:

$$\frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta}\, D_{-1} + \partial_\theta D_{-1} = -\sqrt{j(j+1)}\, D_0 ,$$
$$\frac{+m+\cos\theta}{\sin\theta}\, D_{+1} + \partial_\theta D_{+1} = +\sqrt{j(j+1)}\, D_0 , \tag{5.4.6}$$

тогда (5.4.5) дает

$$-i\omega f_1 - (\frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{2}{\text{tg}\,\chi}) f_3 - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}\,\sin\chi}\,(f_2 + f_4) = 0 . \tag{5.4.7}$$

Напомним, что имеются ограничения, связанные с диагонализацией оператора пространственной инверсии, которые для четырех функций $f_i(r)$ дают:

$$P=(-1)^{j+1}\ , \qquad f_1=f_3=0\ ,\ f_2=-f_4\ ;$$
$$P=(-1)^{j}\ , \qquad\qquad f_2=+f_4\ .$$

При значении четности $P=(-1)^{j+1}$ условие Лоренца (5.4.7) выполняется тождественно: $0=0$. При значении четности $P=(-1)^j$ условие Лоренца примет вид

$P=(-1)^j$,

$$i\omega f_1+(\frac{\partial}{\partial\chi}+\frac{2}{\operatorname{tg}\chi})f_3+2\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_2=0\ . \tag{5.4.8}$$

Условие Лоренца (будучи наложенным) существенно ограничивает калибровочный произвол в решениях уравнения для бесмассовой векторной частицы. Однако он все еще остается. Его можно убрать полностью, если потребовать дополнительно (калибровка Ландау)

$$\Phi_0=0\ , \qquad \nabla^j\Phi_j=0\ ; \tag{5.4.9}$$

при этом вместо (5.4.7) будем иметь уравнение

$$f_1=0\ , \qquad (\frac{\partial}{\partial\chi}+\frac{2}{\operatorname{tg}\chi})f_3+\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}\,\sin\chi}\ (f_2+f_4)=0\ , \tag{5.4.10}$$

вместо (5.4.8) соответственно следующее:

$P=(-1)^j$,

$$f_1=0\ ,\ (\frac{\partial}{\partial\chi}+\frac{2}{\operatorname{tg}\chi})f_3+2\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_2=0\ . \tag{5.4.11}$$

5.5 Решение радиальных уравнений для состояний с четностью $P=(-1)^j$

Теперь обратимся к системе (5.1.6b) с учетом калибровки Ландау:

$P=(-1)^j$, (калибровка Ландау)

$$(\frac{d}{d\chi}+\frac{2}{\operatorname{tg}\chi})\ f_6+\frac{2\nu}{\sin\chi}\ f_5=0\ ,$$

$$i\omega\ f_5+i(\frac{d}{d\chi}+\frac{1}{\operatorname{tg}\chi})\ f_8=0\ ,$$

$$i\omega\ f_6-\frac{2i\nu}{\sin\chi}\ f_8=0\ , \qquad -i\omega\ f_2-f_5=0\ ,$$

$$i\omega\ f_3 + f_6 = 0\ , \qquad i(\frac{d}{d\chi} + \frac{1}{\mathrm{tg}\ \chi})\ f_2 + i\frac{\nu}{\sin\chi}\ f_3 + f_8 = 0\ . \qquad (5.5.1)$$

Вводим подстановки

$$f_2 = \frac{F_2}{\sin\chi}\ ,\ f_3 = F_3\ ,\ f_5 = \frac{F_5}{\sin\chi}\ ,$$

$$f_6 = \frac{F_6}{\sin^2\chi}\ ,\ f_8 = \frac{F_8}{\sin\chi}\ , \qquad (5.5.2)$$

уравнения (5.5.1) примут более простой вид

$P = (-1)^j$,

$$\frac{d}{d\chi}\ F_6 + 2\nu\ F_5 = 0\ , \qquad \omega\ F_5 + \frac{d}{d\chi}\ F_8 = 0\ ,$$

$$\omega\ F_6 - 2\nu\ F_8 = 0\ , \qquad -i\omega\ F_2 - F_5 = 0\ ,$$

$$i\omega\ F_3 + \frac{F_6}{\sin^2\chi} = 0\ , \qquad i\frac{d}{d\chi}\ F_2 + i\nu\ F_3 + F_8 = 0\ . \qquad (5.5.3)$$

Система (5.5.3) дает

$P = (-1)^j$,

$$F_5 = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\chi}F_8\ , \qquad F_6 = \frac{2\nu}{\omega}\ F_8\ ,$$

$$F_2 = -\frac{i}{\omega^2}\frac{d}{d\chi}\ F_8\ , \qquad F_3 = \frac{2i\nu}{\omega^2}\ \frac{1}{\sin^2\chi}\ F_8\ ,$$

$$(\frac{d^2}{d\chi^2} + \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sin^2\chi})\ F_8 = 0\ . \qquad (5.5.4)$$

Последнее уравнение уже решено в разделе **5.2**.

Глава 6

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА

6.1 Тетрадное представление матричного уравнения

Теперь матричное уравнение Максвелла в римановом пространстве

$$\alpha^c \left(e^{\rho}_{(c)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \right) \Psi = J(x) \, ,$$

$$\alpha^0 = -iI \, , \qquad \Psi = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| \, , \qquad J = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i\mathbf{j} \end{array} \right| \tag{6.1.1}$$

приведем к виду, удобному для практических вычислений с этим уравнением.

В более детальной записи это уравнение имеет вид

$$-i \left(e^{\rho}_{(0)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} \right) \Psi + \alpha^k \left(e^{\rho}_{(k)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} \right) \Psi = J(x) \, . \tag{6.1.2}$$

Учитывая

$$\frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} = [s^1 (\gamma_{230} + i\gamma_{010}) + s^2 (\gamma_{310} + i\gamma_{020}) + s^3 (\gamma_{120} + i\gamma_{030})] \, ,$$

$$\frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} = [s^1 (\gamma_{23k} + i\gamma_{01k}) + s^2 (\gamma_{31k} + i\gamma_{02k}) + s^3 (\gamma_{12k} + i\gamma_{03k})] \, , \tag{6.1.3}$$

и используя обозначения

$$e^{\rho}_{(0)} \partial_\rho = \partial_{(0)} \, , \qquad e^{\rho}_{(k)} \partial_\rho = \partial_{(k)} \, , \qquad a = 0, 1, 2, 3 \, ,$$

$$(\gamma_{01a}, \gamma_{02a}, \gamma_{03a}) = \mathbf{v}_a \, , \qquad (\gamma_{23a}, \gamma_{31a}, \gamma_{12a}) = \mathbf{p}_a \, , \tag{6.1.4}$$

уравнение (6.1.2) можно представить как

$$-i \left[\partial_{(0)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_0 + i\mathbf{v}_0) \right] \Psi + \alpha^k \left[\partial_{(k)} + \mathbf{s}(\mathbf{p}_k + i\mathbf{v}_k) \right] \Psi = J(x)$$

или

$$\left(\alpha^k \, \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \, \mathbf{s}\mathbf{p}_k \right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| -$$

$$-i \left(\partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k \right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ i \, \mathbf{j} \end{array} \right| , \tag{6.1.5}$$

где s^i обозначают генераторы

$$
s^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{vmatrix} , \qquad s^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix} ,
$$

$$
s^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{vmatrix} .
$$

6.2 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве S_3

Рассмотрим матричное уравнение Максвелла в цилиндрических координатах сферического пространства S_3:

$$
n_1 = \sin r \, \cos\phi \, , \;\; n_2 = \sin r \, \sin\phi \, , \;\; n_3 = \cos r \, \sin z \, , \;\; n_4 = \cos r \, \cos z \, ;
$$

$$
dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sin^2 r \, d\phi^2 - \cos^2 r \, dz^2 \, , \qquad x^\alpha = (t, r, \phi, z) \, ,
$$

$$
e^{\beta}_{(a)}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^{-1} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^{-1} r \end{vmatrix} , \; e_{(a)\beta}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos r \end{vmatrix} ; \tag{6.2.1}
$$

область изменения координат $(r, \; \phi, \; z)$

$$
G = \{ \rho \in [0, \; +\pi/2] \, , \;\; \phi \in [-\pi, \; +\pi] \, , \;\; z \in [-\pi, \; +\pi] \, \} \, . \tag{6.2.2}
$$

Следует вычислить сначала символы Кристоффеля; в силу простой (3+1)-факторизации метрики

$$
ds^2 = (dx^0)^2 + g_{jk}(x^1, x^2, x^3) \, dx^j dx^k \, ,
$$

часть символов Кристоффеля обращается в нуль: $\Gamma^0_{\beta\sigma} = 0$, $\Gamma^i_{00} = 0$, $\Gamma^i_{0j} = 0$, остальные определяются соотношением

$$
\Gamma^i{}_{jk} = g^{il} \, \Gamma_{l,jk} = \frac{1}{2} \, g^{il} \, (-\partial_l \, g_{jk} + \partial_j \, g_{lk} + \partial_k \, g_{lj}) \, , \qquad x^i = (r, \phi, z) \, . \tag{6.2.3}
$$

Эти 3-мерные символы Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$ равны

$$
\Gamma^r{}_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin r \cos r & 0 \\ 0 & 0 & \sin r \cos r \end{vmatrix} ,
$$

$$\Gamma^{\phi}{}_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\cos r}{\sin r} & 0 \\ \frac{\cos r}{\sin r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \qquad \Gamma^{z}{}_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sin r}{\cos r} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin r}{\cos r} & 0 & 0 \end{vmatrix} . \qquad (6.2.4)$$

Вычисляем ковариантные производные от тетрадных векторов:

$$A_{\beta;\alpha} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} A_\sigma \implies$$

$$e_{(0)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} e_{(0)\sigma} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{0}_{\alpha\beta}\; e_{(0)0} = 0 \; , \qquad (6.2.5a)$$

$$e_{(1)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(1)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{r}_{\alpha\beta}\; e_{(1)r} = 0 + \Gamma^{r}_{\alpha\beta} \implies$$

$$e_{(1)\beta;\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\sin r \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin r \cos r \end{vmatrix} , \qquad (6.2.5b)$$

$$e_{(2)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(2)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\phi}_{\alpha\beta}\; e_{(2)\phi} = \frac{\partial e_{(2)\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\phi}_{\alpha\beta} \sin r =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos r & 0 \\ 0 & \cos r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \implies e_{(2)\beta;\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \qquad (6.2.5c)$$

$$e_{(3)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(3)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{z}_{\alpha\beta}\; e_{(3)z} = \frac{\partial e_{(3)\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{z}_{\alpha\beta} \cos r =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin r & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin r & 0 & 0 \end{vmatrix} \implies$$

$$e_{(3)\beta;\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \qquad (6.2.5d)$$

Теперь предстоит вычислить коэффициенты вращения Риччи исходя из соотношения (учитываем диагональность тетрадной матрицы) $\gamma_{abc} = e_{(a)}^{\;\;\beta}\; e_{(b)\beta;\alpha}\; e^{\alpha}_{(c)}$; получаем

$$\gamma_{ab0} = e_{(a)}^{\;\;\beta}\; e_{(b)\beta;t}\; e^{t}_{(0)} = 0 \qquad (6.2.6a)$$

и

$$\gamma_{ab1} = e_{(a)}^{\;\;a}\, e_{(b)a;r}\, e^{r}_{(1)}\ , \qquad \gamma_{ab2} = e_{(a)}^{\;\;\beta}\, e_{(b)\beta;\phi}\, e^{\phi}_{(2)}\ ,$$

$$\gamma_{ab3} = e_{(a)}^{\;\;\beta}\, e_{(b)\beta;z}\, e^{z}_{(3)}\ . \qquad (6.2.6b)$$

Очевидно, что заведомо обращаются в нуль следующие коэффициенты Риччи

$$\gamma_{011} = \gamma_{021} = \gamma_{031} = 0\ , \qquad \gamma_{012} = \gamma_{022} = \gamma_{032} = 0\ ,$$

$$\gamma_{013} = \gamma_{023} = \gamma_{033} = 0\ ; \qquad (6.2.6c)$$

остальные девять определяются соотношениями

$$\gamma_{231} = e^{\phi}_{(2)}\, e_{(3)\phi;r}\, e^{r}_{(1)} = 0\ , \qquad \gamma_{311} = e^{z}_{(3)}\, e_{(1)z;r}\, e^{r}_{(1)} = 0\ ,$$

$$\gamma_{121} = e^{r}_{(1)}\, e_{(2)r;r}\, e^{r}_{(1)} = 0\ , \qquad \gamma_{232} = e_{(2)}^{\;\;\phi}\, e_{(3)\phi;\phi}\, e^{\phi}_{(2)} = 0\ ,$$

$$\gamma_{312} = e_{(3)}^{\;\;z}\, e_{(1)z;\phi}\, e^{\phi}_{(2)} = 0\ , \qquad \gamma_{122} = e_{(1)}^{\;\;r}\, e_{(2)r;\phi}\, e^{\phi}_{(2)} = \frac{\cos r}{\sin r}\ ,$$

$$\gamma_{233} = e_{(2)}^{\;\;\phi}\, e_{(3)\phi;z}\, e^{z}_{(3)} = 0\ , \qquad \gamma_{123} = e_{(1)}^{\;\;r}\, e_{(2)r;z}\, e^{z}_{(3)} = 0\ ,$$

$$\gamma_{313} = e_{(3)}^{\;\;z}\, e_{(1)z;z}\, e^{z}_{(3)} = \frac{\sin r}{\cos r}\ . \qquad (6.2.6d)$$

С целью дополнительного контроля можно вычислить коэффициенты вращения Риччи другим способом, основанном на их известном представлении через вспомогательные величины λ_{abc}. Действительно, вместо коэффициентов Риччи

$$\gamma_{abc} = -e_{(a)\alpha;\beta}\, e^{\alpha}_{(b)}\, e^{\beta}_{(c)}$$

введем антисимметричную по второй паре индексов величину $\lambda_{abc}(x)$ [5]:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb}\ . \qquad (6.2.7a)$$

Для λ_{abc} можем найти следующее представление через обычные производные от тетрады:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)\alpha;\beta} - e_{(a)\beta;\alpha})\, e^{\alpha}_{(c)} e^{\beta}_{(b)} =$$

$$= (\partial_{\beta} e_{(a)\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} e_{(a)\rho} - \partial_{\alpha} e_{(a)\beta} + \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} e_{(a)\rho})\, e^{\alpha}_{(c)} e^{\beta}_{(b)} =$$

$$= (\partial_{\beta} e_{(a)\alpha} - \partial_{\alpha} e_{(a)\beta})\, e^{\alpha}_{(c)} e^{\beta}_{(b)}\ ; \qquad (6.2.7b)$$

справедливо тождество [5]

$$\frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{abc} - \gamma_{acb} + \gamma_{bca} - \gamma_{bac} - \gamma_{cab} + \gamma_{cba}) \equiv \gamma_{abc}\ . \qquad (6.2.7c)$$

Сначала вычисляем λ_{abc} в диагональной цилиндрической тетраде

$$\lambda_{abc} = e^{b}_{(b)} \; (\partial_b e_{(a)c}) \; e^{c}_{((c)} - e^{c}_{(c)} \; (\partial_c e_{(a)b}) \; e^{b}_{((b)} \; ,$$

откуда следует

$$\lambda_{0bc} = e^{b}_{(b)} \; (\partial_b e_{(0)c}) \; e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)} \; (\partial_c e_{(0)b}) \; e^{b}_{(b)} \equiv 0 \; ,$$

$$\lambda_{1bc} = e^{b}_{(b)} \; (\partial_b e_{(1)c}) \; e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)} \; (\partial_c e_{(1)b}) \; e^{b}_{(b)} \equiv 0 \; , \qquad (6.2.8a)$$

и отличны от нуля только величины

$$\lambda_{2bc} = e^{b}_{(b)} \; (\partial_b e_{(2)c}) \; e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)} \; (\partial_c e_{(2)b}) \; e^{b}_{(b)} \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_{212} = e^{1}_{(1)} \; (\partial_1 e_{(2)2}) \; e^{2}_{(2)} = -\frac{\cos r}{\sin r} \; ,$$

$$\lambda_{221} = -e^{1}_{(1)} \; (\partial_1 e_{(2)2}) \; e^{2}_{(2)} = +\frac{\cos r}{\sin r} \; , \qquad (6.2.8b)$$

$$\lambda_{3bc} = e^{b}_{(b)} \; (\partial_b e_{(3)c}) \; e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)} \; (\partial_c e_{(3)b}) \; e^{b}_{(b)} \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_{313} = e^{1}_{(1)} \; (\partial_1 e_{(3)3}) \; e^{3}_{(3)} = +\frac{\sin r}{\cos r} \; ,$$

$$\lambda_{331} = -e^{1}_{(1)} \; (\partial_1 e_{(3)3}) \; e^{3}_{(3)} = -\frac{\sin r}{\cos r} \; . \qquad (6.2.8c)$$

Пользуясь формулой (6.2.7c), находим коэффициенты вращения Риччи:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{221} - \lambda_{212}) \; ,$$

$$\gamma_{ab0} = 0 \; , \qquad \gamma_{ab1} = 0 \; ,$$

$$\gamma_{122} = \frac{1}{2}(\lambda_{122} + \lambda_{221} - \lambda_{212}) = +\frac{\cos r}{\sin r} \; ,$$

$$\gamma_{313} = (\lambda_{313} + \lambda_{133} - \lambda_{331}) = +\frac{\sin r}{\cos r} \; . \qquad (6.2.9)$$

Учитывая обозначения (см. (6.1.4)):

$$e^{\rho}_{(0)}\partial_\rho = \partial_{(0)} = \partial_t \; , \;\; e^{\rho}_{(1)}\partial_\rho = \partial_{(1)} = \partial_r \; ,$$

$$e^{\rho}_{(2)}\partial_\rho = \partial_{(2)} = \frac{1}{\sin r}\partial_\phi \; , \;\; e^{\rho}_{(3)}\partial_\rho = \partial_{(3)} = \frac{1}{\cos r}\partial_z \; ,$$

$$\mathbf{v}_0 = (\gamma_{010}, \gamma_{020}, \gamma_{030}) \equiv 0 \; , \;\; \mathbf{v}_1 = (\gamma_{011}, \gamma_{021}, \gamma_{031}) \equiv 0 \; ,$$

$$\mathbf{v}_2 = (\gamma_{0120}, \gamma_{022}, \gamma_{032}) \equiv 0 \; , \qquad \mathbf{v}_3 = (\gamma_{013}, \gamma_{023}, \gamma_{033}) \equiv 0 \; ,$$

$$\mathbf{p}_0 = (\gamma_{230}, \gamma_{310}, \gamma_{120}) = 0 \; , \;\; \mathbf{p}_1 = (\gamma_{231}, \gamma_{311}, \gamma_{121}) = 0 \; ,$$

$$\mathbf{p}_2 = (\gamma_{232}, \gamma_{312}, \gamma_{122}) = (0, 0, \frac{\cos r}{\sin r}) \; ,$$

$$\mathbf{p}_3 = (\gamma_{233}, \gamma_{313}, \gamma_{123}) = (0, \frac{\sin r}{\cos r}, 0) \; ,$$

уравнение (6.1.5) приводим к виду

$$(\; \alpha^k \; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \; \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} -$$

$$-i \; (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \; \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

откуда следует

$$\Big(-i\partial_t + \alpha^1 \; \partial_r + \alpha^2 \; \frac{1}{\sin r}\partial_\phi + \alpha^3 \; \frac{1}{\cos r}\partial_z +$$

$$+\alpha^2 \; S_3 \; \frac{\cos r}{\sin r} + \alpha^3 \; S_2 \; \frac{\sin r}{\cos r} \Big) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0 \; . \qquad (6.2.10)$$

6.3 Разделение переменных в уравнении Максвелла

С волновым оператором Максвелла

$$\Big(-i\partial_t + \alpha^1 \; \partial_r + \alpha^2 \; \frac{1}{\sin r}\partial_\phi + \alpha^3 \; \frac{1}{\cos r}\partial_z +$$

$$+\alpha^2 \; S_3 \; \frac{\cos r}{\sin r} + \alpha^3 \; S_2 \; \frac{\sin r}{\cos r} \Big) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.3.1)$$

коммутируют следующие три: $i\partial_t$, $i\partial_\phi$, $i\partial_z$. Следовательно, для полевой функции можно использовать подстановку

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = e^{-i\omega t} \; e^{im\phi} \; e^{ikz} \; \begin{vmatrix} 0 \\ f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{vmatrix} \; . \qquad (6.3.2)$$

При этом уравнение (6.3.1) примет вид

$$\Big(-\omega + \alpha^1 \frac{d}{dr} + \frac{im}{\sin r}\alpha^2 + \frac{ik}{\cos r}\alpha^3 + \frac{\cos r}{\sin r}\alpha^2 S_3 + \frac{\sin r}{\cos r}\alpha^3 S_2 \Big) \begin{vmatrix} 0 \\ f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{vmatrix} = 0 \; . \qquad (6.3.3)$$

Напоминаем, что входящие сюда матрицы задаются равенствами

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad S^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (6.3.4)$$

После простых вычислений находим систему уравнений для радиальных функций:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{im}{\sin r}\ f_2 + \frac{ik}{\cos r}\ f_3 = 0\ ,$$
$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\cos r}\ f_2 + \frac{im}{\sin r}\ f_3 = 0\ ,$$
$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 + \frac{ik}{\cos r} f_1 = 0\ ,$$
$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 - \frac{im}{\sin r} f_1 = 0\ . \qquad (6.3.5)$$

Рассмотрим сначала случай $m = 0$, система уравнений при этом значительно упрощается:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{ik}{\cos r}\ f_3 = 0\ ,$$
$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\cos r}\ f_2 = 0\ ,$$
$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 + \frac{ik}{\cos r} f_1 = 0\ ,$$
$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 = 0 \qquad (6.3.6)$$

или

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{ik}{\cos r}\ f_3 = 0\ ,$$
$$f_1 = -\frac{ik}{\omega\ \cos r}\ f_2\ ,$$
$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 + \frac{ik}{\cos r} f_1 = 0\ ,$$
$$f_3 = \frac{1}{\omega}\ (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2\ . \qquad (6.3.7)$$

Если вторым и четвертым уравнениями воспользоваться в первом и третьем, то получим

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})\ \frac{-ik}{\omega\ \cos r}\ f_2 + \frac{ik}{\cos r}\ \frac{1}{\omega}\ (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 = 0\ ,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ \frac{1}{\omega}\ (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 + \frac{ik}{\cos r}\ \frac{-ik}{\omega\ \cos r}\ f_2 = 0\ . \qquad (6.3.8a)$$

Легко убеждаемся, что после простых преобразований уравнения (6.3.8a) сводятся к тождеству $0 \equiv 0$ и уравнению для f_2:

$$\frac{d^2}{dr^2}\, f_2 + (\frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})\, \frac{d}{dr}\, f_2 +$$

$$+(\omega^2 - 1 - \frac{1}{\sin^2 r} - \frac{k^2}{\cos^2 r})\, f_2 = 0\ . \qquad (6.3.8b)$$

Введем для функции f_2 подстановку

$$f_2(r) = \frac{1}{\sin r}\, E(r)\ , \qquad \frac{d}{dr}\, f_2 = \frac{1}{\sin r}\, \left(-\frac{\cos r}{\sin r}\, E + \frac{dE}{dr} \right),$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\, f_2 = \frac{1}{\sin r}\, \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - 2\frac{\cos r}{\sin r}\, \frac{dE}{dr} + (\frac{2}{\sin^2 r} - 1)\, E \right); \qquad (6.3.9a)$$

в результате уравнение (6.3.8b) примет вид

$$\left(\frac{d^2 E}{dr^2} - 2\frac{\cos r}{\sin r}\, \frac{dE}{dr} + (\frac{2}{\sin^2 r} - 1)\, E \right) +$$

$$+(\frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})\, \left(-\frac{\cos r}{\sin r}\, E + \frac{dE}{dr} \right) +$$

$$+ \left(\omega^2 - 1 - \frac{1}{\sin^2 r} - \frac{k^2}{\cos^2 r} \right)\, E = 0\ , \qquad (6.3.9b)$$

откуда находим следующее уравнение для функции $E(r)$:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{\sin r \cos r}\, \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r})E = 0\ . \qquad (6.3.10a)$$

Учитывая уравнения (6.3.7), получим

$$f_1(r) = \frac{-ik}{\omega}\, \frac{1}{\cos r \sin r}\, E(r)\ , \qquad f_3 = \frac{1}{\omega}\, \frac{1}{\sin r}\, \frac{d}{dr} E(r)\ . \qquad (6.3.10b)$$

Возвратимся к системе радиальных уравнений (6.3.5) при любом значении m:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{im}{\sin r}\, f_2 + \frac{ik}{\cos r}\, f_3 = 0\ ,$$

$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\cos r}\, f_2 + \frac{im}{\sin r}\, f_3 = 0\ ,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3 + \frac{ik}{\cos r} f_1 = 0\ ,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\, f_2 - \frac{im}{\sin r} f_1 = 0\ . \qquad (6.3.11)$$

Покажем, что первое уравнение превращается в тождество $0 = 0$ при учете трех остальных уравнений. Действительно,

$$-\omega f_1 = \frac{ik}{\cos r}\ f_2 - \frac{im}{\sin r}\ f_3\ ,$$

$$-\omega f_2 = (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 - \frac{ik}{\cos r} f_1\ ,$$

$$-\omega f_3 = -(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 + \frac{im}{\sin r} f_1\ ;$$

подставляем их в первое уравнение в (6.3.11):

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})(\frac{ik}{\cos r}\ f_2 - \frac{im}{\sin r}\ f_3) +$$

$$+ \frac{im}{\sin r}\ \left[(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 - \frac{ik}{\cos r} f_1\right] +$$

$$+ \frac{ik}{\cos r}\ \left[-(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 + \frac{im}{\sin r} f_1\right] = 0\ .$$

Легко проверяется, что это уравнение сводится к тождеству $0 = 0$. Таким образом, вместо четырех уравнений (6.3.11) можно рассматривать эквивалентную систему из трех уравнений

$$-\omega f_1 = \frac{ik}{\cos r}\ f_2 - \frac{im}{\sin r}\ f_3\ ,$$

$$-\omega f_2 = (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\ f_3 - \frac{ik}{\cos r} f_1\ ,$$

$$-\omega f_3 = -(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\ f_2 + \frac{im}{\sin r} f_1\ . \qquad (6.3.12)$$

Ее можно упростить, введя подстановки

$$f_2 = \frac{1}{\sin r}\ F_2\ , \qquad f_3 = \frac{1}{\cos r}\ F_3\ , \qquad (6.3.13)$$

при этом (6.3.12) примет вид

$$-\omega\ f_1 = i\ \frac{k\ F_2 - m\ F_3}{\sin r \cos r}\ ,$$

$$-\omega\ \frac{F_2}{\sin r} = \frac{1}{\cos r}\ \frac{dF_3}{dr} - \frac{ik}{\cos r}\ f_1\ ,$$

$$-\omega\ \frac{F_3}{\cos r} = -\frac{1}{\sin r}\ \frac{dF_2}{dr} + \frac{im}{\sin r}\ f_1\ . \qquad (6.3.14)$$

Из второго и третьего уравнений можно исключить f_1:

$$\omega^2 \, \frac{F_2}{\sin r} = -\frac{\omega}{\cos r} \, \frac{dF_3}{dr} + \frac{k}{\cos r} \, \frac{k \, F_2 - m \, F_3}{\sin r \cos r} \, ,$$

$$\omega^2 \, \frac{F_3}{\cos r} = \frac{\omega}{\sin r} \, \frac{dF_2}{dr} - \frac{m}{\sin r} \, \frac{k \, F_2 - m \, F_3}{\sin r \cos r}$$

или

$$(\frac{\omega}{\cos r} \, \frac{d}{dr} + \frac{km}{\sin r \cos^2 r}) \, F_3 + \frac{1}{\sin r} \, (\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r}) \, F_2 = 0 \, ,$$

$$(\frac{\omega}{\sin r} \, \frac{d}{dr} - \frac{km}{\cos r \sin^2 r}) \, F_2 + \frac{1}{\cos r} \, (-\omega^2 + \frac{m^2}{\sin^2 r}) \, F_3 = 0 \, . \qquad (6.3.15)$$

6.4 Анализ радиальных уравнений для значения $m = 0$

Будем исследовать решения дифференциального уравнения (6.3.10a), т. е. при $m = 0$:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{\sin r \cos r} \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r}) E = 0 \, . \qquad (6.4.1)$$

Вначале рассмотрим частный случай этого уравнения при $k^2 = \omega^2$:

$$\frac{\sin r}{\cos r} \frac{d}{dr} \frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr} \, E + k^2 (1 - \frac{1}{\cos^2 r}) \, E = 0 \, ;$$

отсюда следует просто интегрируемое дифференциальное уравнение

$$(\frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr}) \, (\frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr}) \, E = k^2 \, E \, . \qquad (6.4.2)$$

Делаем замену переменных

$$\frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr} = \frac{d}{dx} \, , \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{\cos r}{\sin r} \, ,$$

$$-dx = d \ln \cos r \, , \qquad x = \ln (C \, \cos^{-1} r) \, , \qquad C = \text{const} \, . \qquad (6.4.3a)$$

Уравнение (6.4.2) записывается как

$$\frac{d^2}{dx^2} \, E = k^2 \, E$$

и имеет решения

$$E_{\pm} = e^{\mp kx} = E_0 \, (\cos r)^{\pm k} \, . \qquad (6.4.3b)$$

Из двух найденных решений

$$(\cos r)^{+k}\ , \qquad \frac{1}{(\cos r)^{k}}\ , \qquad r\in[\,0,\frac{\pi}{2}\,] \tag{6.4.4}$$

при $k>0$ второе должно быть отброшено (поскольку обращается в бесконечность в точке $r=\pi/2$); при $k<0$ отброшено должно быть первое решение (поскольку оно обращается в бесконечность в точке $r=\pi/2$).

Таким образом, физическое решение имеет вид

$$k=+\omega>0\ , \qquad E=E_0\ \cos^{\omega} r\ e^{-i\omega(t-z)}\ ;$$
$$k=-\omega<0\ , \qquad E=E_0\ \cos^{-\omega} r\ e^{-i\omega(t+z)}\ . \tag{6.4.5}$$

Поскольку при $r\neq 0,\ \pi/2$, значения координаты $z=-\pi$ и $z=+\pi$ параметризуют одну точку сферического пространства, то построенное решение будет непрерывной функцией сферического пространства только, если k принимает целые значения:

$$k=\pm n\ , \qquad n=1,2,3,...\ ; \tag{6.4.6a}$$

или в обычных единицах

$$k=\pm\frac{\omega\rho}{c}=n\ , \qquad \omega=\frac{c}{\rho}\,n\ , \qquad n=1,2,3,... \tag{6.4.6b}$$

Возвратимся к уравнению (6.4.1)

$$\frac{d^2E}{dr^2}-\frac{1}{\sin r\cos r}\ \frac{dE}{dr}+(\omega^2-\frac{k^2}{\cos^2 r})E=0\ . \tag{6.4.7}$$

Пусть пока величина волнового вектора k никак не связана с частотой ω. Покажем, что можно легко построить еще один тип решений, который также описывает некую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z.

Ищем приближенное решение около $r=0$:

$$E=\sin^A r\ , \qquad E'=A\sin^{A-1} r\cos r\ ,$$
$$E''=A(A-1)\sin^{A-2} r\cos^2 r-A\sin^A r\ ,$$

подставляем в уравнение (6.4.7):

$$A(A-1)\sin^{A-2} r-A\sin^A r-A\sin^{A-2} r-k^2\ \sin^A r+k_0^2\ \sin^A r=0$$

или

$$A(A-1)-A=0\ \Longrightarrow\ A=0,\ +2\ . \tag{6.4.8a}$$

Ищем приближенное решение около $r=\pi/2$:

$$E=\cos^B r\ , \qquad E'=-B\cos^{B-1} r\sin r\ ,$$

$$E'' = B(B-1)\cos^{B-2} r \sin^2 r - B\cos^B r \ ,$$

подставляем в уравнение (6.4.7):

$$B(B-1)\cos^{B-2} r - B\cos^B r + B\cos^{B-2} r - k^2 \ \cos^{B-2} r + k_0^2 \ \cos^B r = 0$$

или

$$B(B-1) + B - k^2 = 0 \ , \qquad B^2 = k^2 \ . \tag{6.4.8b}$$

Убедимся, что можно подобрать k таким образом, что точным решением уравнения будет функция

$$E = \sin^2 r \cos^B r \ , \qquad \text{где} \qquad B^2 = k^2 \ . \tag{6.4.9}$$

Очевидно, что выбор $A = 0$ из (6.4.8*a*) возвратил бы нас к предыдущему уже исследованному случаю $E = \cos^B r$, $B^2 = k^2 = \omega^2$. Подстановка (6.4.9) дает

$$E' = 2\sin r \ \cos^{B+1} r - B\sin^3 r \ \cos^{B-1} r,$$

$$E'' = 2\cos^{B+2} - 2(B+1)\sin^2 r \ \cos^B r - 3B\sin^2 r \ \cos^B r +$$
$$+ B(B-1)\sin^4 r \cos^{B-2} r \ ;$$

уравнение (6.4.7) принимает вид

$$2\cos^4 r - 2(B+1)\sin^2 r \ \cos^2 r - 3B\sin^2 r \ \cos^2 r + B(B-1)\sin^4 r -$$

$$-2\cos^2 r + B\sin^2 r - k^2\sin^2 r + \omega^2 \sin^2 r \cos^2 r = 0 \ .$$

Введем обозначение $\cos^2 r = x$; тогда предыдущее равенство примет вид

$$2x^2 + (x - x^2)[-5B - 2 + \omega^2] + (B^2 - B)(1 - 2x + x^2) -$$

$$-2x + B(1-x) - k^2(1-x) = 0,$$

или

$$x^2 \ [2 + 5B + 2 - \omega^2 + B^2 - B] +$$
$$+ x \ [-5B - 2 + \omega^2 - 2B^2 + 2B - 2 - B + k^2] +$$
$$+ x^0 \ [B^2 - B + B - k^2] = 0 \ ,$$

или

$$x^2 \ (4 + 4B - \omega^2 + B^2) + x \ (-4 - 4B + \omega^2 - B^2) + x^0 \ (B^2 - k^2) = 0 \ .$$

Последнее равенство будет удовлетворено, если

$$B^2 = k^2 \ , \qquad (B+2)^2 - \omega^2 = 0 \ ,$$

т. е.

$$B = -2 + \omega, \ -2 - \omega \ , \ k = \pm B \ , \qquad E = \sin^2 r \ \ \cos^B r \ . \tag{6.4.10a}$$

Полное решение этого типа выглядит так:

$$E = \sin^2 r \quad \cos^B r \; e^{-i(\omega t - kz)} \; . \tag{6.4.10b}$$

Решения с отрицательными значениями B должны быть отброшены, поскольку при $r = \pi/2$ эти решения приводят к бесконечным значениям электромагнитного поля. Кроме того, требование периодичности по переменной z выполняется, только если $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Таким образом, волна, распространяющаяся вправо, описывается соотношениями

$$B = +k = +1, +2, +3, ...,$$

$$k = -2 + \omega \; , \qquad \omega = 2 + k = 3, 4, 5, ... \; ,$$

$$F_{02} = \sin^2 r \quad \cos^k r \; e^{-i(\omega t - kz)} \; . \tag{6.4.11a}$$

В свою очередь, волна, распространяющаяся влево, описывается соотношениями

$$B = -k = +1, +2, +3, ...,$$

$$-k = -2 + \omega \; , \qquad \omega = 2 - k = +3, +4, +5, ... \; ,$$

$$F_{02} = \sin^2 r \quad \cos^{-k} r \; e^{-i(\omega t - kz)} \; . \tag{6.4.11b}$$

Если вернуться к уравнению (6.4.1):

$$\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{\sin r \cos r} \, \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r}) E = 0 \; , \tag{6.4.12a}$$

то можно попытаться найти все другие решения, используя подстановку

$$E(r) = \sin^2 r \;\; \cos^B r \; F(r) \; . \tag{6.4.12b}$$

Подставляя функцию E из (6.4.12b) в уравнение (6.4.12a) и переходя к переменной $x = \cos^2 r$, получим следующее дифференциальное уравнение для $F(r)$:

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + 4[1 - 3x + B(1-x)] \, \frac{d}{dx} +$$

$$+ \left[-(2+5B) + \frac{2x}{1-x} + B(B-1)\frac{1-x}{x} - \frac{2}{1-x} + \frac{B}{x} - \frac{k^2}{x} + \omega^2 \right] F = 0 \; . \tag{6.4.12c}$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится

$$[...]F \;\; = [-2 - 5B + 2\frac{x-1+1}{1-x} + B(B-1)(\frac{1}{x} - 1) - \frac{2}{1-x} + \frac{B}{x} - \frac{k^2}{x} + \omega^2 \;] \; F =$$

$$= [\; (-2 - 5B - 2 - B^2 + B + k_0^2) + \frac{1}{x}(B^2 - B + B - k^2) + \frac{1}{1-x}(2-2) \;] \; F \; ,$$

если потребовать $k^2 = B^2$:

$$[...]F \ = - \left[\ (B+2)^2 - \omega^2\ \right]\ F\ . \qquad (6.4.13a)$$

В результате для функции F получаем уравнение

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + 4[(1+B)-(3+B)x]\ \frac{d}{dx} - \left[\ (B+2)^2 - \omega^2\ \right]\ F = 0\ , \qquad (6.4.13b)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\ F + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\ F' - \alpha\beta\ F = 0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 1 + B\ , \quad \alpha + \beta = 2 + B\ , \qquad \alpha\beta = \frac{(B+2)^2 - \omega^2}{4}\ ,$$

т. е.

$$k = \pm\ B\ , \qquad \gamma = 1 + B\ , \quad \alpha = \frac{B + 2 - \omega}{2}\ , \ \beta = \frac{B + 2 + \omega}{2}\ . \qquad (6.4.13c)$$

Таким образом, полное решение имеет вид

$$E = \sin^2 r \cos^B r\ F(\alpha, \beta, \gamma, \cos^2 r)\ e^{-i(\omega t - kz)}\ . \qquad (6.4.13d)$$

Из требования однозначности электромагнитного поля как функции точек сферического пространства, в частности, следует для волны, распространяющейся вправо вдоль оси z:

$$k > 0\ , \qquad k = +1, +2, +3, ...\ ; \qquad (6.4.14a)$$

функция $E(r)$ конечна в области $r = \pi/2$ только при $B = +k$, при этом нужное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид

$$\alpha = \frac{k + 2 - \omega}{2} = -n\ = 0, -1, -2, ... \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = k + 2(n+1) = N\ . \qquad (6.4.14b)$$

Для волны, распространяющейся влево вдоль оси z

$$k < 0\ , \qquad -k = 1, 2, 3, ...\ ; \qquad (6.4.15a)$$

функция $E(r)$ конечна в области $r = \pi/2$ только при $B = -k$, при этом нужное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид

$$\alpha = \frac{-k + 2 - \omega}{2} = -n\ = 0, -1, -2, ... \qquad \Longrightarrow$$

$$\omega = -k + 2(n+1) = N\ . \qquad (6.4.15b)$$

Все построенные выше решения уравнений Максвелла в сферическом пространстве Римана S_3 являются конечными, однозначными и непрерывными функциями в пространстве S_3.

6.5 Анализ радиальных уравнений при $k = 0$

Возвратимся к системе уравнений для радиальных функций (6.3.5):

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{im}{\sin r}\, f_2 + \frac{ik}{\cos r}\, f_3 = 0 \,,$$

$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\cos r}\, f_2 + \frac{im}{\sin r}\, f_3 = 0 \,,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3 + \frac{ik}{\cos r} f_1 = 0 \,,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\, f_2 - \frac{im}{\sin r} f_1 = 0 \qquad (6.5.1)$$

и рассмотрим случай $k = 0$; система уравнений при этом (также как и при $m = 0$) значительно упрощается:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{im}{\sin r}\, f_2 = 0 \,,$$

$$-\omega f_1 + \frac{im}{\sin r}\, f_3 = 0 \,,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3 = 0 \,,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\, f_2 - \frac{im}{\sin r} f_1 = 0 \,. \qquad (6.5.2)$$

Дальше получаем

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) f_1 + \frac{im}{\sin r}\, f_2 = 0 \,,$$

$$f_1 = \frac{im}{\omega \sin r}\, f_3 \,, \qquad f_2 = -\frac{1}{\omega}(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3 \,,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\, f_2 - \frac{im}{\sin r} f_1 = 0 \,. \qquad (6.5.3)$$

Если вторым и третьим уравнениями воспользоваться в первом и четвертом, то получим

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) \frac{im}{\omega \sin r}\, f_3 + \frac{im}{\sin r}\, (-\frac{1}{\omega}(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3) = 0 \,,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})\, (-\frac{1}{\omega}(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})\, f_3) - \frac{im}{\sin r} \frac{im}{\omega \sin r}\, f_3 = 0 \,.$$

(6.5.4)

Легко убеждаемся, что после простых преобразований уравнения (6.5.4) сводятся к тождеству $0 \equiv 0$ и уравнению для f_3:

$$\frac{d^2}{dr^2} f_3 + (\frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r}) \frac{d}{dr} f_3 + (\omega^2 - 1 - \frac{1}{\cos^2 r} - \frac{k^2}{\sin^2 r}) f_3 = 0 . \tag{6.5.5}$$

Введем для функции f_3 подстановку

$$f_3(r) = \frac{1}{\cos r} E(r) , \tag{6.5.6}$$

в результате уравнение (6.5.5) примет вид

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{\sin r \cos r} \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{m^2}{\sin^2 r})E = 0 . \tag{6.5.7}$$

Вначале рассмотрим частный случай этого уравнения при $m^2 = \omega^2$:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{\sin r \cos r} \frac{dE}{dr} + m^2(1 - \frac{1}{\sin^2 r}) E = 0 . \tag{6.5.8}$$

Уравнение (6.5.8) имеет решения

$$E_\pm = E_0 (\sin r)^{\pm m} . \tag{6.5.9}$$

Из двух найденных решений

$$(\sin r)^{+m} , \qquad \frac{1}{(\sin r)^m} , \qquad r \in [\, 0, \frac{\pi}{2} \,] \tag{6.5.10}$$

при $m > 0$ второе должно быть отброшено (поскольку обращается в бесконечность в точке $r = 0$); при $m < 0$ отброшено должно быть первое решение (поскольку оно обращается в бесконечность в точке $r = 0$).

Таким образом, физическое решение имеет вид

$$m = +\omega > 0 , \qquad E = E_0 \sin^m r \, e^{-i(\omega t - m\phi)} ;$$
$$m = -\omega < 0 , \qquad E = E_0 \sin^{-m} r \, e^{-i(\omega t - m\phi)} . \tag{6.5.11}$$

Возвратимся к уравнению (6.5.7)

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{\sin r \cos r} \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{m^2}{\sin^2 r})E = 0 . \tag{6.5.12}$$

Пусть пока m никак не связана с частотой ω. Покажем, что можно легко построить еще один тип решений, который также описывает некую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси ϕ.

Ищем приближенное решение около $r = \pi/2$:

$$E = \cos^A r , \qquad E' = -A \cos^{A-1} r \sin r ,$$

$$E'' = A(A-1)\cos^{A-2} r \sin^2 r - A\cos^A r \ ,$$

подставляем в уравнение (6.5.12):

$$A(A-1)\cos^{A-2} r - A\cos^A r - A\cos^{A-2} r - m^2 \ \cos^A r + m_0^2 \ \cos^A r = 0$$

или

$$A(A-1) - A = 0 \implies A = 0, \ +2 \ . \qquad (6.5.13)$$

Ищем приближенное решение около $r = 0$:

$$E = \sin^B r \ , \qquad E' = B\sin^{B-1} r \cos r \ ,$$

$$E'' = B(B-1)\sin^{B-2} r \cos^2 r - B\sin^B r \ ,$$

подставляем в уравнение (6.5.12):

$$B(B-1)\sin^{B-2} r - B\sin^B r + B\sin^{B-2} r - m^2 \ \sin^{B-2} r + m_0^2 \ \sin^B r = 0$$

или

$$B(B-1) + B - m^2 = 0 \ , \qquad B^2 = m^2 \ . \qquad (6.5.14)$$

Убедимся, что можно подобрать m таким образом, что точным решением уравнения будет функция

$$E = \cos^2 r \sin^B r \ , \qquad \text{где} \qquad B^2 = m^2 \ . \qquad (6.5.15)$$

Очевидно, что выбор $A = 0$ из (6.5.13) возвратил бы нас к предыдущему уже исследованному случаю

$$E = \sin^B r \ , \qquad B^2 = m^2 = \omega^2 \ , \qquad (6.5.16)$$

и еще раз его анализировать не нужно. Подстановка (6.5.15) дает

$$E' = -2\cos r \ \sin^{B+1} r + B\cos^3 r \ \sin^{B-1} r \ ,$$

$$E'' = 2\sin^{B+2} -2(B+1)\cos^2 r \ \sin^B r -$$
$$-3B\cos^2 r \ \sin^B r + B(B-1)\cos^4 r \sin^{B-2} r \ ;$$

уравнение (6.5.12) принимает вид

$$2\sin^{B+2} r - 2(B+1)\cos^2 r \ \sin^B r -$$

$$-3B\cos^2 r \ \sin^B r + B(B-1)\cos^4 r \sin^{B-2} r -$$

$$-2\sin^B r + B\cos^2 r \ \sin^{B-2} r - m^2 \cos^2 r \sin^{B-2} r + \omega^2 \cos^2 r \sin^B r = 0$$

или

$$2\sin^4 r - 2(B+1)\cos^2 r \ \sin^2 r - 3B\cos^2 r \ \sin^2 r + B(B-1)\cos^4 r -$$

$$-2\sin^2 r + B\cos^2 r \ - m^2 \cos^2 r + \omega^2 \cos^2 r \sin^2 r = 0 \ .$$

Введем обозначение $\sin^2 r = x$; тогда предыдущее равенство примет вид

$$x^2 \left[2 + 5B + 2 - \omega^2 + B^2 - B\right] +$$
$$+ x \left[-5B - 2 + \omega^2 - 2B^2 + 2B - 2 - B + m^2\right] +$$
$$+ x^0 \left[B^2 - B + B - m^2\right] = 0$$

или

$$x^2 \left(4 + 4B - \omega^2 + B^2\right) + x \left(-4 - 4B + \omega^2 - B^2\right) + x^0 \left(B^2 - m^2\right) = 0 \; .$$

Последнее равенство будет удовлетворено, если

$$B^2 = m^2 \; , \qquad (B+2)^2 - \omega^2 = 0 \; ,$$
$$B = -2 + \omega, \; -2 - \omega \; ,$$
$$m = \pm B \; , \qquad E = \cos^2 r \;\; \sin^B r \; . \tag{6.5.17}$$

Полное решение имеет вид

$$E = \cos^2 r \;\; \sin^B r \; e^{-i(\omega t - m\phi)} \; . \tag{6.5.18}$$

Решения с отрицательными значениями B должны быть отброшены, поскольку при $r = 0$ эти решения приводят к бесконечным значениям электромагнитного поля. Таким образом, дополнительно построены решения двух типов:

$$B = +m = +1, +2, +3, ...,$$
$$m = -2 + \omega \; , \qquad \omega = 2 + m = 3, 4, 5, ... \; ,$$
$$F_{02} = \cos^2 r \;\; \sin^m r \; e^{-i(\omega t - m\phi)} \tag{6.5.19}$$

и

$$B = -m = +1, +2, +3, ...,$$
$$-m = -2 + \omega \; , \qquad \omega = 2 - m = +3, +4, +5, ... \; ,$$
$$F_{02} = \cos^2 r \;\; \sin^{-m} r \; e^{-i(\omega t - mz)} \; . \tag{6.5.20}$$

Если вернуться к уравнению (6.5.12):

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{\sin r \cos r} \; \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{m^2}{\sin^2 r}) E = 0 \; , \tag{6.5.21}$$

то можно попытаться найти все другие решения, используя подстановку

$$E(r) = \cos^2 r \; \sin^B r \; F(r) \; . \tag{6.5.22}$$

Подставляя функцию E из (6.5.22) в уравнение (6.5.21) и переходя к переменной $x = \sin^2 r$, получим следующее дифференциальное уравнение для $F(r)$:

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + 4[1-3x+B(1-x)]\ \frac{d}{dx}+$$
$$+\left[-(2+5B)+\frac{2x}{1-x}+B(B-1)\frac{1-x}{x}-\frac{2}{1-x}+\frac{B}{x}-\frac{m^2}{x}+\omega^2\right]F=0. \tag{6.5.23}$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится

$$[...]F = [-2-5B+2\frac{x-1+1}{1-x}+B(B-1)(\frac{1}{x}-1)-\frac{2}{1-x}+\frac{B}{x}-\frac{m^2}{x}+\omega^2]F =$$

$$= [(-2-5B-2-B^2+B+m_0^2)+\frac{1}{x}(B^2-B+B-m^2)+\frac{1}{1-x}(2-2)]F\ ,$$

если потребовать $m^2 = B^2$:

$$[...]F\ = -[\ (B+2)^2-\omega^2\ ]\ F\ . \tag{6.5.24}$$

В результате для функции F получаем уравнение

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F+4[(1+B)-(3+B)x]\ \frac{d}{dx}-[\ (B+2)^2-\omega^2\ ]\ F=0\ , \tag{6.5.25}$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\ F+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\ F'-\alpha\beta\ F=0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 1+B\ ,\quad \alpha+\beta = 2+B\ ,\qquad \alpha\beta = \frac{(B+2)^2-\omega^2}{4}\ ,$$

т. е.

$$k=\pm B\ ,\qquad \gamma=1+B\ ,\quad \alpha=\frac{B+2-\omega}{2}\ ,\quad \beta=\frac{B+2+\omega}{2}\ . \tag{6.5.26}$$

Таким образом, полное решение имеет вид

$$E = \cos^2 r \sin^B r\ F(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2 r)\ e^{-i(\omega t - m\phi)}\ . \tag{6.5.27}$$

Из требования однозначности электромагнитного поля как функции точек сферического пространства, в частности, следует для волны с правой ориентацией по ϕ:

$$m > 0\ , \tag{6.5.28}$$

функция $E(r)$ конечна в области $r = 0$ только при $B = +m$, при этом нужное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид

$$\alpha = \frac{m+2-\omega}{2} = -n \; = 0, -1, -2, ... \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = m + 2(n+1) = N \; . \tag{6.5.29}$$

Для волны с левой ориентацией по ϕ

$$m < 0 \; , \tag{6.5.30}$$

функция $E(r)$ конечна в области $r = 0$ только при $B = -m$, при этом нужное условие обрыва гипергеометрического ряда до полинома имеет вид

$$\alpha = \frac{-m+2-\omega}{2} = -n \; = 0, -1, -2, ... \qquad \Longrightarrow$$
$$\omega = -m + 2(n+1) = N \; . \tag{6.5.31}$$

Все построенные выше решения уравнений Максвелла в сферическом пространстве Римана являются конечными, однозначными и непрерывными функциями в пространстве S_3.

6.6 Анализ уравнений для произвольных значений m, k

Возвратимся к анализу общего случая (6.3.15):

$$(\frac{\omega}{\cos r}\;\frac{d}{dr} + \frac{km}{\sin r\cos^2 r})\;F_3 + \frac{1}{\sin r}\;(\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r})\;F_2 = 0\;,$$
$$(\frac{\omega}{\sin r}\;\frac{d}{dr} - \frac{km}{\cos r\sin^2 r})\;F_2 + \frac{1}{\cos r}\;(-\omega^2 + \frac{m^2}{\sin^2 r})\;F_3 = 0\;. \tag{6.6.1}$$

Введем новую переменную $x = \cos 2r$:

$$\frac{d}{dr} = -2\sin 2r\;\frac{d}{dx} = -4\sin r\cos r\;\frac{d}{dx}\;,$$
$$\cos^2 r = \frac{1+x}{2}\;,\;\;\sin^2 r = \frac{1-x}{2}\;,$$
$$\frac{\omega}{\cos r}\;\frac{d}{dr} + \frac{km}{\sin r\cos^2 r} =$$
$$= -4\omega\sin r(\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{4\sin^2 r\cos^2 r}) = -4\omega\sin r(\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{1-x^2})\;,$$
$$\frac{\omega}{\sin r}\;\frac{d}{dr} - \frac{km}{\cos r\sin^2 r} =$$
$$= -4\omega\cos r(\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{4\cos^2 r\cos^2 r}) = -4\omega\cos r(\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{1-x^2})\;. \tag{6.6.2}$$

Уравнения (6.6.1) примут вид

$$-4\omega\ (\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{1-x^2})\ F_3 + \frac{1}{\sin^2 r}\ (+\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r})\ F_2 = 0\ ,$$

$$-4\omega\ (\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{1-x^2})\ F_2 + \frac{1}{\cos^2 r}\ (-\omega^2 + \frac{m^2}{\sin^2 r})\ F_3 = 0$$

или

$$-4\omega\ (\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{1-x^2})\ F_3 + \frac{2}{1-x}\ (+\omega^2 - \frac{2k^2}{1+x})\ F_2 = 0\ ,$$

$$-4\omega\ (\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{1-x^2})\ F_2 + \frac{2}{1+x}\ (-\omega^2 + \frac{2m^2}{1-x})\ F_3 = 0\ . \qquad (6.6.3)$$

Сделаем еще одну простую замену переменных

$$1-x = 2y\ , \qquad x = 1-2y\ , \qquad 1+x = 2(1-y)\ ,$$

в результате система запишется так:

$$(2\omega\frac{d}{dy} - \frac{km}{y(1-y)})\ F_2 + (-\frac{\omega^2}{1-y} + \frac{m^2}{y(1-y)})\ F_3 = 0\ ,$$

$$(2\omega\frac{d}{dy} + \frac{km}{y(1-y)})\ F_3 + (+\frac{\omega^2}{y} - \frac{k^2}{y(1-y)})\ F_2 = 0\ . \qquad (6.6.4)$$

Совершим линейное преобразование (с единичным определителем: $\alpha N - \beta M = 1$)

$$F_2 = \alpha(y)\ G_2 + \beta(y)\ G_3\ ,$$

$$F_3 = M(y)\ G_2 + N(y)\ G_3\ ; \qquad (6.6.5)$$

обратное преобразование выглядит так:

$$G_2 = N(y)\ F_2 - \beta(y)\ F_3\ ,$$

$$G_3 = -M(y)\ F_2 + \alpha(y)\ F_3\ . \qquad (6.6.6)$$

Комбинируя уравнения системы (6.6.4), получаем

$$N(2\omega\frac{d}{dy} - \frac{km}{y(1-y)})F_2 + 2\omega\frac{dN}{dy}F_2 - 2\omega\frac{dN}{dy}F_2 + N(-\frac{\omega^2}{1-y} + \frac{m^2}{y(1-y)})F_3 -$$

$$-\beta(2\omega\frac{d}{dy} + \frac{km}{y(1-y)})F_3 - 2\omega\frac{d\beta}{dy}F_3 + 2\omega\frac{d\beta}{dy}F_3 - \beta(+\frac{\omega^2}{y} - \frac{k^2}{y(1-y)})F_2 = 0,$$

$$-M(2\omega\frac{d}{dy} - \frac{km}{y(1-y)})F_2 - 2\omega\frac{dM}{dy}F_2 + 2\omega\frac{dM}{dy}F_2 - M(-\frac{\omega^2}{1-y} + \frac{m^2}{y(1-y)})\ F_3 +$$

$$+\alpha(2\omega\frac{d}{dy}+\frac{km}{y(1-y)})F_3+2\omega\frac{d\alpha}{dy}F_3-2\omega\frac{d\alpha}{dy}F_3+\alpha\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})F_2=0, \tag{6.6.7}$$

откуда следуют уравнения

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_2-N\ \frac{km}{y(1-y)}\ F_2-2\omega\frac{dN}{dy}F_2+N\ (-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})\ F_3-$$

$$-\beta\ \frac{km}{y(1-y)}\ F_3+2\omega\frac{d\beta}{dy}F_3-\beta\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\ F_2=0\ ,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_3+M\ \frac{km}{y(1-y)}\ F_2+2\omega\frac{dM}{dy}F_2-M\ (-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})\ F_3+$$

$$+\alpha\ \frac{km}{y(1-y)}\ F_3-2\omega\frac{d\alpha}{dy}F_3+\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\ F_2=0\ . \tag{6.6.8}$$

Вместо F_2, F_3 подставляем их выражения через G_2, G_3 согласно (6.6.5):

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_2-N\frac{km}{y(1-y)}(\alpha G_2+\beta G_3)-2\omega\frac{dN}{dy}(\alpha G_2+\beta G_3)+$$

$$+N(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})(MG_2+NG_3)-$$

$$-\beta\frac{km}{y(1-y)}(MG_2+NG_3)+2\omega\frac{d\beta}{dy}(MG_2+NG_3)-$$

$$-\beta(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})(\alpha G_2+\beta G_3)=0\ ,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_3+M\frac{km}{y(1-y)}(\alpha G_2+\beta G_3)+2\omega\frac{dM}{dy}(\alpha G_2+\beta G_3)-$$

$$-M(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})(MG_2+NG_3)+$$

$$+\alpha\frac{km}{y(1-y)}(MG_2+NG_3)-2\omega\frac{d\alpha}{dy}(MG_2+NG_3)+$$

$$+\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})(\alpha G_2+\beta G_3)=0\ .$$

Дальше после перегруппировки слагаемых получаем уравнения

$$2\omega\frac{dG_2}{dy}+\Big[-N\alpha\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{dN}{dy}\alpha+NM(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})-$$

$$-\beta M\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{d\beta}{dy}M-\beta\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\Bigg]\,G_2+$$

$$+\Bigg[-N\beta\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{dN}{dy}\beta+N^2(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})-$$

$$-\beta N\,\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{d\beta}{dy}N-\beta^2(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\Bigg]\;G_3=0\;, \tag{6.6.9}$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}+\Bigg[M\beta\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{dM}{dy}\beta-NM(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})+$$

$$+\alpha N\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{d\alpha}{dy}N+\beta\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\Bigg]\,G_3+$$

$$+\Bigg[M\alpha\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{dM}{dy}\alpha-M^2(-\frac{\omega^2}{1-y}+\frac{m^2}{y(1-y)})+$$

$$+\alpha M\,\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{d\alpha}{dy}M+\alpha^2(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1-y)})\Bigg]\,G_2=0\;. \tag{6.6.10}$$

Полученные уравнения можно переписать иначе:

$$2\omega\frac{dG_2}{dy}+\Bigg[-(N\alpha+\beta M)\,\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{dN}{dy}\,\alpha+NM\,\frac{-\omega^2y+m^2}{y(1-y)}+$$

$$+2\omega\frac{d\beta}{dy}M-\beta\alpha\,\frac{\omega^2(1-y)-k^2}{y(1-y)}\,\Bigg]\;G_2+$$

$$+\Bigg[-2N\beta\,\frac{km}{y(1-y)}-2\omega\frac{dN}{dy}\,\beta+N^2\frac{-\omega^2y+m^2}{y(1-y)}+$$

$$+2\omega\frac{d\beta}{dy}N-\beta^2\,\frac{\omega^2(1-y)-k^2}{y(1-y)}\,\Bigg]\;G_3=0\;, \tag{6.6.11}$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}+\Bigg[(M\beta+\alpha N)\,\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{dM}{dy}\,\beta-NM\,\frac{-\omega^2y+m^2}{y(1-y)}-$$

$$-2\omega\frac{d\alpha}{dy}N+\beta\alpha\,\frac{\omega^2(1-y)-k^2}{y(1-y)}\,\Bigg]\;G_3+$$

$$+\Bigg[2M\alpha\,\frac{km}{y(1-y)}+2\omega\frac{dM}{dy}\,\alpha-M^2\,\frac{-\omega^2y+m^2}{y(1-y)}-$$

$$- 2\omega \frac{d\alpha}{dy} M + \alpha^2 \ \frac{\omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)} \ \Big] \ G_2 = 0 \ . \tag{6.6.12}$$

Будем предполагать, что используемое преобразование ортогонально:

$$\alpha \ G_2 + \beta \ G_3 = \cos A \ G_2 + \sin A \ G_3 \ ,$$
$$M \ G_2 + N \ G_3 = - \sin A \ G_2 + \cos A \ G_3 \ , \tag{6.6.13}$$

тогда выполняются тождества

$$-2\omega \frac{dN}{dy} \alpha + 2\omega \frac{d\beta}{dy} M = -2\omega[(\cos A)' \cos A + (\sin A)' \sin A] = 0 \ ,$$

$$-2\omega \frac{dN}{dy} \ \beta + 2\omega \frac{d\beta}{dy} N = 2\omega[-(\cos A)' \sin A + (\sin A)' \cos A = +2\omega A' \ ,$$

$$2\omega \frac{dM}{dy} \beta - 2\omega \frac{d\alpha}{dy} N = 2\omega[-(\sin A)' \sin A - (\cos A)' \cos A] = 0 \ ,$$

$$2\omega \frac{dM}{dy} \ \alpha - 2\omega \frac{d\alpha}{dy} M = 2\omega[-(\sin A)' \cos A + (\cos A)' \sin A] = -2\omega A'$$

и

$$N\alpha + \beta M = \cos 2A \ , \qquad 2N\beta = \sin 2A \ , \qquad 2M\alpha = - \sin 2A \ ,$$

$$\alpha\beta = \sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A \ , \qquad NM = - \sin A \cos A = -\frac{1}{2} \sin 2A \ ,$$

$$N^2 = \cos^2 A \ , \qquad \beta^2 = \sin^2 A \ , \qquad M^2 = \sin^2 A \ , \qquad \alpha^2 = \cos^2 A \ .$$

С учетом их уравнения (6.6.11) и (6.6.12) запишутся так:

$$2\omega \frac{dG_2}{dy} + [- \cos 2A \frac{km}{y(1-y)} -$$
$$-\frac{1}{2} \ \sin 2A \frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_2 +$$
$$+[- \sin 2A \ \frac{km}{y(1-y)} + 2\omega A' + \cos^2 A \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1-y)} -$$
$$- \sin^2 A \ \frac{\omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_3 = 0,$$

$$2\omega \frac{dG_3}{dy} + [\cos 2A \frac{km}{y(1-y)} +$$
$$+\frac{1}{2} \sin 2A \frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_3 +$$

$$+[-\sin 2A\ \frac{km}{y(1-y)} - 2\omega A' - \sin^2 A\frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1-y)} +$$
$$+\cos^2 A\frac{\omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}\ ]G_2 = 0$$

или

$$2\omega\frac{dG_2}{dy} - [\cos 2A\frac{km}{y(1-y)} +$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2A\frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_2 +$$
$$+[+2\omega A' - \sin 2A\frac{km}{y(1-y)} + \cos^2 A\ \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1-y)} -$$
$$-\sin^2 A\ \frac{\omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_3 = 0\ ,$$
$$2\omega\frac{dG_3}{dy} + [\cos 2A\frac{km}{y(1-y)} +$$
$$+\frac{1}{2}\ \sin 2A\frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_3 +$$
$$+[-2\omega A' - \sin 2A\frac{km}{y(1-y)} - \sin^2 A\ \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1-y)} +$$
$$+\cos^2 A\ \frac{\omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_2 = 0\ .$$

Перепишем полученные уравнения в виде (дополнительно предположим, что нужное нам преобразование не зависит от координаты y)

$$2\omega\frac{dG_2}{dy} - [\cos 2A\frac{km}{y(1-y)} + \frac{1}{2}\sin 2A\frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_2 +$$
$$+\frac{-2km\sin 2A + (1+\cos 2A)[-\omega^2 y + m^2]}{2y(1-y)}G_3 -$$
$$-\frac{(1-\cos 2A)[\omega^2(1-y) - k^2]}{2y(1-y)}\ G_3 = 0, \qquad (6.6.14)$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy} + [\cos 2A\frac{km}{y(1-y)} + \frac{1}{2}\ \sin 2A\frac{-\omega^2 y + m^2 + \omega^2(1-y) - k^2}{y(1-y)}]G_3 +$$
$$+\frac{-2km\sin 2A - (1-\cos 2A)[-\omega^2 y + m^2]}{2y(1-y)}\ G_2 +$$

$$+\frac{(1+\cos 2A)[\omega^2(1-y)-k^2]}{2y(1-y)}\,G_2=0\,. \tag{6.6.15}$$

Пусть

$$\cos 2A=0\,,\qquad 2A=\frac{\pi}{2}\,,\qquad \sin 2A=1\,, \tag{6.6.16}$$

тогда система уравнений (6.6.14), (6.6.15) значительно упростится:

$$2\omega\frac{dG_2}{dy}-\frac{-\omega^2y+m^2+\omega^2(1-y)-k^2}{2y(1-y)}\,G_2+$$

$$+\frac{-2km-\omega^2y+m^2-\omega^2(1-y)+k^2}{2y(1-y)}\,G_3=0\,,$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}+\frac{-\omega^2y+m^2+\omega^2(1-y)-k^2}{2y(1-y)}\,G_3+$$

$$+\frac{-2km+\omega^2y-m^2+\omega^2(1-y)-k^2}{2y(1-y)}\,G_2=0\,.$$

Таким образом, пришли к системе уравнений, в которой отсутствуют особенности кроме как в точках $y=0,1,\infty$

$$\left(2\omega\frac{d}{dy}-\frac{-\omega^2y+\omega^2(1-y)+m^2-k^2}{2y(1-y)}\right)G_2+\frac{-\omega^2+(m-k)^2}{2y(1-y)}\,G_3=0\,,$$

$$\left(2\omega\frac{d}{dy}+\frac{-\omega^2y+\omega^2(1-y)+m^2-k^2}{2y(1-y)}\right)\,G_3+\frac{\omega^2-(m+k)^2}{2y(1-y)}\,G_2=0\,. \tag{6.6.17}$$

Из системы уравнений (6.6.17) получим уравнение второго порядка для G_2:

$$4y(1-y)\frac{d^2G_2}{dy^2}+4(1-2y)\frac{dG_2}{dy}+\left(2\omega+\omega^2-\frac{m^2}{y(1-y)}+\frac{m^2-k^2}{1-y}\right)\,G_2=0\,. \tag{6.6.18}$$

В уравнении (6.6.18) сделаем подстановку

$$G_2=y^A(1-y)^BG(y)\,,$$

$$G_2'=Ay^{A-1}(1-y)^BG-By^A(1-y)^{B-1}G+y^A(1-y)^B\,G'\,,$$

$$G_2''=A(A-1)y^{A-2}(1-y)^BG-ABy^{A-1}(1-y)^{B-1}G+Ay^{A-1}(1-y)^B\,G'-$$
$$-ABy^{A-1}(1-y)^{B-1}G+B(B-1)y^A(1-y)^{B-2}G-By^A(1-y)^{B-1}\,G'+$$
$$+Ay^{A-1}(1-y)^B\,G'-By^A(1-y)^{B-1}\,G'+y^A(1-y)^B\,G''\,. \tag{6.6.19}$$

Уравнение (6.6.18) принимает вид

$$4y(1-y)\,G''+4\left[A(1-y)-By+A(1-y)-By\;+(1-2y)\right]G'+$$

$$
+\left[\,4A(A-1)\frac{1}{y}+4B(B-1)\frac{1}{1-y}-4A(A-1)-4B(B-1)-8AB+\right.
$$

$$
\left.+\,4(-2A-2B+\frac{A}{y}+\frac{B}{1-y})+2\omega+\omega^2-m^2(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y})+\frac{m^2-k^2}{1-y}\right]G=0\,. \tag{6.6.20}
$$

Требуем выполнения равенств

$$
A=\pm\,\frac{1}{2}\mid m\mid\,,\qquad B=\pm\,\frac{1}{2}\mid k\mid\,; \tag{6.6.21}
$$

уравнение (6.6.20) примет более простой вид

$$
y(1-y)G''+[2A+1-2(A+B+1)y\,]\,G\,'-
$$

$$
-\left[(A+B)(A+B+1)-\frac{\omega}{2}(\frac{\omega}{2}+1)\right]G=0\,, \tag{6.6.22}
$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$
y(1-y)\,G''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)y]\,G'-\alpha\beta\,G=0\,.
$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$
\gamma=2A+1\,,\qquad \alpha+\beta=2A+2B+1\,,
$$

$$
\alpha\beta=(A+B)(A+B+1)-\frac{\omega}{2}(\frac{\omega}{2}+1)\,,
$$

т. е.

$$
\alpha=A+B-\frac{\omega}{2}\,,\;\;\beta=A+B+1+\frac{\omega}{2}\,,\;\;\gamma=2A+1\,. \tag{6.6.23}
$$

Требование конечности для решений на сфере будет выполнено, если

$$
A=+\frac{1}{2}\mid m\mid\,,\qquad B=+\frac{1}{2}\mid k\mid\,,
$$

$$
\alpha=-n=0,-1,-2,...\,, \tag{6.6.24}
$$

что приводит к спектру разрешенных частот

$$
\omega=2(n+A+B)=2n+\mid m\mid+\mid k\mid\,; \tag{6.6.25}
$$

в свою очередь, для m и k разрешены условием однозначности только целые значения:

$$
m\;,\;k\in\{0,\pm1,\pm2,...\,\}\,. \tag{6.6.26}
$$

Функция $G_2(y)$ равна

$$
G_2(y)=M_2\;y^{|m|/2}\;(1-y)^{|k|/2}\times
$$

$$
\times F(-n,\;n+1+\mid m\mid+\mid k\mid,\;\mid m\mid+1;\;y)\,; \tag{6.6.27}
$$

напоминаем, что $y = \sin^2 r,\ 1 - y = \cos^2 r$.

Можно аналогичные вычисления выполнить для G_3. Из системы уравнений (6.6.16) получим уравнение второго порядка для G_3:

$$4y(1-y)\frac{d^2G_3}{dy^2} + 4(1-2y)\frac{dG_3}{dy} +$$

$$+\left(-2\omega + \omega^2 - \frac{m^2}{y(1-y)} + \frac{m^2-k^2}{1-y}\right) G_3 = 0 \ . \qquad (6.6.28)$$

В уравнении (6.6.28) сделаем подстановку

$$G_3 = y^A (1-y)^B F(y) \ ,$$

уравнение принимает вид

$$4y(1-y)F'' + 4\left[A(1-y) - By + A(1-y) - By \ + (1-2y)\right] F' +$$

$$+\Big[\ 4A(A-1)\frac{1}{y} + 4B(B-1)\frac{1}{1-y} - 4A(A-1) - 4B(B-1) - 8AB +$$

$$+ 4(-2A - 2B + \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}) - 2\omega + \omega^2 - m^2(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}) + \frac{m^2-k^2}{1-y}\Big] F = 0. \qquad (6.6.29)$$

Требуем выполнения равенств

$$A = +\frac{1}{2} \mid m \mid , \qquad B = +\ \frac{1}{2} \mid k \mid ;$$

уравнение (6.6.29) примет более простой вид

$$y(1-y)\ F'' + [2A + 1 - 2(A+B+1)y\ ]\ F\,' -$$

$$-\Big[\ (A+B)(A+B+1) - \frac{\omega}{2}(\frac{\omega}{2} - 1)\ \Big]\ F = 0\ , \qquad (6.6.30)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$y(1-y)\ F'' + [c - (a+b+1)y]\ F' - ab\ F = 0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$c = 2A + 1\ , \qquad a + b = 2A + 2B + 1\ ,$$

$$ab = (A+B)(A+B+1) - \frac{\omega}{2}(\frac{\omega}{2} - 1)\ ,$$

т. е.

$$a = A + B + 1 - \frac{\omega}{2}\ , \qquad b = A + B + \frac{\omega}{2}\ , \qquad c = 2A + 1\ . \qquad (6.6.31)$$

Условие обрыва ряда до полинома имеет вид

$$a = A + B + 1 - \frac{\omega}{2} = -N, \qquad N = 0, 1, 2, ...,$$

$$\omega = 2(A + B + 1 + N) =\mid m \mid + \mid k \mid +2(1 + N) \; , \qquad \underline{N + 1 = n} \; ,$$

$$G_3 = M_3 \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F(-n+1, \; n+ \mid m \mid + \mid k \mid, \; \mid m \mid +1; \; y) \; ; \tag{6.6.32}$$

сравним с (6.6.27).

Вычислим относительный множитель у функций G_2 и G_3. Исходим из следующего представления для функции G_2:

$$G_2 = M_2 \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F(-n, \; n+1+ \mid m \mid + \mid k \mid, \; \mid m \mid +1; \; y) \; . \tag{6.6.33}$$

Сопутствующая функция

$$G_3 = M_3 \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F(-n+1, \; n+ \mid m \mid + \mid k \mid, \; \mid m \mid +1; \; y) \tag{6.6.34}$$

должна удовлетворять уравнению (см. (6.6.17))

$$G_3 \; [(m-k)^2 - \omega^2] = -4\omega \; y(1-y) \; \frac{dG_2}{dy} + [m^2 - k^2 + \omega^2(1-2y)] \; G_2 \; . \tag{6.6.35}$$

Подставляем выражения для функций G_2 и G_3:

$$(m - k - \omega) \; (m - k + \omega) \; M_3 \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F_3(y) =$$

$$= -4\omega \; [\; \frac{\mid m \mid}{2} y^{|m|/2} \; (1-y)(1-y)^{|k|/2} \; F_2(y) +$$

$$+ \frac{\mid k \mid}{2} \; y \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F_2(y) +$$

$$+ y(1-y) \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \frac{d}{dy} \; F_2(y)] +$$

$$+ [m^2 - k^2 + \omega^2(1-2y)] \; y^{|m|/2} \; (1-y)^{|k|/2} \; F_2(y) \; ;$$

отсюда после сокращения общего множителя из левой и правой частей получаем

$$(m - k - \omega) \; (m - k + \omega) \; \frac{M_3}{M_2} \; F_3(y) =$$

$$= -4\omega \; [\; \frac{\mid m \mid}{2} \; (1-y) \; F_2(y) + \frac{\mid k \mid}{2} \; y \;\; F_2(y) +$$

$$+ y(1-y) \; \frac{d}{dy} \; F_2(y) \;] + [m^2 - k^2 + \omega^2(1-2y)] \; F_2(y) \; . \tag{6.6.36}$$

Для вычисления относительной постоянной достаточно рассмотреть полученное тождество в точке $y = 0$, в результате получаем равенство

$$(m - k - \omega)\,(m - k + \omega)\,\frac{M_3}{M_2} = -2\omega \ \mid m \mid + m^2 - k^2 + \omega^2$$

или

$$-(\omega + m - k)\,(\omega - m + k)\ \frac{M_3}{M_2} = (\omega - \mid m \mid - k)\,(\omega - \mid m \mid + k)\ ,$$

т. е.

$$M_2 = M\ (\omega + m - k)(\omega - m + k)\ ,$$
$$M_3 = -M\ (\omega - \mid m \mid - k)(\omega - \mid m \mid + k)\ . \qquad (6.6.37)$$

Эти соотношения упрощаются в зависимости от знака m:

$$m > 0\ , \qquad M_2 = M(\omega - k + m)\ , \qquad M_3 = -M(\omega - k - m)\ ;$$
$$m < 0\ , \qquad M_2 = M(\omega + k - m)\ , \qquad M_3 = -M(\omega + k + m)\ ;$$
$$m = 0\ , \qquad M_2 = M\ , \qquad M_3 = -M\ ; \qquad (6.6.38)$$

здесь M – некоторая постоянная.

6.7 О решениях уравнений Максвелла в эллиптическом пространстве

Теперь рассмотрим вопрос о решениях уравнений Максвелла в эллиптическом пространстве $S\,'_3$. Напомним, что $S\,'_3$ также является пространством постоянной положительной кривизны и отличается от сферического пространства лишь топологическими свойствами: S_3 односвязно, $S\,'_3$ двухсвязно. Понятно, что представляет физический интерес вопрос, каким образом проявляют себя эти различия в теории электромагнитного поля. Для дальнейшего важно иметь простую и явную реализацию различных глобальных структур двух пространств; воспользуемся известными в теории групп $SU(2)$ и $SO(3)$ соотношениями.

Так, каждому элементу группы $SU(2)$ – унитарной (2×2)-матрице B – можно поставить в соответствие точку на четырехмерной сфере: достаточно разложить матрицу B по набору матриц Паули

$$B = \sigma^0\, n_0\ -\ i\,\sigma^k\, n_k\ , \qquad \det B = +1\ .$$

Каждому же элементу группы $SO(3)$ можно сопоставить трехмерный вектор $\vec{c}$:

$$0(\vec{c}) =\ I\ +\ 2\,\frac{\vec{c}^{\times} + (\vec{c}^{\times})^2}{(1+\vec{c}^2)}\ \ ,\ \ (\vec{c}^{\,\times})_{kl} = -\,\epsilon_{klj}\, c_j\ . \qquad (6.7.1)$$

Здесь пользуемся известной параметризацией Гиббса; детальное и последовательное построение теории группы вращения на основе этой параметризации см. в [174]. Вектор $\vec{c}$ представляет точку в эллиптическом пространстве; нужно обратить внимание на то обстоятельство, что векторам

$$\vec{c}^{\,+}_{\infty} = +\infty\ \vec{c}_0\ , \qquad \vec{c}^{\,-}_{\infty} = -\infty\ \vec{c}_0\ , \qquad (\ \vec{c}_0^{\,2} = 1\ )$$

ставится в соответствие одна матрица: $0(\vec{c}^{\,\pm\,\infty}) = I\ +\ 2\ (\vec{c}_0^{\,\times})^2$; другими словами, векторы $\vec{c}^{\,+}_{\infty}$ и $\vec{c}^{\,-}_{\infty}$ представляют одну и ту же точку эллиптического пространства.

Отображение $2\ \to\ 1$ из группы $SU(2)$ в $SO(3)$ будем использовать для установления области изменения криволинейных координат в эллиптическом пространстве по соответствующей области, отвечающей сферическому пространству. Это отображение имеет вид:

$$\{+n_a\ ;\ \ -n_a\}\ \ \to\ \ \vec{c} = \frac{\vec{n}}{n_0}\ .$$

Теперь обратимся к построению решений матричного уравнения Максвелла в цилиндрических координатах эллиптического пространства. При этом нет необходимости заново проводить все вычисления, связанные с анализом дифференциального уравнения; задача состоит в разрешении вопроса: какие решения из найденных для сферического пространства при рассмотрении их в области $\tilde{G}(\rho, \phi, z)$, параметризующей эллиптическое пространство, являются однозначными функциями точек этого пространства.

Координаты (ρ, ϕ, z) в эллиптическом пространстве вводим соотношениями

$$c_1 = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\cos\rho}\cos z\ ,\ c_2 = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\cos z}\ \sin z\ ,\ c_3 = \operatorname{tg} z\ , \qquad (6.7.2a)$$

где координаты (ρ, ϕ, z) изменяются в пределах:

$$\tilde{G} = \{\ \rho \in [0, \pi/2]\ ,\ \phi \in [-\pi,\ +\pi]\ ,\ z \in [-\pi/2, +\pi/2]\ \}\ . \qquad (6.7.2b)$$

Нужно провести отождествление точек границы области $\tilde{G}$, отвечающее тому, что векторы $\vec{c}^{\,+}_{\infty} = +\ \infty\ \vec{c}_0$ и $\vec{c}^{\,-}_{\infty} = -\ \infty\ \vec{c}_0$ представляют одну и ту же точку эллиптического пространства. Для этого удобно область $\tilde{G}$ разбить на три части:

$$\tilde{G}_1 = \tilde{G}(\rho \neq 0, \pi/2)\ ,\ \ \tilde{G}_2 = \tilde{G}(\rho = 0)\ ,\ \ \tilde{G}_3 = \tilde{G}(\rho = \pi/2)\ .$$

Рассмотрим область $\tilde{G}_1$. Сформулируем сначала ответ, а затем покажем его справедливость. Отождествление в области $\tilde{G}_1$ должно быть осуществлено согласно схеме, представленной на рисунке 2.

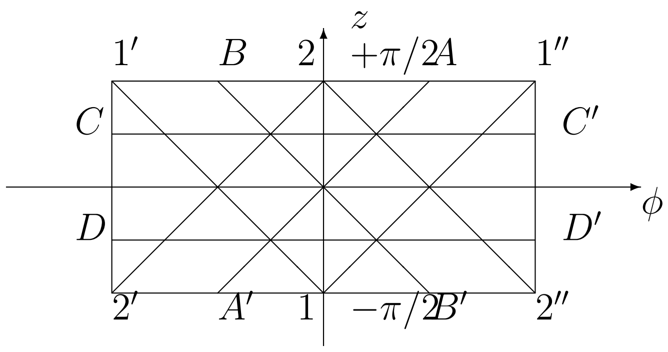


Рисунок 2 – Отождествление в области $\tilde{G}_1$

Пары (A, A') , (B, B') и т. д., а также тройки $(1, 1', 1'')$ и $(2, 2', 2'')$ представляют каждая только по одной точке эллиптического пространства.

Теперь установим, какие решения уравнений Максвелла из найденных для сферического пространства в разделе **6.6** будут однозначными функциями точек эллиптического пространства, параметризованных областью $\tilde{G}_1$, а какие – нет. Понятно, что достаточно проследить за поведением лишь зависящего от переменных ϕ и z фактора $f = e^{im\phi}\, e^{ikz}$. Из уравнений

$$f(C) = f(C') \; , \quad f(D) = f(D') \; , \quad ...$$

никаких ограничений, дополнительных к требованию, чтобы M и K были целыми числами, не следует. Уравнения $f(1) = f(1') = f(1'')$ дают

$$e^{-ik(\pi/2)} = e^{-im\pi}\; e^{+ik(\pi/2)} = e^{+im\pi}\; e^{+ik(\pi/2)} \; ,$$

откуда получаем:

$$e^{i2m\pi} = 1 \; , \qquad e^{i(k-m)\pi} = 1 \; , \qquad e^{i(k+m)\pi} = 1 \; ;$$

т. е. $(k - m)$ и $(k + m)$ должны быть четными. Аналогичный вывод следует и из рассмотрения точек $(2, 2', 2'')$.

Таким образом, решения уравнений Максвелла из раздела **6.6** являются однозначными в $\tilde{G}_1$ функциями точек эллиптического пространства, если m и k либо оба четные, либо оба нечетные; соответственно, нумерующий значения частоты ω параметр N

$$\omega = 2n + \mid m \mid + \mid k \mid = N \tag{6.7.3}$$

принимает лишь четные значения: $N = 0, 2,\; 4,\; 5,\; \ldots$

Теперь обратимся к аналогичному исследованию областей $\tilde{G}_2$ и $\tilde{G}_3$. Нужно показать, что функции $\Phi_{\omega m k}$, однозначные в $\tilde{G}_1$, будут также однозначными и в этих областях. В области $\tilde{G}_2$ получаем

$$\tilde{G}_2, \qquad P \; , \qquad \vec{c} = +\infty\, (0 \; , \; 0 \; , \; -1) \; . \tag{6.7.4a}$$

Отождествление в области $\tilde{G}_2$ должно быть осуществлено согласно схеме, представленной на рисунке 3.

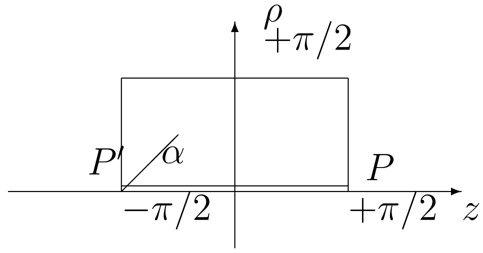


Рисунок 3 – Отождествление в области $\tilde{G}_2$

Т. е. координата ϕ является "немой" в точке $(\rho = 0,\ z = -\pi/2,\ \phi)$. Для точки P' аналогично находим:

$$\tilde{G}_2\ , \qquad P'\ , \qquad \vec{c} = -\,\infty\,(0\ ,\ 0\ ,\ -1)\ . \qquad (6.7.4b)$$

Таким образом, P и P' представляют одну точку в эллиптическом пространстве. Сравним значения функции $\Phi_{\omega mk}$ в точках P и P':

$$\Phi_{\omega mk} \sim e^{im\phi}\, e^{ikz}\, (\sin r)^{|m|}\, (\cos r)^{|k|} F(A, B, C; \sin^2 r)\ ;$$

$$\Phi_{\omega mk}(P) \sim \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq 0; \\ e^{+ik\pi/2}\ F(A, B, C; 0), \quad \text{если}\ \ m = 0; \end{array} \right.$$

$$\Phi_{\omega mk}(P') \sim \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq 0; \\ e^{-ik\pi/2}\ F(A, B, C; 0), \quad \text{если}\ \ m = 0\ ; \end{array} \right. \qquad (6.7.5)$$

четные значения для величины k (при нулевом m) обеспечивают выполнение равенства $\Phi_{\omega mk}(P) = \Phi_{\omega mk}(P')$. В оставшейся части области $\tilde{G}_2$ точки эллиптического пространства параметризуются в соответствии с соотношением:

$$(0; \phi; z \neq 0, \pi \neq 2) \implies \vec{c} = (0\ ,\ 0\ ,\ tan\ z)\ ,$$
$$\tilde{G}_2\ \ (\phi - \text{"немая"}\ \ \text{координата})\ . \qquad (6.7.6a)$$

Функция $\Phi_{\omega mk}$, принимающая здесь значения, не зависящие от переменной ϕ:

$$G_2\ , \qquad \phi_{\omega mk} \sim \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq 0; \\ e^{ikz}\ F(A, B, C; 0)\ , \quad \text{если}\ \ m = 0\ , \end{array} \right. \qquad (6.7.6b)$$

является непрерывной функцией точек эллиптического пространства в области $\tilde{G}_2$ без граничных точек. Наконец, рассматриваем область $\tilde{G}_3$ (рисунок 4).

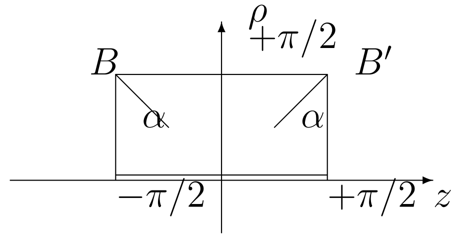


Рисунок 4 – Отождествление в области $\tilde{G}_3$

Можно показать, что

$$B\,, \qquad \vec{c} = \infty\,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0) = \infty\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)\ ;$$

$$B'\,, \qquad \vec{c} = \infty\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)\ .$$

Сравним значения волновой функции в точках B и B':

$$\Phi_{\omega mk}(B) \sim \left\{ \begin{array}{l} 0\,, \quad k \neq 0; \\ e^{+im\pi/2}\ F(A,B,C;1)\,, \ \ \text{если}\ \ k=0\ ; \end{array} \right.$$

$$\Phi_{\omega mk}(B') \sim \left\{ \begin{array}{l} 0\,, \quad k \neq 0\ ; \\ e^{-im\pi/2}\ F(A,B,C;1)\,, \ \ \text{если}\ \ k=0\ ; \end{array} \right. \qquad (6.7.7)$$

поскольку m – четная, то выполняется равенство $\Phi_{\omega mk}(B) = \Phi_{\omega mk}(B')$. В оставшейся части области $\tilde{G}_3$ точки эллиптического пространства параметризуются в соответствии с соотношением:

$$\tilde{G}_3\ : \qquad (\pi/2,\ \phi,\ z \neq -\pi/2, +\pi/2) \implies$$

$$\vec{c} = \frac{\infty}{\cos z}\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0) = \infty\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)\ , \qquad (6.7.8a)$$

z – "немая" координата. Волновые функции, принимающие здесь значения, не зависящие от координаты z:

$$\tilde{G}_3 = \left\{ \begin{array}{l} 0\,, \quad k \neq 0\ , \\ e^{imz}\ F(A,B,C;1)\,, \ \ \text{если}\ \ k=0\ \ , \end{array} \right. \qquad (6.7.8b)$$

являются однозначными функциями точек эллиптического пространства.

Таким образом, действительно, функции $\Phi_{\omega mk}(\rho,\phi,z)$ при $\omega = N = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ являются однозначными и непрерывными функциями точек эллиптического пространства. Функции же $\Phi_{\omega mk}(\rho,\phi,z)$, $N = 1,\ 3,\ \ldots$, не являются непрерывными однозначными функциями точек этого пространства, и они не входят в полный ортогональный набор непрерывных на $SO(3)$ функций.

Глава 7

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

7.1 Цилиндрические координаты и тетрада в пространстве H_3

Рассмотрим матричное уравнение Максвелла в цилиндрических координатах гиперболического пространства Лобачевского H_3:

$$n_1 = \text{sh}\, r\ \cos\phi\ ,\ \ n_2 = \text{sh}\, r\ \sin\phi\ ,\ \ n_3 = \text{ch}\, r\ \text{sh}\, z\ ,\ \ n_4 = \text{ch}\, r\ \text{ch}\, z\ ;$$

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \text{sh}^2\, r\ d\phi^2 - \text{ch}^2 r\ dz^2\ , \qquad x^\alpha = (t, r, \phi, z)\ ,$$

$$e^{\beta}_{(a)}(y) = \left| \begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sh}^{-1} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{ch}^{-1} r \end{array} \right| ,\ \ e_{(a)\beta}(y) = \left| \begin{array}{llll} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sh} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{ch}\, r \end{array} \right| ;\ \ (7.1.1)$$

область изменения координат $(r,\ \phi,\ z)$

$$r \in [0, +\infty)\ , \qquad \phi \in [0, 2\pi]\ , \qquad z \in (-\infty, +\infty)\ .$$

Следует вычислить сначала символы Кристоффеля; часть символов Кристоффеля обращается в нуль:

$$\Gamma^0_{\beta\sigma} = 0\ , \qquad \Gamma^i_{00} = 0\ , \qquad \Gamma^i_{0j} = 0\ , \qquad (7.1.2)$$

остальные определяются соотношением

$$\Gamma^i{}_{jk} = g^{il}\, \Gamma_{l,jk} = \frac{1}{2}\, g^{il}\, (-\partial_l\, g_{jk} + \partial_j\, g_{lk} + \partial_k\, g_{lj})\ , \qquad x^i = (r, \phi, z)\ .\ \ (7.1.3)$$

Трехмерные символы Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$ равны

$$\Gamma^r{}_{jk} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sh}\, r\, \text{ch}\, r & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sh}\, r\, \text{ch}\, r \end{array} \right| ,$$

$$\Gamma^\phi{}_{jk} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} & 0 \\ \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| , \qquad \Gamma^z{}_{jk} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r} & 0 & 0 \end{array} \right| . \qquad (7.1.4)$$

Вычисляем ковариантные производные от тетрадных векторов:

$$A_{\beta;\alpha} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A_\sigma \implies$$

$$e_{(0)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} e_{(0)\sigma} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\, e_{(0)0} = 0 \,, \tag{7.1.5a}$$

$$e_{(1)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(1)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^r_{\alpha\beta}\, e_{(1)r} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\mathrm{sh}\, r \mathrm{ch}\, r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{sh}\, r\, \mathrm{ch}\, r \end{vmatrix} \,, \tag{7.1.5b}$$

$$e_{(2)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(2)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\phi_{\alpha\beta}\, e_{(2)\phi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{ch}\, r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \tag{7.1.5c}$$

$$e_{(3)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(3)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^z_{\alpha\beta}\, e_{(3)z} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}\, r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \tag{7.1.5d}$$

Теперь предстоит вычислить коэффициенты вращения Риччи исходя из соотношения $\gamma_{abc} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;\alpha}\, e_{(c)}^{\alpha}$; получаем

$$\gamma_{ab0} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;t}\, e_{(0)}^{t} = 0 \tag{7.1.6a}$$

и

$$\gamma_{ab1} = e_{(a)}^{\ a}\, e_{(b)a;r}\, e_{(1)}^{r} \,,\; \gamma_{ab2} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;\phi}\, e_{(2)}^{\phi} \,,\; \gamma_{ab3} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;z}\, e_{(3)}^{z} \,. \tag{7.1.6b}$$

Очевидно, что заведомо обращаются в нуль следующие коэффициенты Риччи

$$\gamma_{011} = \gamma_{021} = \gamma_{031} = 0 \,,\; \gamma_{012} = \gamma_{022} = \gamma_{032} = 0 \,,\; \gamma_{013} = \gamma_{023} = \gamma_{033} = 0 \,, \tag{7.1.6c}$$

остальные девять равны

$$\gamma_{231} = e_{(2)}^{\phi}\, e_{(3)\phi;r}\, e_{(1)}^{r} = 0 \,,$$

$$\gamma_{311} = e_{(3)}^{z}\, e_{(1)z;r}\, e_{(1)}^{r} = 0 \,,$$

$$\gamma_{121} = e_{(1)}^{r}\, e_{(2)r;r}\, e_{(1)}^{r} = 0 \,,$$

$$\gamma_{232} = e_{(2)}^{\ \phi}\, e_{(3)\phi;\phi}\, e_{(2)}^{\phi} = 0 \,,$$

$$\gamma_{312} = e_{(3)}^{\ z}\, e_{(1)z;\phi}\, e_{(2)}^{\phi} = 0 \,,$$

$$\gamma_{122} = e_{(1)}^{\ r}\, e_{(2)r;\phi}\, e_{(2)}^{\phi} = \frac{\mathrm{ch}\, r}{\mathrm{sh}\, r} \,,$$

$$\gamma_{233} = e_{(2)}^{\ \phi}\, e_{(3)\phi;z}\, e_{(3)}^{z} = 0 \,,$$

$$\gamma_{313} = e_{(3)}^{\ z}\, e_{(1)z;z}\, e_{(3)}^{z} = -\frac{\mathrm{sh}\, r}{\mathrm{ch}\, r} \,,$$

$$\gamma_{123} = e_{(1)}^{\ \ r}\ e_{(2)r;z}\ e^{z}_{(3)} = 0\ . \tag{7.1.6d}$$

С целью дополнительного контроля можно вычислить коэффициенты вращения Риччи другим способом, основанном на их известном представлении через вспомогательные величины λ_{abc}. Действительно, вместо коэффициентов Риччи

$$\gamma_{abc} = -e_{(a)\alpha;\beta}\ e^{\alpha}_{(b)}\ e^{\beta}_{(c)}$$

введем антисимметричную по второй паре индексов величину $\lambda_{abc}(x)$:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb}\ . \tag{7.1.7a}$$

Для λ_{abc} можем найти следующее представление через обычные производные от тетрады:

$$\lambda_{abc} = (\partial_\beta e_{(a)\alpha} - \partial_\alpha e_{(a)\beta})\ e^{\alpha}_{(c)} e^{\beta}_{(b)}\ , \tag{7.1.7b}$$

и справедливо тождество

$$\frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) = \gamma_{abc}\ . \tag{7.1.7c}$$

Сначала вычисляем

$$\lambda_{abc} = e^{b}_{(b)}\ (\partial_b e_{(a)c})\ e^{c}_{((c)} - e^{c}_{(c)}\ (\partial_c e_{(a)b})\ e^{b}_{((b)}\ ,$$

откуда следует

$$\lambda_{0bc} = e^{b}_{(b)}\ (\partial_b e_{(0)c})\ e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)}\ (\partial_c e_{(0)b})\ e^{b}_{(b)} \equiv 0\ ,$$

$$\lambda_{1bc} = e^{b}_{(b)}\ (\partial_b e_{(1)c})\ e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)}\ (\partial_c e_{(1)b})\ e^{b}_{(b)} \equiv 0\ , \tag{7.1.8a}$$

и отличны от нуля только величины

$$\lambda_{2bc} = e^{b}_{(b)}\ (\partial_b e_{(2)c})\ e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)}\ (\partial_c e_{(2)b})\ e^{b}_{(b)} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_{212} = e^{1}_{(1)}\ (\partial_1 e_{(2)2})\ e^{2}_{(2)} = -\frac{\text{ch}\ r}{\text{sh}\ r}\ ,$$

$$\lambda_{221} = -e^{1}_{(1)}\ (\partial_1 e_{(2)2})\ e^{2}_{(2)} = +\frac{\text{ch}\ r}{\text{sh}\ r}\ , \tag{7.1.8b}$$

$$\lambda_{3bc} = e^{b}_{(b)}\ (\partial_b e_{(3)c})\ e^{c}_{(c)} - e^{c}_{(c)}\ (\partial_c e_{(3)b})\ e^{b}_{(b)} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_{313} = e^{1}_{(1)}\ (\partial_1 e_{(3)3})\ e^{3}_{(3)} = -\frac{\text{sh}\ r}{\text{ch}\ r}\ ,$$

$$\lambda_{331} = -e^{1}_{(1)}\ (\partial_1 e_{(3)3})\ e^{3}_{(3)} = +\frac{\text{sh}\ r}{\text{ch}\ r}\ . \tag{7.1.8c}$$

Находим коэффициенты вращения Риччи:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{221} - \lambda_{212})\ ,$$

$$\gamma_{ab0} = 0 \; , \qquad \gamma_{ab1} = 0 \; ,$$
$$\gamma_{122} = \frac{1}{2}(\lambda_{122} + \lambda_{221} - \lambda_{212}) = +\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} \; ,$$
$$\gamma_{313} = (\lambda_{313} + \lambda_{133} - \lambda_{331}) = -\frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \; . \qquad (7.1.9)$$

Учитывая обозначения

$$e^{\rho}_{(0)}\partial_\rho = \partial_{(0)} = \partial_t \; , \; e^{\rho}_{(1)}\partial_\rho = \partial_{(1)} = \partial_r \; ,$$
$$e^{\rho}_{(2)}\partial_\rho = \partial_{(2)} = \frac{1}{\text{sh } r}\partial_\phi \; , \; e^{\rho}_{(3)}\partial_\rho = \partial_{(3)} = \frac{1}{\text{ch } r}\partial_z \; ,$$
$$\mathbf{v}_0 = (\gamma_{010}, \gamma_{020}, \gamma_{030}) \equiv 0 \; , \; \mathbf{v}_1 = (\gamma_{011}, \gamma_{021}, \gamma_{031}) \equiv 0 \; ,$$
$$\mathbf{v}_2 = (\gamma_{010}, \gamma_{022}, \gamma_{032}) \equiv 0 \; , \; \mathbf{v}_3 = (\gamma_{013}, \gamma_{023}, \gamma_{033}) \equiv 0 \; ,$$
$$\mathbf{p}_0 = (\gamma_{230}, \gamma_{310}, \gamma_{120}) = 0 \; , \; \mathbf{p}_1 = (\gamma_{231}, \gamma_{311}, \gamma_{121}) = 0 \; ,$$
$$\mathbf{p}_2 = (\gamma_{232}, \gamma_{312}, \gamma_{122}) = (0, 0, \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}) \; , \; \mathbf{p}_3 = (\gamma_{233}, \gamma_{313}, \gamma_{123}) = (0, -\frac{\text{sh } r}{\text{ch} r}, 0) \; , \qquad (7.1.10)$$

уравнение Максвелла в пространстве Лобачевского приводим к виду

$$(\; \alpha^k \; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^k \; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} -$$
$$-i \; (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^k \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0$$

и дальше

$$\left(-i\partial_t + \alpha^1 \partial_r + \alpha^2 \frac{1}{\text{sh } r}\partial_\phi + \alpha^3 \frac{1}{\text{ch} r}\partial_z + \right.$$
$$\left. + \alpha^2 S_3 \; \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} - \alpha^3 S_2 \; \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \right) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.1.11)$$

7.2 Разделение переменных в уравнении Максвелла

С волновым оператором Максвелла

$$\left(-i\partial_t + \alpha^1 \; \partial_r + \alpha^2 \; \frac{1}{\text{sh } r}\partial_\phi + \alpha^3 \; \frac{1}{\text{ch } r}\partial_z + \alpha^2 \; S_3 \; \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} - \alpha^3 \; S_2 \; \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r} \right) \quad (7.2.1)$$

коммутируют следующие три: $i\partial_t$, $i\partial_\phi$, $i\partial_z$. Следовательно, для полевой функции $\Psi(t; \rho, \phi, z)$ можно использовать подстановку

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix} = e^{-i\omega t} \; e^{im\phi} \; e^{ikz} \begin{vmatrix} 0 \\ f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{vmatrix} . \qquad (7.2.2)$$

При этом уравнение (7.2.1) примет вид

$$\left(-\omega+\alpha^1\,\frac{d}{dr}+\frac{im}{\text{sh}\,r}\alpha^2+\frac{ik}{\text{ch}\,r}\alpha^3+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r}\alpha^2 S_3-\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r}\alpha^3 S_2\right)\left|\begin{array}{c}0\\ f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\end{array}\right|=0\ . \tag{7.2.3}$$

После простых вычислений находим систему уравнений для радиальных функций:

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})f_1+\frac{im}{\text{sh}\,r}\,f_2+\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,f_3=0\ ,$$

$$-\omega f_1-\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,f_2+\frac{im}{\text{sh}\,r}\,f_3=0\ ,$$

$$-\omega f_2-(\frac{d}{dr}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})\,f_3+\frac{ik}{\text{ch}\,r}f_1=0\ ,$$

$$-\omega f_3+(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r})\,f_2-\frac{im}{\text{sh}\,r}f_1=0\ . \tag{7.2.4}$$

Рассмотрим сначала частный случай $m=0$, система уравнений при этом значительно упрощается:

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})f_1+\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,f_3=0\ ,$$

$$-\omega f_1-\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,f_2=0\ ,$$

$$-\omega f_2-(\frac{d}{dr}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})\,f_3+\frac{ik}{\text{ch}\,r}f_1=0\ ,$$

$$-\omega f_3+(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r})\,f_2=0\ , \tag{7.2.5}$$

откуда получаем

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})f_1+\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,f_3=0\ ,$$

$$f_1=\frac{-ik}{\omega\;\text{ch}\,r}\,f_2\ ,$$

$$-\omega f_2-(\frac{d}{dr}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})\,f_3+\frac{ik}{\text{ch}\,r}f_1=0\ ,$$

$$f_3=\frac{1}{\omega}\,(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r})\,f_2\ . \tag{7.2.6}$$

Если вторым и четвертым уравнениями воспользоваться в первом и третьем, то приходим к

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r}+\frac{\text{sh}\,r}{\text{ch}\,r})\,\frac{-ik}{\omega\;\text{ch}\,r}\,f_2+\frac{ik}{\text{ch}\,r}\,\frac{1}{\omega}\,(\frac{d}{dr}+\frac{\text{ch}\,r}{\text{sh}\,r})\,f_2=0\ ,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r})\ \frac{1}{\omega}\ (\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r})\ f_2 + \frac{ik}{\text{ch}\, r}\ \frac{-ik}{\omega\ \text{ch}\, r}\ f_2 = 0\ , \qquad (7.2.7)$$

Легко убеждаемся, что после простых преобразований уравнения (7.2.7) сводятся соответственно к тождеству $0 \equiv 0$ и уравнению для f_2:

$$\frac{d^2}{dr^2}\ f_2 + (\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r})\ \frac{d}{dr}\ f_2 + (\omega^2 + 1 - \frac{1}{\text{sh}^2 r} - \frac{k^2}{\text{ch}^2 r})\ f_2 = 0\ . \qquad (7.2.8)$$

Введем для функции f_2 подстановку

$$f_2(r) = \frac{1}{\text{sh}\, r}\ E(r)\ , \qquad \frac{d}{dr}\ f_2 = \frac{1}{\text{sh}\, r}\ \left(-\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\ E + \frac{dE}{dr}\right)\ ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\ f_2 = \frac{1}{\text{sh}\, r}\ \left(\frac{d^2E}{dr^2} - 2\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\ \frac{dE}{dr} + (\frac{2}{\text{sh}^2 r} + 1)\ E\right)\ . \qquad (7.2.9a)$$

В результате уравнение (7.2.8) примет вид

$$\left(\frac{d^2E}{dr^2} - 2\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\ \frac{dE}{dr} + (\frac{2}{\text{sh}^2 r} + 1)\ E\right) +$$

$$+(\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r})\ \left(-\frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\ E + \frac{dE}{dr}\right) + \left(\omega^2 + 1 - \frac{1}{\text{sh}^2 r} - \frac{k^2}{\text{ch}^2 r}\right)\ E = 0\ ,$$

$$(7.2.9b)$$

откуда находим уравнение для функции $E(r)$:

$$\frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{\text{sh}\, r\ \text{ch}\, r}\frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\text{ch}^2 r})E = 0 \qquad (7.2.10a)$$

и

$$f_1(r) = \frac{-ik}{\omega}\ \frac{1}{\text{ch}\, r\ \text{sh}\, r}\ E(r)\ , \qquad f_3 = \frac{1}{\omega}\ \frac{1}{\text{sh}\, r}\ \frac{d}{dr}E(r)\ . \qquad (7.2.10b)$$

Возвратимся к системе радиальных уравнений (7.2.4) при любом значении m:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch} r})f_1 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\ f_2 + \frac{ik}{\text{ch}\, r}\ f_3 = 0\ ,$$

$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\text{ch}\, r}\ f_2 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\ f_3 = 0\ ,$$

$$-\omega f_2 - (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r})\ f_3 + \frac{ik}{\text{ch}\, r}f_1 = 0\ ,$$

$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r})\ f_2 - \frac{im}{\text{sh}\, r}f_1 = 0\ . \qquad (7.2.11)$$

Покажем, что первое уравнение в (7.2.11) превращается в тождество $0 = 0$ при учете трех остальных уравнений. Действительно,

$$-\omega f_1 = \frac{ik}{\text{ch}\, r}\ f_2 - \frac{im}{\text{sh}\, r}\ f_3\ ,$$

$$-\omega f_2 = (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r})\ f_3 - \frac{ik}{\text{ch } r} f_1\ ,$$

$$-\omega f_3 = -(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r})\ f_2 + \frac{im}{\text{sh } r} f_1\ ;$$

подставляем их в первое уравнение в (7.2.11):

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r})(\frac{ik}{\text{ch } r}\ f_2 - \frac{im}{\text{sh } r}\ f_3) + \frac{im}{\text{sh } r}\ \left[(\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r})\ f_3 - \frac{ik}{\text{ch } r} f_1\right] +$$

$$+\frac{ik}{\text{ch } r}\ \left[-(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r})\ f_2 + \frac{im}{\text{sh } r} f_1\right] = 0\ .$$

Легко проверяется, что это уравнение сводится к тождеству $0 = 0$. Таким образом, вместо четырех уравнений (7.2.11) можно рассматривать эквивалентную систему из трех уравнений

$$-\omega f_1 = \frac{ik}{\text{ch } r}\ f_2 - \frac{im}{\text{sh } r}\ f_3\ ,$$

$$-\omega f_2 = (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r})\ f_3 - \frac{ik}{\text{ch } r} f_1\ ,$$

$$-\omega f_3 = -(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r})\ f_2 + \frac{im}{\text{sh } r} f_1\ . \tag{7.2.12}$$

Ее можно упростить, введя подстановки

$$f_2 = \frac{1}{\text{sh } r}\ F_2\ , \qquad f_3 = \frac{1}{\text{ch } r}\ F_3\ , \tag{7.2.13}$$

при этом (7.2.12) примет вид

$$-\omega\ f_1 = i\ \frac{k\ F_2 - m\ F_3}{\text{sh } r\ \text{ch } r}\ ,$$

$$-\omega\ \frac{F_2}{\text{sh } r} = \frac{1}{\text{ch } r}\ \frac{dF_3}{dr} - \frac{ik}{\text{ch } r}\ f_1\ ,$$

$$-\omega\ \frac{F_3}{\text{ch } r} = -\frac{1}{\text{sh } r}\ \frac{dF_2}{dr} + \frac{im}{\text{sh } r}\ f_1\ . \tag{7.2.14}$$

Из второго и третьего уравнений можно исключить f_1:

$$(\frac{\omega}{\text{ch } r}\ \frac{d}{dr} + \frac{km}{\text{sh } r\ \text{ch}^2 r})\ F_3 + (\frac{\omega^2}{\text{sh } r} - \frac{k^2}{\text{sh } r\ \text{ch}^2 r})\ F_2 = 0\ ,$$

$$(\frac{\omega}{\text{sh } r}\ \frac{d}{dr} - \frac{km}{\text{ch } r\ \text{sh}^2 r})\ F_2 - (\frac{\omega^2}{\text{ch } r} - \frac{m^2}{\text{ch } r\ \sinh^2 r})\ F_3 = 0\ . \tag{7.2.15}$$

7.3 Анализ радиальных уравнений для значения $m = 0$

Будем исследовать решения дифференциального уравнения (7.2.10a)

$$\frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{\text{sh } r \text{ ch } r}\,\frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\text{ch}^2 r})E = 0 \;. \qquad (7.3.1)$$

Вначале рассмотрим частный случай этого уравнения при $k^2 = \omega^2$:

$$\frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}\frac{d}{dr}\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}\frac{d}{dr}\; E + k^2(1 - \frac{1}{\text{ch}^2 r})\; E = 0 \;;$$

отсюда следует просто интегрируемое дифференциальное уравнение

$$(\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}\frac{d}{dr})\;(\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}\frac{d}{dr})\; E = -k^2\; E \;. \qquad (7.3.2)$$

Делаем замену переменных

$$\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}\frac{d}{dr} = \frac{d}{dx}\;, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}\;,$$

$$dx = d \ln \text{ch } r\;, \qquad x = \ln(C\;\text{ch } r)\;, \qquad C = \text{const}\;.$$

Уравнение (7.3.2) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2}E = -k^2\; E$$

и имеет решения

$$E = e^{ikx} = \text{const}\;(\text{ch } r)^{ik}\;, \qquad k = \pm\,\omega\;. \qquad (7.3.3)$$

Два найденных решения являются комплексно сопряженными друг другу:

$$(\text{ch } r)^{+ik} = (e^{\ln \text{ch } r})^{+ik} = \cos(\; k \ln \text{ch } r\;) + i\;\sin(\; k \ln \text{ch } r\;)\;,$$

$$(\text{ch } r)^{-ik} = [e^{\ln \text{ch } r}]^{-ik} = \cos(\; k \ln \text{ch } r\;] - i\;\sin(\; k \ln \text{ch } r\;)\;, \qquad (7.3.4)$$

следовательно, можно выделить два линейно независимых вещественных решения:

$$E_+(r) = \cos\,[\; k_0 \ln \text{ch } r\;]\;, \qquad E_-(r) = \sin\,[\; k_0 \ln \text{ch } r\;]\;, \qquad (7.3.5a)$$

причем при устремлении радиуса кривизны к бесконечности первое решение переходит в известные решения в плоском пространстве:

$$r \to 0\;, \qquad E_+(r) = \cos\,(\; k_0 \ln \text{ch } r\;) \;\;\longrightarrow\;\; +1\;;$$

$$r \to 0\;, \qquad E_-(r) = \sin\,(\; k_0 \ln \text{ch } r\;) \;\;\longrightarrow\;\; \text{const}\; r^2\;. \qquad (7.3.5b)$$

Можно обратиться к ситуации в плоском пространстве и легко увидеть существование там также двух решений. Действительно, при этом имели бы простое радиальное уравнение с двумя линейно независимыми решениями:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\ E(r) = 0\ , \qquad \Longrightarrow \qquad E(r) \sim 1,\ r^2\ . \tag{7.3.5c}$$

Решение, пропорциональное r^2, обычно отбрасывается из-за его расходимости на бесконечности. Именно этим двум решениям и соответствуют решения $E_+(r)$ и $E_-(r)$ в пространстве Лобачевского. Отметим, что оба решения в пространстве Лобачевского (7.3.5a) являются осциллирующими на бесконечности и в этом смысле являются равноправными.

Возвратимся к уравнению (7.3.1)

$$\frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{\text{sh}\ r\ \text{ch}\ r}\ \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\text{ch}^2 r})E = 0 \tag{7.3.6a}$$

и покажем, что можно легко построить еще один тип решений, который также описывает некую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z. Здесь пока величина волнового вектора k никак не связана с частотой ω. Убедимся, что можно подобрать k таким образом, что точным решением уравнения будет функция

$$E = \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r\ , \qquad B^2 = -k^2\ . \tag{7.3.6b}$$

Подстановка (7.3.6b) дает

$$E' = 2\ \text{sh}\ r\ \text{ch}^{B+1} r + B\ \text{sh}^3 r\ \text{ch}^{B-1} r\ ,$$

$$E'' = 2\ \text{ch}^{B+2} + 2(B+1)\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r + 3B\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r + B(B-1)\text{sh}^4 r\ \text{ch}^{B-2} r\ ,$$

и уравнение (7.3.6a) приводит к

$$2\ \text{ch}^{B+2} + 2(B+1)\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r + 3B\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r + B(B-1)\text{sh}^4 r\ \text{ch}^{B-2} r -$$

$$-2\text{ch}^B r - B\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^{B-2} r - k^2\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^{B-2} r + \omega^2\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^B r = 0$$

или

$$2\ \text{ch}^4 r + 2(B+1)\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^2 r + 3B\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^2 r + B(B-1)\ \text{sh}^4 r -$$

$$-2\ \text{ch}^2 r - B\ \text{sh}^2 r\ - k^2\ \text{sh}^2 r + \omega^2\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^2 r = 0\ .$$

Введем обозначение $\text{ch}^2 r = x$; тогда предыдущее равенство примет вид

$$2\ x^2 + (-x + x^2)\ [5B + 2 + \omega^2] + (B^2 - B)(1 - 2x + x^2) +$$

$$+2x + B(1-x) + k^2(1-x) = 0$$

или

$$x^2\ (4 + 4B + \omega^2 + B^2) + x\ (-4 - 4B - \omega^2 - B^2) + x^0\ (B^2 + k^2) = 0\ .$$

Последнее равенство будет удовлетворено, если

$$B^2 = -k^2 \ , \qquad (B+2)^2 + \omega^2 = 0 \ , \tag{7.3.7a}$$

т. е.

$$B = -2 + i\,\omega, \ -2 - i\,\omega \ ,$$
$$k = \pm\, i\, B = \left\{ \begin{array}{l} \mp\,(2i+\omega)\ , \\ \mp\,(2i-\omega)\ . \end{array} \right. \tag{7.3.7b}$$

Полное решение $E(t,r,z)$ имеет вид

$$E(t,r,z) = E_0\, \mathrm{sh}^2 r\ \ \mathrm{ch}^B r\ e^{-i(\omega t - kz)}\ . \tag{7.3.7c}$$

Выделим вещественную и мнимую части в найденных решениях

$$B = -2 + i\omega, \qquad k = iB = -2i - \omega,$$

$$E(t,r,z) = E_0\, \mathrm{sh}^2 r\ \mathrm{ch}^{-2+i\omega} r e^{i(-2zi - \omega z - \omega t)} = E_0\, \mathrm{th}^2 r\ \mathrm{ch}^{i\omega} r e^{2z} e^{i(-\omega z - \omega t)} =$$
$$= E_0\, \mathrm{th}^2 r e^{2z} [\cos(\omega \ln \mathrm{ch} r) + i \sin(\omega \ln \mathrm{ch} r)] \times$$
$$\times [\cos(-\omega z - \omega t) + i \sin(-\omega z - \omega t)] =$$
$$= E_0\, \mathrm{th}^2 r\ e^{2z} \cos(\omega \ln \mathrm{ch}\ r - \omega z - \omega t) +$$
$$+ i E_0\, \mathrm{th}^2 r e^{2z} \sin(\omega \ln \mathrm{ch}\ r - \omega z - \omega t)\,; \tag{7.3.8a}$$

$$B = -2 + i\omega, \qquad k = -iB = 2i + \omega,$$

$$E(t,r,z) = E_0\ \mathrm{sh}^2 r\ \ \mathrm{ch}^{-2+i\,\omega} r\ e^{i(2zi + \omega z - \omega t)} = E_0\ \mathrm{th}^2 r\ \ \mathrm{ch}^{i\omega} r\ e^{-2z} e^{i(\omega z - \omega t)} =$$
$$= E_0\ \mathrm{th}^2 r\ e^{-2z}\ [\cos(\omega \ln \mathrm{ch}\ r) + i \sin(\omega \ln \mathrm{ch}\ r)] \times$$
$$\times [\cos(\omega z - \omega t) + i \sin(\omega z - \omega t)] =$$
$$= E_0\ \mathrm{th}^2 r\ e^{-2z} \cos(\omega \ln \mathrm{ch}\ r + \omega z - \omega t) +$$
$$+ i E_0\ \mathrm{th}^2 r\ e^{-2z} \sin(\omega \ln \mathrm{ch}\ r + \omega z - \omega t)\ ; \tag{7.3.8b}$$

$$B = -2 - i\omega, \qquad k = iB = -2i + \omega,$$

$$E(t,r,z) = E_0\, \mathrm{sh}^2 r\ \mathrm{ch}^{-2-i\omega} r e^{i(-2zi + \omega z - \omega t)} = E_0\, \mathrm{th}^2 r\ \mathrm{ch}^{-i\omega} r e^{2z} e^{i(\omega z - \omega t)} =$$
$$= E_0\, \mathrm{th}^2 r e^{2z}\ [\cos(-\omega \ln \mathrm{ch} r) + i \sin(-\omega \ln \mathrm{ch} r)] \times$$
$$\times [\cos(\omega z - \omega t) + i \sin(\omega z - \omega t)] =$$
$$= E_0\, \mathrm{th}^2 r e^{2z} \cos(-\omega \ln \mathrm{ch}\ r + \omega z - \omega t) +$$
$$+ i E_0\ \mathrm{th}^2 r e^{2z} \sin(-\omega \ln \mathrm{ch} r + \omega z - \omega t)\,; \tag{7.3.9a}$$

$$B = -2 - i\omega, \qquad k = -iB = 2i - \omega,$$

$$E(t,r,z) = E_0\, \mathrm{sh}^2 r\ \mathrm{ch}^{-2-i\omega} r e^{i(2zi - \omega z - \omega t)} = E_0\ \mathrm{th}^2 r\ \mathrm{ch}^{-i\omega} r e^{-2z} e^{i(-\omega z - \omega t)} =$$

$$= E_0 \,\mathrm{th}^2 r e^{-2z}[\cos(-\omega \ln \mathrm{ch}\, r) + i \sin(-\omega \ln \mathrm{ch}\, r)]\times$$
$$\times[\cos(-\omega z - \omega t) + i\sin(-\omega z - \omega t)] =$$
$$= E_0 \,\mathrm{th}^2 r e^{-2z} \cos(-\omega \ln \mathrm{ch}\, r - \omega z - \omega t)+$$
$$+ iE_0 \,\mathrm{th}^2 r e^{-2z} \sin(-\omega \ln \mathrm{ch} r - \omega z - \omega t). \qquad (7.3.9b)$$

Следует заметить, что физическая интерпретация последних найденных решений не ясна. Большей ясности можно достичь, если вернуться к уравнению

$$\frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{\mathrm{sh}\, r \mathrm{ch}\, r}\frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{k^2}{\mathrm{ch}^2 r})E = 0 \qquad (7.3.10a)$$

и попытаться найти все другие решения, используя подстановку

$$E = \mathrm{sh}^2 r \;\mathrm{ch}^B r \; F(r)\;. \qquad (7.3.10b)$$

Подставляя функцию E из (7.3.10b) в уравнение (7.3.10a) и переходя к переменной $x = \mathrm{ch}^2 r$, получим следующее дифференциальное уравнение для $F(r)$:

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + 4[1 - 3x + B(1-x)]\;\frac{d}{dx}+$$
$$+\left[-(2+5B) + \frac{2x}{1-x} + B(B-1)\frac{1-x}{x} - \frac{2}{1-x} + \frac{B}{x} + \frac{k^2}{x} - \omega^2\right] F = 0\;. \qquad (7.3.11a)$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится

$$[-2 - 5B + 2\frac{x-1+1}{1-x} + B(B-1)(\frac{1}{x} - 1) - \frac{2}{1-x} + \frac{B}{x} + \frac{k^2}{x} - \omega^2\;]\;F =$$

$$= [\;(-2 - 5B - 2 - B^2 + B - \omega^2) + \frac{1}{x}(B^2 - B + B + k^2) + \frac{1}{1-x}(2-2)\;]\;F\;,$$

если потребовать

$$k^2 + B^2 = 0\;. \qquad (7.3.11b)$$

В результате для функции F получаем уравнение

$$4x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + 4[(1+B) - (3+B)x]\;\frac{d}{dx} - [\;(B+2)^2 + \omega^2\;]\;F = 0\;, \qquad (7.3.11c)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\;F + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\;F' - \alpha\beta\;F = 0\;.$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 1 + B\;, \qquad \alpha + \beta = 2 + B\;, \qquad \alpha\beta = \frac{(B+2)^2 + \omega^2}{4}\;,$$

т. е.
$$B = \pm\, i\, k\,, \qquad \gamma = 1 + B\,,$$
$$\alpha = \frac{B + 2 - i\omega}{2}\,, \qquad \beta = \frac{B + 2 + i\omega}{2}\,. \qquad (7.3.12a)$$
Полное решение имеет вид
$$E(t, r, z) = \text{sh}^2 r\ \ \text{ch}^B r\ \ F(\alpha, \beta, \gamma, \text{ch}^2 r)\ e^{-i(\omega t - kz)}\,. \qquad (7.3.12b)$$

Очевидно, что построенные выше решения (7.3.7a)–(7.3.7c) могут быть получены из общих соотношений (7.3.12a), (7.3.12b), если в последних потребовать выполнения равенств: $\alpha = 0$ либо $\beta = 0$. Однако никаких физических оснований накладывать такие (полиномиальные) ограничения в случае пространства Лобачевского нет. Физическими решениями должны быть все волны, распространяющиеся вдоль оси z; это значит, что параметр k должен быть обязательно вещественным.

7.4 Анализ радиальных уравнений при $k = 0$

Возвратимся к системе уравнений для радиальных функций (7.2.4):
$$\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r}\Big) f_1 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\, f_2 + \frac{ik}{\text{ch}\, r}\, f_3 = 0\,,$$
$$-\omega f_1 - \frac{ik}{\text{ch}\, r}\, f_2 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\, f_3 = 0\,,$$
$$-\omega f_2 - \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r}\Big)\, f_3 + \frac{ik}{\text{ch}\, r} f_1 = 0\,,$$
$$-\omega f_3 + \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\Big)\, f_2 - \frac{im}{\text{sh}\, r} f_1 = 0 \qquad (7.4.1)$$
и рассмотрим частный случай $k = 0$; система уравнений при этом (также как и при $m = 0$) значительно упрощается:
$$\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r}\Big) f_1 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\, f_2 = 0\,,$$
$$-\omega f_1 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\, f_3 = 0\,,$$
$$-\omega f_2 - \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r}\Big)\, f_3 = 0\,,$$
$$-\omega f_3 + \Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh}\, r}\Big)\, f_2 - \frac{im}{\text{sh}\, r} f_1 = 0\,. \qquad (7.4.2)$$
Дальше получаем
$$\Big(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch}\, r}{\text{sh} r} + \frac{\text{sh}\, r}{\text{ch}\, r}\Big) f_1 + \frac{im}{\text{sh}\, r}\, f_2 = 0\,,$$

$$f_1 = \frac{im}{\omega \text{sh } r} \; f_3 \; ,$$
$$f_2 = -\frac{1}{\omega} (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}) \; f_3 \; ,$$
$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}) \; f_2 - \frac{im}{\text{sh } r} f_1 = 0 \; . \qquad (7.4.3)$$

Если вторым и третьим уравнениями воспользоваться в первом и четвертом, то придем к

$$(\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}) \frac{im}{\omega \text{sh } r} \; f_3 + \frac{im}{\text{sh } r} \; (-\frac{1}{\omega} (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}) \; f_3) = 0 \; ,$$
$$-\omega f_3 + (\frac{d}{dr} + \frac{\text{ch } r}{\text{sh } r}) \; (-\frac{1}{\omega} (\frac{d}{dr} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}) \; f_3) - \frac{im}{\text{sh } r} \frac{im}{\omega \text{sh } r} \; f_3 = 0 \; . \quad (7.4.4)$$

Легко убеждаемся, что после простых преобразований уравнения (7.4.4) сводятся соответственно к тождеству $0 \equiv 0$ и следующему уравнению:

$$\frac{d^2}{dr^2} \; f_3 + (\frac{\text{ch } r}{\text{sh } r} + \frac{\text{sh } r}{\text{ch } r}) \; \frac{d}{dr} \; f_3 + (\omega^2 + 1 + \frac{1}{\text{ch}^2 r} - \frac{m^2}{\text{sh}^2 r}) \; f_3 = 0 \; . \qquad (7.4.5)$$

Введем для функции f_3 подстановку

$$f_3(r) = \frac{1}{\text{ch } r} E(r) \; ; \qquad (7.4.6)$$

в результате уравнение (7.4.5) примет вид

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{\text{sh } r \; \text{ch } r} \; \frac{dE}{dr} + (\omega^2 - \frac{m^2}{\text{sh}^2 r}) E = 0 \; . \qquad (7.4.7)$$

Введем новую переменную

$$y = -\text{sh}^2 r \; , \qquad \text{ch}^2 r = 1 - y \; , \qquad \frac{d}{dr} = -2 \, \text{sh } r \; \text{ch } r \frac{d}{dy} \; ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = 4 \, \text{sh}^2 r \; \text{ch}^2 r \; \frac{d^2}{dy^2} - 2 (\text{sh}^2 r + \text{ch}^2 r) \frac{d}{dy} = -4y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} - 2(1-2y) \frac{d}{dr} \; ; \qquad (7.4.8)$$

уравнение (7.4.7) принимает вид

$$-4y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} \; E - 2(1-2y) \frac{d}{dy} \; E - 2 \frac{d}{dy} E + (\omega^2 + \frac{m^2}{y}) \; E = 0$$

или

$$-4y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} \; E - 4(1-y) \frac{d}{dy} \; E + (\omega^2 + \frac{m^2}{y}) \; E = 0 \; . \qquad (7.4.9)$$

Для E вводим подстановку

$$E = y^a(1-y)^b Y(y)\,,$$

$$E' = ay^{a-1}(1-y)^b Y(y) - by^a(1-y)^{b-1}Y(y) + y^a(1-y)^b\frac{dY(y)}{dy}\,,$$

$$E'' = a(a-1)y^{a-2}(1-y)^b Y(y) - aby^{a-1}(1-y)^{b-1}Y(y) + ay^{a-1}(1-y)^b\frac{dY(y)}{dy} -$$

$$-aby^{a-1}(1-y)^{b-1}Y(y) + b(b-1)y^a(1-y)^{b-2}Y(y) - by^a(1-y)^{b-1}\frac{dY(y)}{dy} +$$

$$+ay^{a-1}(1-y)^b\frac{dY(y)}{dy} - by^a(1-y)^{b-1}\frac{dY(y)}{dy} + y^a(1-y)^b\frac{d^2Y(y)}{dy^2}\,. \qquad (7.4.10)$$

Подставляя функцию E из (7.4.10) в уравнение (7.4.9), получим следующее дифференциальное уравнение для $Y(y)$:

$$4y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}Y + 4[1 + 2a - (2a + 2b + 1)y]\,\frac{d}{dy}Y +$$

$$+\left[-4(a+b)^2 - \omega^2 + (4a^2 - m^2)\frac{1}{y} + 4b(b-1)\frac{1}{1-y}\right]Y = 0\,. \qquad (7.4.11)$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$4a^2 - m^2 = 0\,, \qquad 4b(b-1) = 0, \qquad (7.4.12)$$

т. е.

$$m = \pm 2a\,, \qquad b = 1\,, \qquad b = 0\,. \qquad (7.4.13)$$

В результате для функции Y получаем уравнение

$$4y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}Y + 4[1 + 2a - (2a + 2b + 1)y]\,\frac{d}{dy}Y - \left[4(a+b)^2 + \omega^2\right]\,Y = 0\,, \qquad (7.4.14)$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\,Y + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\,Y' - \alpha\beta\,Y = 0\,.$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\gamma = 1 + 2a\,, \qquad \alpha + \beta = 2a + 2b\,, \qquad \alpha\beta = \frac{4(a+b)^2 + \omega^2}{4}\,,$$

т. е.

$$\alpha = a + b \mp \frac{i\omega}{2}\,, \qquad \beta = a + b \pm \frac{i\omega}{2}\,. \qquad (7.4.15)$$

7.5 Анализ уравнений для произвольных значений m, k

Возвратимся к анализу общего случая:

$$(\frac{\omega}{\text{ch } r}\ \frac{d}{dr} + \frac{km}{\text{sh } r\ \text{ch}^2 r})\ F_3 + (\frac{\omega^2}{\text{sh } r} - \frac{k^2}{\text{sh } r\ \text{ch}^2 r})\ F_2 = 0\ ,$$

$$(\frac{\omega}{\text{sh } r}\ \frac{d}{dr} - \frac{km}{\text{ch } r\ \text{sh}^2 r})\ F_2 - (\frac{\omega^2}{\text{ch } r} - \frac{m^2}{\text{ch } r\ \text{sh}^2 r})\ F_3 = 0\ . \qquad (7.5.1)$$

Введем новую переменную $x = \text{ch } 2r$:

$$\frac{d}{dr} = 2\ \text{sh } 2r \frac{d}{dx} = 4\ \text{sh } r\ \text{ch } r \frac{d}{dx}\ ,\ \ \text{ch}^2 r = \frac{x+1}{2}\ ,\ \text{sh}^2 r = \frac{x-1}{2}\ ,$$

$$\frac{\omega}{\text{ch } r}\frac{d}{dr} + \frac{km}{\text{sh } r\ \text{ch}^2 r} = 4\omega\ \text{sh } r(\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{4\ \text{sh}^2 r\ \text{ch}^2 r}) = 4\omega\ \text{sh } r(\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{x^2-1})\ ,$$

$$\frac{\omega}{\text{sh } r}\frac{d}{dr} - \frac{km}{\text{ch } r\ \text{sh}^2 r} = 4\omega\ \text{ch } r(\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{4\text{sh}^2 r\ \text{ch}^2 r}) = 4\omega\ \text{ch } r(\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{x^2-1})\ . \qquad (7.5.2)$$

Уравнения (7.5.1) примут вид

$$4\omega\ (\frac{d}{dx} + \frac{km/\omega}{x^2-1})\ F_3 + \frac{2}{x-1}\ (+\omega^2 - \frac{2k^2}{x+1})\ F_2 = 0\ ,$$

$$4\omega\ (\frac{d}{dx} - \frac{km/\omega}{x^2-1})\ F_2 - \frac{2}{x+1}\ (-\omega^2 + \frac{2m^2}{x-1})\ F_3 = 0\ . \qquad (7.5.3)$$

Сделаем еще одну простую замену переменных

$$x - 1 = 2y\ , \qquad x = 1 + 2y\ , \qquad 1 + x = 2(1+y)\ ;$$

в результате система (7.5.3) запишется так:

$$(2\omega\frac{d}{dy} - \frac{km}{y(1+y)})\ F_2 + (-\frac{\omega^2}{1+y} + \frac{m^2}{y(1+y)})\ F_3 = 0\ ,$$

$$(2\omega\frac{d}{dy} + \frac{km}{y(1+y)})\ F_3 + (+\frac{\omega^2}{y} - \frac{k^2}{y(1+y)})\ F_2 = 0\ . \qquad (7.5.4)$$

Совершим линейное преобразование (с единичным определителем: $\alpha N - \beta M = 1$ и не зависящими от координаты y элементами)

$$F_2 = \alpha\ G_2 + \beta\ G_3\ , \qquad F_3 = M\ G_2 + N\ G_3\ ; \qquad (7.5.5)$$

обратное преобразование имеет вид

$$G_2 = N\ F_2 - \beta\ F_3\ , \qquad G_3 = -M\ F_2 + \alpha\ F_3\ . \qquad (7.5.6)$$

Комбинируя уравнения системы (7.5.4), получаем

$$N\ (2\omega\frac{d}{dy}-\frac{km}{y(1+y)})\ F_2+N\ (-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})\ F_3-$$

$$-\beta\ (2\omega\frac{d}{dy}+\frac{km}{y(1+y)})\ F_3-\beta\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ F_2=0\ ,$$

$$-M\ (2\omega\frac{d}{dy}-\frac{km}{y(1+y)})\ F_2-M(-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})\ F_3+$$

$$+\alpha\ (2\omega\frac{d}{dy}+\frac{km}{y(1+y)})\ F_3+\alpha\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ F_2=0\ , \qquad (7.5.7)$$

откуда следуют уравнения

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_2-N\ \frac{km}{y(1+y)}\ F_2+N\ (-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})\ F_3-$$

$$-\beta\ \frac{km}{y(1+y)}\ F_3-\beta\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ F_2=0\ ,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_3+M\ \frac{km}{y(1+y)}\ F_2-M\ (-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})\ F_3+$$

$$+\alpha\ \frac{km}{y(1+y)}\ F_3+\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ F_2=0\ . \qquad (7.5.8)$$

Вместо $F_2,\ F_3$ подставляем их выражения через $G_2,\ G_3$ согласно (7.5.5):

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_2-N\ \frac{km}{y(1+y)}\ (\alpha G_2+\beta G_3)+N\ (-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})(MG_2+NG_3)-$$

$$-\beta\ \frac{km}{y(1+y)}(MG_2+NG_3)-\beta\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})(\alpha G_2+\beta G_3)=0\ ,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\ G_3+M\ \frac{km}{y(1+y)}(\alpha G_2+\beta G_3)-M\ (-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})(MG_2+NG_3)+$$

$$+\alpha\ \frac{km}{y(1+y)}(MG_2+NG_3)+\alpha(+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})(\alpha G_2+\beta G_3)=0\ .$$

Дальше после перегруппировки слагаемых получаем уравнения

$$2\omega\frac{dG_2}{dy}+\Big[-N\alpha\ \frac{km}{y(1+y)}+NM(-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})-$$

$$-\ \beta M\ \frac{km}{y(1+y)}-\beta\alpha\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ \Big]\ G_2+$$

$$+\left[-N\beta\ \frac{km}{y(1+y)}+N^2(-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})-\right.$$

$$\left.-\ \beta N\ \frac{km}{y(1+y)}-\beta^2\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ \right]\ G_3=0\ , \qquad (7.5.9)$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}+\left[M\beta\ \frac{km}{y(1+y)}-NM(-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})+\right.$$

$$\left.+\ \alpha N\ \frac{km}{y(1+y)}+\beta\alpha\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ \right]\ G_3+$$

$$+\left[M\alpha\ \frac{km}{y(1+y)}-M^2(-\frac{\omega^2}{1+y}+\frac{m^2}{y(1+y)})+\right.$$

$$\left.+\ \alpha M\ \frac{km}{y(1+y)}+\alpha^2\ (+\frac{\omega^2}{y}-\frac{k^2}{y(1+y)})\ \right]\ G_2=0\ . \qquad (7.5.10)$$

Полученные уравнения можно переписать иначе:

$$2\omega\frac{dG_2}{dy}+[-(N\alpha+\beta M)\frac{km}{y(1+y)}+$$

$$+NM\frac{-\omega^2 y+m^2}{y(1+y)}-\beta\alpha\frac{\omega^2(1+y)-k^2}{y(1+y)}]G_2+$$

$$+\left[-2N\beta\frac{km}{y(1+y)}+N^2\frac{-\omega^2 y+m^2}{y(1+y)}-\beta^2\frac{\omega^2(1+y)-k^2}{y(1-y)}\right]G_3=0\,, \quad (7.5.11)$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}+[(M\beta+\alpha N)\frac{km}{y(1+y)}-$$

$$-NM\frac{-\omega^2 y+m^2}{y(1+y)}+\beta\alpha\ \frac{\omega^2(1+y)-k^2}{y(1+y)}]G_3+$$

$$+\left[2M\alpha\frac{km}{y(1+y)}-M^2\frac{-\omega^2 y+m^2}{y(1+y)}+\alpha^2\frac{\omega^2(1+y)-k^2}{y(1+y)}\right]G_2=0\,. \quad (7.5.12)$$

В уравнениях (7.5.11), (7.5.12) выделим коэффициенты при функциях G_3 и G_2:

$$\left[-2N\beta\ \frac{km}{y(1+y)}+N^2\frac{-\omega^2 y+m^2}{y(1+y)}-\beta^2\ \frac{\omega^2(1+y)-k^2}{y(1-y)}\ \right]\ G_3=$$

$$=\frac{1}{y(1+y)}\ [\ -2km\ N\beta-\omega^2(N^2+\beta^2)\ y+N^2\ m^2+\beta^2\ k^2\ ]\ ,$$

$$\left[2M\alpha\, \frac{km}{y(1+y)} - M^2\, \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1+y)} + \alpha^2\, \frac{\omega^2(1+y) - k^2}{y(1+y)} \right]\, G_2 =$$
$$= \frac{1}{y(1+y)}\, \left[\, 2km\, M\alpha + \omega^2(M^2+\alpha^2)\, y - M^2\, m^2 - \alpha^2\, k^2 \,\right] .$$

Понятно, что лишние особенности устраняются только если выполнены два условия

$$N^2 + \beta^2 = 0\,, \qquad M^2 + \alpha^2 = 0\,. \tag{7.5.13}$$

Будем предполагать, что используемое преобразование унитарно:

$$\alpha\, G_2 + \beta\, G_3 = \cos A\, G_2 + i \sin A\, G_3\,,$$
$$M\, G_2 + N\, G_3 = i \sin A\, G_2 + \cos A\, G_3\,, \tag{7.5.14}$$

тогда выполняются тождества

$$N\alpha + \beta M = \cos 2A\,, \qquad 2N\beta = i\, \sin 2A\,, \qquad 2M\alpha = i\, \sin 2A\,,$$
$$\alpha\beta = i\, \sin A \cos A = \frac{i}{2} \sin 2A\,, \qquad NM = i\, \sin A \cos A = \frac{i}{2} \sin 2A\,,$$
$$N^2 = \cos^2 A\,, \qquad \beta^2 = -\sin^2 A\,, \qquad M^2 = -\sin^2 A\,, \qquad \alpha^2 = \cos^2 A\,.$$

С учетом их уравнения (7.5.11) и (7.5.12) запишутся так:

$$2\omega \frac{dG_2}{dy} + \left[-\cos 2A \frac{km}{y(1+y)} + \frac{i}{2} \sin 2A \frac{-\omega^2 y + m^2 - \omega^2(1+y) + k^2}{y(1+y)} \right] G_2 +$$

$$+ \left[-i \sin 2A \frac{km}{y(1+y)} + \cos^2 A \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1+y)} + \sin^2 A \frac{\omega^2(1+y) - k^2}{y(1+y)} \right] G_3 = 0\,,$$

$$2\omega \frac{dG_3}{dy} + \left[\cos 2A \frac{km}{y(1+y)} - \frac{i}{2} \sin 2A \frac{-\omega^2 y + m^2 - \omega^2(1+y) + k^2}{y(1+y)} \right] G_3 +$$

$$+ \left[i \sin 2A \frac{km}{y(1+y)} + \sin^2 A \frac{-\omega^2 y + m^2}{y(1+y)} + \cos^2 A \frac{\omega^2(1+y) - k^2}{y(1+y)} \right] G_2 = 0\,.$$

Требуем выполнения равенств (они согласуются с (7.5.13))

$$A = \pi/4\,, \qquad \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{1}{2}\,, \qquad \sin 2A = 1\,, \qquad \cos 2A = 0\,; \tag{7.5.15}$$

тогда система уравнений значительно упростится:

$$2\omega \frac{dG_2}{dy} + i \frac{-\omega^2 y + m^2 - \omega^2(1+y) + k^2}{2y(1+y)}\, G_2 +$$

$$+\frac{-2ikm-\omega^2 y+m^2+\omega^2(1+y)-k^2}{2y(1+y)}\,G_3=0\,,$$

$$2\omega\frac{dG_3}{dy}-i\frac{-\omega^2 y+m^2-\omega^2(1+y)+k^2}{2y(1+y)}\,G_3+$$

$$+\frac{2ikm-\omega^2 y+m^2+\omega^2(1+y)-k^2}{2y(1+y)}\,G_2=0\,,$$

в результате приходим к системе уравнений

$$\left(2\omega\frac{d}{dy}-i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{2y(1+y)}\right)\,G_2+\frac{\omega^2+(m-ik)^2}{2y(1+y)}\,G_3=0\,,$$

$$\left(2\omega\frac{d}{dy}+i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{2y(1+y)}\right)\,G_3+\frac{\omega^2+(m+ik)^2}{2y(1+y)}\,G_2=0\,. \tag{7.5.16}$$

Из системы (7.5.16) получим уравнение второго порядка для G_2:

$$G_3=-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m-ik)^2}\frac{dG_2}{dy}+i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m-ik)^2}G_2\,,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\,\left(-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m-ik)^2}\frac{dG_2}{dy}+i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m-ik)^2}G_2\right)+$$

$$+i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{2y(1+y)}\,(-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m-ik)^2}\frac{dG_2}{dy}+$$

$$+i\frac{\omega^2 y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m-ik)^2}G_2)+\frac{\omega^2+(m+ik)^2}{2y(1+y)}\,G_2=0 \tag{7.5.17}$$

или

$$4y(1+y)\frac{d^2G_2}{dy^2}+4(1+2y)\frac{dG_2}{dy}+\left(-2i\omega+\omega^2-\frac{m^2}{y(1+y)}-\frac{m^2+k^2}{1+y}\right)\,G_2=0\,. \tag{7.5.18}$$

В уравнении (7.5.18) произведем замену переменной y на $-y$:

$$4y(1-y)\frac{d^2G_2}{dy^2}+4(1-2y)\frac{dG_2}{dy}-\left(-2i\omega+\omega^2+\frac{m^2}{y(1-y)}-\frac{m^2+k^2}{1-y}\right)\,G_2=0\,. \tag{7.5.19}$$

В уравнении (7.5.19) сделаем подстановку

$$G_2=y^A(1-y)^B G(y)\,; \tag{7.5.20}$$

получим следующее дифференциальное уравнение для $G(y)$:

$$4y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2} + 4[1+2A-(2A+2B+1+1)y]\,\frac{dG}{dy} -$$
$$-\left[-\omega(2i-\omega)+4(A+B)(A+B+1)-\frac{4A^2-m^2}{y}-\frac{4B^2+k^2}{1-y}\right]G=0\ . \tag{7.5.21}$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$4A^2-m^2=0\ ,\qquad 4B^2+k^2=0\ ,$$

т. е.

$$m=\pm 2A\ ,\qquad k=\pm 2iB\ . \tag{7.5.22}$$

В результате для функции $G(y)$ получаем уравнение

$$4y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2} + 4[1+2A-(2A+2B+1+1)y]\,\frac{dG}{dy} -$$
$$-\left[-\omega(2i-\omega)+4(A+B)(A+B+1)\right]G=0\ , \tag{7.5.23}$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\,G''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\,G'-\alpha\beta\,G=0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha=A+B+1+\frac{i\omega}{2}\ ,\qquad \beta=A+B-\frac{i\omega}{2}. \tag{7.5.24}$$

Аналогично из системы уравнений (7.5.16) можно получить уравнение второго порядка для G_3:

$$G_2=-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m+ik)^2}\frac{dG_3}{dy}-i\frac{\omega^2y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m+ik)^2}G_3\ ,$$

$$2\omega\frac{d}{dy}\left(-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m+ik)^2}\frac{dG_3}{dy}-i\frac{\omega^2y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m+ik)^2}G_3\right)-$$
$$-i\frac{\omega^2y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{2y(1+y)}\ (-2\omega\frac{2y(1+y)}{\omega^2+(m+ik)^2}\frac{dG_3}{dy}-$$
$$-i\frac{\omega^2y+\omega^2(1+y)-m^2-k^2}{\omega^2+(m+ik)^2}G_3)+\frac{\omega^2+(m-ik)^2}{2y(1+y)}\ G_3=0$$

или

$$4y(1+y)\frac{d^2G_3}{dy^2}+4(1+2y)\frac{dG_3}{dy}+\left(2i\omega+\omega^2-\frac{m^2}{y(1+y)}-\frac{m^2+k^2}{1+y}\right)\ G_3=0\ . \tag{7.5.25}$$

В уравнении (7.5.25) произведем замену переменной y на $-y$:

$$4y(1-y)\frac{d^2G_3}{dy^2}+4(1-2y)\frac{dG_3}{dy}-\left(2i\omega+\omega^2+\frac{m^2}{y(1-y)}-\frac{m^2+k^2}{1-y}\right)\ G_3=0\ . \tag{7.5.26}$$

В уравнении (7.5.26) сделаем подстановку

$$G_3=y^A(1-y)^BG(y)\ ; \tag{7.5.27}$$

получим следующее дифференциальное уравнение для $G(y)$:

$$4y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2}+4[1+2A-(2A+2B+1+1)y]\ \frac{dG}{dy}-$$

$$-\left[\omega(2i+\omega)+4(A+B)(A+B+1)-\frac{4A^2-m^2}{y}-\frac{4B^2+k^2}{1-y}\right]G=0\ . \tag{7.5.28}$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать

$$4A^2-m^2=0\ , \qquad 4B^2+k^2=0,$$

т. е.

$$m=\pm 2A\ , \qquad k=\pm 2iB\ . \tag{7.5.29}$$

В результате для функции $G(y)$ получаем уравнение

$$4y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2}+4[1+2A-(2A+2B+1+1)y]\ \frac{dG}{dy}-$$

$$-\left[\omega(2i+\omega)+4(A+B)(A+B+1)\right]G=0\ , \tag{7.5.30}$$

что является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)\ G''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\ G'-\alpha\beta\ G=0\ .$$

Параметры гипергеометрической функции определяются соотношениями

$$\alpha=A+B+1-\frac{i\omega}{2}\ , \qquad \beta=A+B+\frac{i\omega}{2}\,. \tag{7.5.31}$$

Найдем относительный множитель для двух функций G_2 и G_3. Исходя из

$$G_2=M_2\ y^{|m|/2}\ (1-y)^{|k|/2i}\ F(-n,\ n+1+\mid m\mid+\frac{\mid k\mid}{i},\ \mid m\mid+1;\ y)=$$

$$=M_2\ y^{(c-1)/2}(1-y)^{(a+b-c)/2}F(a,b,c,y) \tag{7.5.32}$$

и

$$G_3=M_3\ y^{|m|/2i}\ (1-y)^{|k|/2i}\ F(-n+1,\ n+\mid m\mid+\frac{\mid k\mid}{i},\ \mid m\mid+1;\ y)=$$

$$= M_3\, y^{(c-1)/2}(1-y)^{(a+b-c)/2} F(a+1, b-1, c, y)\ , \tag{7.5.33}$$

и учитывая уравнение связи

$$G_3\ [(m-ik)^2+\omega^2] = -4\omega\ y(1-y)\ \frac{dG_2}{dy} + i[-m^2-k^2+\omega^2(1-2y)]\ G_2\ , \tag{7.5.34}$$

приходим к равенству

$$(m - ik - i\omega)\ (m - ik + i\omega)\ \frac{M_3}{M_2}\ F_3(y) =$$

$$= -4\omega\ [\ \frac{\mid m \mid}{2}\ (1-y)\ F_2(y) - \frac{\mid k \mid}{2i}\ y\ \ F_2(y) +$$

$$+ y(1-y)\ \frac{d}{dy}\ F_2(y)\ ] + i[-m^2-k^2+\omega^2(1-2y)]\ F_2(y)\ . \tag{7.5.35}$$

Достаточно рассмотреть это равенство в точке $y = 0$, что приводит к

$$(m - ik - i\omega)\ (m - ik + i\omega)\ \frac{M_3}{M_2} = -2\omega\ \mid m \mid - im^2 - ik^2 + i\omega^2$$

или

$$i(-i\omega + m - ik)\ (i\omega + m - ik)\ \ \frac{M_3}{M_2} = (-i\omega + \mid m \mid -ik)\ (i\omega + \mid m \mid + ik)\ ,$$

т. е.

$$M_2 = iM\ (-i\omega + m - ik)(i\omega + m - ik)\ ,$$
$$M_3 = M\ (-i\omega + \mid m \mid -ik)(i\omega + \mid m \mid + ik)\ . \tag{7.5.36}$$

Это соотношение можно представить проще:

$$m > 0\ , \qquad M_2 = iM(i\omega - ik + m)\ , \qquad M_3 = M(i\omega + ik + m)\ ;$$

$$m < 0\ , \qquad M_2 = iM(i\omega - ik + m)\ , \qquad M_3 = M(i\omega + ik + m)\ ;$$

$$m = 0\ , \qquad M_2 = M(k - \omega)\ , \qquad M_3 = iM(k + \omega)\ .$$

Глава 8

РЕШЕНИЯ ТИПА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

На основе метода разделения переменных построены все точные решения типа обобщенных плоских волн для уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в гиперболическом трехмерном пространстве Лобачевского. Электродинамические уравнения используются в комплексной форме Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера, обобщенной на случай риманова пространства в рамках тетрадного рецепта Тетроде–Вейля–Фока–Иваненко. Влияние кривизны пространства сводится к появлению явной зависимости амплитуд решений от координаты z, выраженных через линейные комбинации из функций Бесселя.

8.1 Квазидекартовые орисферические координаты

В работе Олевского [180] под номером II приведена следующая система координат:

$$u_1 = xe^{-z} , \qquad u_2 = ye^{-z} ,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}[(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}] ,$$

$$u_0 = \frac{1}{2}[(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}] . \tag{8.1.1}$$

Проверим условие нормировки на четыре координаты: $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$. Для этого найдем

$$u_1^2 = x^2e^{-2z} , \qquad u_2^2 = y^2e^{-2z} ,$$

$$u_3^2 = \frac{1}{4}[(e^z - e^{-z})^2 + 2(1 - e^{-2z})(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2e^{-2z}] =$$

$$= \frac{1}{4}[e^{2z} - 2 + e^{-2z} + 2x^2 + 2y^2 - 2x^2e^{-2z} - 2y^2e^{-2z} + (x^2 + y^2)^2e^{-2z}]$$

и

$$u_0^2 = \frac{1}{4} \; [(e^z + e^{-z})^2 + 2(1 + e^{-2z})(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2e^{-2z}] =$$

$$= \frac{1}{4}[e^{2z} + 2 + e^{-2z} + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2e^{-2z} + 2y^2e^{-2z} + (x^2 + y^2)^2e^{-2z}] ,$$

тогда

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \frac{1}{4} \; (4 + 4x^2e^{-2z} + 4y^2e^{-2z}) - x^2e^{-2z} - y^2e^{-2z} = 1 .$$

Метрика в координатах (8.1.1) имеет вид:

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2 \ . \tag{8.1.2}$$

Отметим, что система квазидекартовых координат (x, y, z) в пространстве Лобачевского тесно связана с орисферическими координатами в пространстве Лобачевского:

$$x = r\cos\phi \ , \qquad y = r\sin\phi \ ,$$
$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dr^2 + r^2 d\phi^2) - dz^2 \ . \tag{8.1.3}$$

8.2 Простейшее решение уравнений Максвелла, плоская волна

В этом разделе рассмотрим вопрос о некоторых частных решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского в данной системе координат. Будем искать решения типа плоских волн. Уравнения Максвелла в произвольном римановом пространстве могут быть записаны в виде [5] (предполагаем отсутствие источников):

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\beta \sqrt{-g}\ F^{\beta\alpha} = 0 \ , \tag{8.2.1}$$

где $g(x) = \det\ [g_{\alpha\beta}(x)]\ < 0$. Уравнения (8.2.1) принимают в координатах (8.1.1) следующий явный вид:

$$\begin{gathered}
\partial_1\ F_{23} + \partial_2\ F_{31} + \partial_3\ F_{12} = 0 \ , \\
\partial_0\ F_{12} + \partial_1\ F_{20} + \partial_2\ F_{01} = 0 \ , \\
\partial_0\ F_{23} + \partial_2\ F_{30} + \partial_3\ F_{02} = 0 \ , \\
\partial_0\ F_{31} + \partial_3\ F_{10} + \partial_1\ F_{03} = 0 \ , \\
\partial_x F^{10} + \partial_y F^{20} + e^{2z}\partial_z e^{-2z} F^{30} = 0 \ , \\
\partial_0\ F^{01} - \partial_y F^{12} + e^{2z}\partial_z e^{-2z} F^{31} = 0 \ , \\
\partial_0 F^{02} + \partial_x F^{12} - e^{2z}\partial_z e^{-2z} F^{23} = 0 \ , \\
\partial_0 F^{03} - \partial_x F^{31} + \partial_y F^{23} = 0 \ .
\end{gathered} \tag{8.2.2}$$

Дальше ограничиваем себя поиском решений вида

$$F_{01}(y, z) \neq 0 \ , \qquad F_{31}(y, z) \neq 0 \ .$$

Это поперечная электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении оси z:

$$\partial_y F_{31} + \partial_z F_{12} = 0 \ , \ \partial_0 F_{12} + \partial_y F_{01} = 0 \ ,$$

$$F_{23} = 0 \; , \; \partial_0 F_{31} + \partial_z F_{10} = 0 \; ,$$

$$0 = 0 \; , \; \partial_0 F^{01} - \partial_y F^{12} + e^{2z} \partial_z e^{-2z} F^{31} = 0 \; , \; 0 = 0 \; , \; 0 = 0 \; . \qquad (8.2.3)$$

Обращаем внимание, что в (8.2.3) первое уравнение является следствием второго и четвертого уравнений. Таким образом, имеем систему из трех независимых уравнений

$$\partial_0 \; F_{12} = -\partial_y \; F_{01} \; , \qquad \partial_0 \; F_{31} = \partial_z \; F_{01} \; ,$$

$$\partial_0^2 g^{11} \; F_{01} - \partial_y \; g^{11} g^{22} \; \partial_0 F_{12} + e^{2z} \partial_z e^{-2z} g^{11} g^{33} \partial_0 F_{31} = 0 \; ; \qquad (8.2.4)$$

чтобы иметь возможность воспользоваться первыми двумя уравнениями, третье уравнение продифференцируем по x_0. С учетом

$$g^{11} = -e^{2z} \; , \qquad g^{22} = -e^{2z} \; , \qquad g^{33} = -1$$

уравнение для F_{01} имеет следующий явный вид:

$$-\partial_0^2 \; F_{01} + e^{2z} \; \partial_y^2 \; F_{01} + \partial_z^2 \; F_{01} = 0 \; . \qquad (8.2.5)$$

Можно легко построить простое решение уравнения (8.2.5). Это решение в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси z с независящей от координат амплитудой (используются безразмерные величины $\omega\rho/c \implies \omega$, $\omega\rho/c \implies k = \pm\omega$):

$$F_{01}(t, z) = E \cos(\omega t - kz) \; ,$$

$$F_{31} = -E \frac{k}{\omega} \sin(\omega t - kz) \; , \; F_{12} = 0 \; . \qquad (8.2.6)$$

В следующем разделе перейдем к систематическому анализу вопроса о всех решениях уравнений Максвелла, строящихся в квазидекартовых координатах в рамках общего метода разделения переменных. За основу выберем тетрадное обобщение комплексной формы уравнений Максвелла Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера.

8.3 Тетрады и уравнения Максвела в комплексной форме

В пространстве-времени Лобачевского будем использовать квазидекартовые орисферические координаты и соответствующую тетраду:

$$x^a = (t, x, y, z) \; , \qquad dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2 \; ,$$

$$e^{\beta}_{(a)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; , \qquad e_{(a)\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; . \qquad (8.3.1)$$

Следует вычислить сначала символы Кристоффеля. Для метрики вида

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{jk}(x^1, x^2, x^3)\, dx^j dx^k$$

часть символов Кристоффеля обращается в ноль:

$$\Gamma^0_{\beta\sigma} = 0\ , \qquad \Gamma^i_{00} = 0\ , \qquad \Gamma^i_{0j} = 0\ ,$$

остальные определяются соотношением

$$x^i = (x, y, z)\ , \qquad \Gamma^i{}_{jk} = g^{il}\ \Gamma_{l,jk} = \frac{1}{2}\ g^{il}\ (-\partial_l\ g_{jk} + \partial_j\ g_{lk} + \partial_k\ g_{lj})\ ,$$

$$\Gamma^x{}_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},\ \Gamma^y{}_{jk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},\ \Gamma^z{}_{jk} = \begin{vmatrix} e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8.3.2}$$

Вычисляем ковариантные производные от тетрадных векторов:

$$A_{\beta;\alpha} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A_\sigma \Longrightarrow$$

$$e_{(0)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} e_{(0)\sigma} = \frac{\partial e_{(0)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\ e_{(0)0} = 0\ ,$$

$$e_{(1)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(1)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^x_{\alpha\beta}\ e_{(1)x} = \frac{\partial e_{(1)\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^x_{\alpha\beta}\ e^{-z} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-z} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$e_{(2)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(2)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^y_{\alpha\beta}\ e_{(2)y} = \frac{\partial e_{(2)\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^y_{\alpha\beta} e^{-z} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-z} \\ 0 & 0 & -e^{-z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-z} & 0 \end{vmatrix},$$

$$e_{(3)\beta;\alpha} = \frac{\partial e_{(3)\beta}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^z_{\alpha\beta}\ e_{(3)z} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 & \\ 0 & 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8.3.3}$$

Теперь предстоит вычислить коэффициенты вращения Риччи исходя из соотношения (учитываем диагональность тетрадной матрицы)

$$\gamma_{abc} = e_{(a)}^{\ \beta}\ e_{(b)\beta;\alpha}\ e^\alpha_{(c)}\ ;$$

получаем

$$\gamma_{ab0} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;t}\, e^{t}_{(0)} = 0 \; , \qquad \gamma_{ab1} = e_{(a)}^{\ a}\, e_{(b)a;x}\, e^{x}_{(1)} \; ,$$

$$\gamma_{ab2} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;y}\, e^{y}_{(2)} \; , \qquad \gamma_{ab3} = e_{(a)}^{\ \beta}\, e_{(b)\beta;z}\, e^{z}_{(3)} \; .$$

Очевидно, что заведомо обращаются в ноль следующие коэффициенты Риччи

$$\gamma_{011} = \gamma_{021} = \gamma_{031} = 0 \; , \; \gamma_{012} = \gamma_{022} = \gamma_{032} = 0 \; , \; \gamma_{013} = \gamma_{023} = \gamma_{033} = 0 \; ,$$

остальные девять равны

$$\gamma_{231} = e^{y}_{(2)} e_{(3)y;x} e^{x}_{(1)} = 0 \; , \; \gamma_{311} = e^{z}_{(3)} e_{(1)z;x} e^{x}_{(1)} = -1 \; , \; \gamma_{121} = e^{x}_{(1)} e_{(2)x;x} e^{x}_{(1)} = 0 \; ,$$

$$\gamma_{232} = e_{(2)}^{\ y} e_{(3)y;y} e^{y}_{(2)} = 1 \; , \; \gamma_{312} = e_{(3)}^{\ z} e_{(1)z;y}\, e^{y}_{(2)} = 0 \; , \; \gamma_{122} = e_{(1)}^{\ x} e_{(2)x;y} e^{y}_{(2)} = 0 \; ,$$

$$\gamma_{233} = e_{(2)}^{\ y} e_{(3)y;z} e^{z}_{(3)} = 0 \; , \; \gamma_{313} = e_{(3)}^{\ z}\, e_{(1)z;z}\, e^{z}_{(3)} = 0 \; , \; \gamma_{123} = e_{(1)}^{\ x} e_{(2)x;z} e^{z}_{(3)} = 0 \; . \tag{8.3.4}$$

Используя обозначения

$$e^{\rho}_{(0)} \partial_{\rho} = \partial_{(0)} = \partial_t \; , \qquad e^{\rho}_{(1)} \partial_{\rho} = \partial_{(1)} = e^{z} \partial_x \; ,$$

$$e^{\rho}_{(2)} \partial_{\rho} = \partial_{(2)} = e^{z} \partial_y \; , \qquad e^{\rho}_{(3)} \partial_{\rho} = \partial_{(3)} = \partial_z \; ,$$

$$\mathbf{v}_0 = (\gamma_{010}, \gamma_{020}, \gamma_{030}) \equiv 0 \; , \qquad \mathbf{v}_1 = (\gamma_{011}, \gamma_{021}, \gamma_{031}) \equiv 0 \; ,$$

$$\mathbf{v}_2 = (\gamma_{0120}, \gamma_{022}, \gamma_{032}) \equiv 0 \; , \qquad \mathbf{v}_3 = (\gamma_{013}, \gamma_{02\,3}, \gamma_{033}) \equiv 0 \; ,$$

$$\mathbf{p}_0 = (\gamma_{230}, \gamma_{310}, \gamma_{120}) = 0 \; , \qquad \mathbf{p}_1 = (\gamma_{231}, \gamma_{311}, \gamma_{121}) = (0, -1, 0) \; ,$$

$$\mathbf{p}_2 = (\gamma_{232}, \gamma_{312}, \gamma_{122}) = (1, 0, 0) \; , \qquad \mathbf{p}_3 = (\gamma_{233}, \gamma_{313}, \gamma_{123}) = 0 \; , \tag{8.3.5}$$

матричное тетрадное уравнение Максвелла

$$(\; \alpha^{k}\; \partial_{(k)} + \mathbf{s}\mathbf{v}_0 + \alpha^{k}\; \mathbf{s}\mathbf{p}_k \;) \; \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{array} \right| -$$

$$-i \; (\; \partial_{(0)} + \mathbf{s}\mathbf{p}_0 - \alpha^{k} \mathbf{s}\mathbf{v}_k) \; \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{array} \right| = 0 \tag{8.3.6}$$

приводим к следующему явному виду:

$$\Big(\; -i\partial_t + \alpha^1\; e^{z}\; \partial_x + \alpha^2\; e^{z}\; \partial_y + \alpha^3\; \partial_z - \alpha^1\; S_2 \; + \alpha^2\; S_1 \; \Big) \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{array} \right| = 0 \; . \tag{8.3.7}$$

8.4 Разделение переменных в уравнениях Максвелла

Будем использовать подстановку

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} = e^{-i\omega t}\, e^{ik_1 x}\, e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(z) \end{vmatrix} . \qquad (8.4.1)$$

При этом уравнение (8.3.7) дает

$$\Big(-\omega + \alpha^1\, e^z\, ik_1 + \alpha^2\, e^z\, ik_2 + \alpha^3\, \frac{d}{dz} - \alpha^1\, S_2\, + \alpha^2\, S_1 \Big) \begin{vmatrix} 0 \\ f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (8.4.2)$$

Напоминаем, что входящие сюда матрицы задаются равенствами

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \; \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \; \alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

$$S^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} , \; S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \; S^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \qquad (8.4.3)$$

После простых вычислений находим систему уравнений для радиальных функций:

$$ik_1\, e^z f_1 + ik_2\, e^z\, f_2 + (\frac{d}{dz} - 2) f_3 = 0 ,$$

$$-\omega f_1 - (\frac{d}{dz} - 1) f_2 + ik_2\, e^z\, f_3 = 0 ,$$

$$-\omega f_2 + (\frac{d}{dz} - 1) f_1 - ik_1\, e^z\, f_3 = 0 ,$$

$$-\omega f_3 - e^z\, ik_2 f_1 + ik_1\, e^z\, f_2 = 0 . \qquad (8.4.4)$$

Три последних уравнения можно переписать как

$$\omega f_1 = -(\frac{d}{dz} - 1) f_2 + ik_2\, e^z\, f_3 ,$$

$$\omega f_2 = +(\frac{d}{dz} - 1) f_1 - ik_1\, e^z\, f_3 ,$$

$$\omega f_3 = -ik_2\, e^z\, f_1 + ik_1\, e^z\, f_2 ; \qquad (8.4.5)$$

подставляя их в первое уравнение (8.4.4), получим

$$ik_1\, e^z [-(\frac{d}{dz} - 1) f_2 + ik_2\, e^z\, f_3] + ik_2\, e^z\, [+(\frac{d}{dz} - 1) f_1 - ik_1\, e^z\, f_3] +$$

$$+(\frac{d}{dz}-2)[-ik_2\ e^z\ f_1+ik_1\ e^z\ f_2]=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$(\ -ik_1e^zf_2'+ik_1e^zf_2-k_1k_2e^{2z}f_3\ )\ +\ (\ ik_2e^zf_1'-ik_2e^zf_1+k_1k_2e^{2z}f_3\ )+$$
$$+(\ -ik_2e^zf_1-ik_2e^zf_1'+ik_1e^zf_2+ik_1e^zf_2'+2ik_2e^zf_1-2ik_1e^zf_2\ )=0\ ,$$

т. е. пришли к тождеству $0=0$.

Таким образом, уравнения (8.4.5) – это все независимые уравнения. Перепишем их так (введем обозначения $k_1=a, k_2=b$):

$$\omega f_1=-(\frac{d}{dz}-1)f_2+ib\ e^z\ f_3\ ,$$
$$\omega f_2=+(\frac{d}{dz}-1)f_1-ia\ e^z\ f_3\ ,$$
$$\omega f_3=-ib\ e^z\ f_1+ia\ e^z\ f_2\ . \qquad (8.4.6)$$

Вместо $f_1(z), f_2(z)$ введем функции

$$f_1=e^zF_1(z)\ , \qquad f_2=e^zF_2(z)\ , \qquad (8.4.7)$$

уравнения (8.4.6) примут вид

$$\omega F_1=-\frac{d}{dz}F_2+ib\ f_3\ ,$$
$$\omega F_2=+\frac{d}{dz}F_1-ia\ f_3\ ,$$
$$\omega f_3=-ib\ e^{2z}\ F_1+ia\ e^{2z}\ F_2\ . \qquad (8.4.8)$$

Легко решается простой случай, когда

$$a=0,\ \ b=0\ , \qquad f_3=0\ ,$$
$$\omega F_1=-\frac{d}{dz}F_2\ , \qquad \omega F_2=+\frac{d}{dz}F_1 \qquad \Longrightarrow$$
$$(\frac{d^2}{dz^2}+\omega^2)F_1=0\ , \qquad F_1(z)=e^{\pm i\omega z}\ ,\ \ F_2=\pm i\ e^{\pm i\omega z}\ . \qquad (8.4.9)$$

Вернемся к общему случаю (8.4.8); воспользовавшись третьим уравнением, получим систему уравнений первого порядка для F_1, F_2:

$$f_3=\frac{-ib\ e^{2z}\ F_1}{\omega}+\frac{ia\ e^{2z}\ F_2}{\omega}\ ,$$

$$\omega F_1=-\frac{d}{dz}F_2+ib\ (\frac{-ib\ e^{2z}\ F_1}{\omega}+\frac{ia\ e^{2z}\ F_2}{\omega})\ ,$$
$$\omega F_2=+\frac{d}{dz}F_1-ia\ (\frac{-ib\ e^{2z}\ F_1}{\omega}+\frac{ia\ e^{2z}\ F_2}{\omega})$$

или

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dz} + \frac{ab\, e^{2z}}{\omega})\ F_2 &= \frac{b^2 e^{2z} - \omega^2}{\omega}\ F_1\ , \\
(\frac{d}{dz} - \frac{ab\, e^{2z}}{\omega})\ F_1 &= \frac{\omega^2 - a^2 e^{2z}}{\omega}\ F_2\ .
\end{aligned} \qquad (8.4.10)
$$

Введем новую переменную (параметр γ пока произвольный)

$$
e^z = \gamma\ Z\ , \qquad \frac{d}{dz} = Z\ \frac{d}{dZ}\ ;
$$

уравнения переписываются как

$$
\begin{aligned}
Z\ (\frac{d}{dZ} + \frac{ab\, \gamma^2}{\omega} Z)\ F_2 &= + \frac{b^2\gamma^2 Z^2 - \omega^2}{\omega}\ F_1\ , \\
Z\ (\frac{d}{dz} - \frac{ab\, \gamma^2}{\omega} Z)\ F_1 &= - \frac{a^2\gamma^2 Z^2 - \omega^2}{\omega}\ F_2\ .
\end{aligned} \qquad (8.4.11)
$$

Рассмотрим сначала два простых частных случая.

$$
(1) \qquad b = 0\, , \qquad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\, ,
$$

$$
Z\ \frac{dF_2}{dZ} = -\omega\ F_1\ , \qquad Z\ \frac{dF_1}{dZ} = -\omega (Z^2 - 1)\ F_2\ . \qquad (8.4.12)
$$

Из этой системы получим:

$$
Z\ \frac{d}{dZ} Z \frac{d}{dZ}\ F_2\ = \omega^2 (Z^2 - 1)\ F_2\ , \qquad F_1 = -\frac{1}{\omega}\ Z \frac{d}{dZ}\ F_2\ , \qquad (8.4.13a)
$$

либо (эквивалентный вариант)

$$
Z\ \frac{d}{dZ} \frac{Z}{(Z^2 - 1)} \frac{d}{dZ})\ F_1 = \omega^2\ F_1\ , \qquad F_2 = -\frac{1}{\omega}\ \frac{Z}{(Z^2 - 1)} \frac{d}{dZ}\ F_1 . \qquad (8.4.13b)
$$

Для определенности рассмотрим дальше уравнения (8.4.13a); здесь задача легко сводится к функциям Бесселя:

$$
Z^2 \frac{d^2}{dZ^2}\ F_2 + Z \frac{d}{dZ}\ F_2 + \omega^2 (1 - Z^2) F_2 = 0\ ,
$$

$$
i\omega Z = x\ , \qquad \frac{d^2}{dx^2}\ F_2 + \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ F_2 + (1 + \frac{\omega^2}{x^2})\ F_2 = 0\ , \qquad (8.4.14)
$$

$$
F_2(Z) = \alpha\ J_{+i\omega}(x) + \beta\ J_{+i\omega}(x)\ , \qquad x = i\omega Z = i\ \sqrt{\omega \mid a \mid}\ e^z\ .
$$

Рассмотрим второй (симметричный) вариант. Пусть

$$
(2) \qquad a = 0\ , \qquad \gamma^2 = \omega^2 / b^2\ ,
$$

$$
Z\ \frac{dF_2}{dZ}\ = \omega (Z^2 - 1)\ F_1\ , \qquad Z\ \frac{dF_1}{dZ} = \omega\ F_2\ .
$$

Отсюда следуют уравнения:

$$Z \,\frac{d}{dZ}(\frac{Z}{(Z^2-1)}\frac{d}{dZ})\; F_2 = \omega^2 \; F_2 \;, \qquad F_1 = \frac{Z}{\omega(Z^2-1)}\frac{d}{dZ}\; F_2 \qquad (8.4.15a)$$

либо

$$Z \,\frac{d}{dZ} Z \frac{d}{dZ}\; F_1 \; = \omega^2 (Z^2-1)\; F_1 \;, \qquad F_2 = \frac{1}{\omega}\; Z \frac{d}{dZ}\; F_1 \;, \qquad (8.4.15b)$$

Для определенности рассматриваем вариант (8.4.15b), он сводится к функциям Бесселя:

$$Z^2 \frac{d^2}{dZ^2}\; F_1 + Z \frac{d}{dZ}\; F_1 + \omega^2 (1 - Z^2)\; F_1 = 0 \;,$$

$$i\omega Z = x \;, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\; F_1 + \frac{1}{x}\; \frac{d}{dx}\; F_1 + (1 + \frac{\omega^2}{x^2})\; F_1 = 0 \;,$$

$$F_1(Z) = \alpha \; J_{+i\omega}(x) + \beta \; J_{+i\omega}(x) \;, \qquad x = i\omega Z = i \; \sqrt{\omega \mid b \mid}\; e^z \;. \qquad (8.4.16)$$

Теперь обратимся к общему случаю (8.4.11), когда $a \neq 0, \; b \neq 0$. Выберем значение параметра γ в зависимости от знака ab:

$$\underline{ab > 0 \;, \qquad \gamma = +\sqrt{\omega / ab}\;,}$$

$$(\frac{d}{dZ} + Z)\; F_2 = +(\frac{b}{a}\; Z - \frac{\omega}{Z})\; F_1 \;,$$

$$(\frac{d}{dZ} - Z)\; F_1 = -(\frac{a}{b}\; Z - \frac{\omega}{Z})\; F_2 \;.$$

Из этой системы получим дифференциальные уравнения

$$F_1 = \frac{aZ}{bZ^2 - a\omega}(\frac{d}{dZ} + Z)\; F_2 \;,$$

$$\frac{d}{dZ}(\frac{aZ}{bZ^2 - a\omega}(\frac{dF_2}{dZ} + Z\; F_2)) \; - \frac{aZ^2}{bZ^2 - a\omega}(\frac{dF_2}{dZ} + ZF_2) \;\; = -(\frac{a}{b}\; Z - \frac{\omega}{Z})\; F_2 \qquad (8.4.17a)$$

либо (эквивалентный вариант)

$$F_2 = -\frac{bZ}{aZ^2 - b\omega}(\frac{dF_1}{dZ} - ZF_1) \;\; ,$$

$$\frac{d}{dZ}(-\frac{bZ}{aZ^2 - b\omega}(\frac{dF_1}{dZ} - Z\; F_1)) \; - \frac{bZ^2}{aZ^2 - b\omega}(\frac{dF_1}{dZ} - ZF_1) \; = +(\frac{b}{a}\; Z - \frac{\omega}{Z})\; F_1 \;. \qquad (8.4.17b)$$

Из этих систем получим дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d}{dZ}\left(\frac{aZ}{bZ^2 - a\omega}\left(\frac{dF_2}{dZ} + Z\,F_2\right)\right) - \frac{aZ^2}{bZ^2 - a\omega}\left(\frac{dF_2}{dZ} + ZF_2\right) = -\left(\frac{a}{b}\,Z - \frac{\omega}{Z}\right) F_2 \tag{8.4.18a}$$

либо

$$\frac{d}{dZ}\left(-\frac{bZ}{aZ^2 - b\omega}\left(\frac{dF_1}{dZ} - Z\,F_1\right)\right) - \frac{bZ^2}{aZ^2 - b\omega}\left(\frac{dF_1}{dZ} - ZF_1\right) = +\left(\frac{b}{a}\,Z - \frac{\omega}{Z}\right) F_1\,. \tag{8.4.18b}$$

Аналогично рассматривается и второй симметричный случай

$\underline{ab < 0\,, \qquad \gamma = +\sqrt{-\omega/ab}\,,}$

$$\left(\frac{d}{dZ} - Z\right) F_2 = -\left(\frac{b}{a}\,Z + \frac{\omega}{Z}\right) F_1\,,$$
$$\left(\frac{d}{dZ} + Z\right) F_1 = \left(\frac{a}{b}\,Z + \frac{\omega}{Z}\right) F_2\,. \tag{8.4.19}$$

Из этой системы получим

$$F_1 = -\frac{aZ}{bZ^2 + a\omega}\left(\frac{d}{dZ} - Z\right) F_2\,,$$

$$\frac{d}{dZ}\left(-\frac{aZ}{bZ^2 + a\omega}\left(\frac{dF_2}{dZ} - Z\,F_2\right)\right) -$$
$$-\frac{aZ^2}{bZ^2 + a\omega}\left(\frac{dF_2}{dZ} - ZF_2\right) = \left(\frac{a}{b}\,Z + \frac{\omega}{Z}\right) F_2 \tag{8.4.20a}$$

либо

$$F_2 = \frac{bZ}{aZ^2 + b\omega}\left(\frac{dF_1}{dZ} + ZF_1\right)\,,$$

$$\frac{d}{dZ}\left(\frac{bZ}{aZ^2 + b\omega}\left(\frac{dF_1}{dZ} + Z\,F_1\right)\right) -$$
$$-\frac{bZ^2}{aZ^2 + b\omega}\left(\frac{dF_1}{dZ} + ZF_1\right) = -\left(\frac{b}{a}\,Z + \frac{\omega}{Z}\right) F_1\,. \tag{8.4.20b}$$

Полученные дифференциальные уравнения второго порядка могут быть разрешены в функциях Гойна. В следующем разделе покажем, что функции F_1, F_2 можно представить как простые линейные комбинации из функций Бесселя (или вырожденных гипергеометрических функций).

8.5 Анализ общего случая, решения в гипергеометрических функциях

Возвратимся к системе уравнений (8.4.11) (выбираем $\gamma^2 = \omega$)

$$Z\ (\frac{d}{dZ} + ab\ Z)\ F_2 = +(b^2 Z^2 - \omega)\ F_1\ ,$$

$$Z\ (\frac{d}{dZ} - ab\ Z)\ F_1 = -(a^2 Z^2 - \omega)\ F_2\ . \qquad (8.5.1)$$

Совершим линейное преобразование (с единичным определителем: $\alpha n - \beta m = 1$)

$$F_1 = \alpha\ G_1 + \beta\ G_2\ , \qquad F_2 = m\ G_1 + n\ G_2\ ; \qquad (8.5.2)$$

обратное преобразование

$$G_1 = n\ F_1 - \beta\ F_2\ , \qquad G_2 = -m\ F_1 + \alpha\ F_2\ . \qquad (8.5.3)$$

Комбинируя уравнения системы (8.5.1), получаем

$$n\ Z\ (\frac{d}{dZ} - ab\ Z)\ F_1 - \beta\ Z\ (\frac{d}{dZ} + ab\ Z)\ F_2 =$$

$$= -n\ (a^2 Z^2 - \omega)\ F_2 - \beta\ (b^2 Z^2 - \omega)\ F_1\ ,$$

$$-m\ Z\ (\frac{d}{dZ} - ab\ Z)\ F_1 + \alpha\ Z\ (\frac{d}{dZ} + ab\ Z)\ F_2 =$$

$$= m\ (a^2 Z^2 - \omega)\ F_2\ + \alpha\ (b^2 Z^2 - \omega)\ F_1\ ,$$

откуда следуют уравнения

$$Z\ \frac{d}{dZ}\ G_1 - Z^2\ ab\ (nF_1 + \beta F_2) = -Z^2\ (na^2 F_2 + \beta b^2 F_1) + \omega\ (nF_2 + \beta F_1)\ ,$$

$$Z\ \frac{d}{dZ}\ G_2 + Z^2\ ab\ (mF_1 + \alpha F_2) = Z^2\ (ma^2 F_2 + \alpha b^2 F_1) - \omega\ (mF_2 + \alpha F_1)\ . \qquad (8.5.4)$$

Учитываем формулы (8.5.2):

$$Z\ \frac{d}{dZ}\ G_1 - Z^2\ ab\ [n(\alpha G_1 + \beta G_2) + \beta\ (m\ G_1 + n\ G_2)] =$$

$$= -Z^2\ [na^2\ (m\ G_1 + n\ G_2) + \beta b^2\ (\alpha G_1 + \beta G_2)] +$$

$$+ \omega\ [n\ (m\ G_1 + n\ G_2) + \beta\ (\alpha G_1 + \beta G_2)]\ ,$$

$$Z\ \frac{d}{dZ}\ G_2 + Z^2\ ab\ [m\ (\alpha G_1 + \beta G_2) + \alpha(m\ G_1 + n\ G_2)] =$$

$$= Z^2\ [ma^2\ (m\ G_1 + n\ G_2) + \alpha b^2\ (\alpha G_1 + \beta G_2)] -$$
$$-\omega\ [m(m\ G_1 + n\ G_2) + \alpha\ (\alpha G_1 + \beta G_2)]\ ,$$

после простых преобразований приходим к уравнениям

$$Z\ \frac{d}{dZ} G_1 - Z^2 ab[(n\alpha + \beta m)G_1 + 2n\beta G_2] =$$
$$= -Z^2\ [(a^2mn + b^2\alpha\beta)G_1 + (a^2n^2 + b^2\beta^2)G_2] + \omega[(nm + \alpha\beta)G_1 + (n^2 + \beta^2)G_2)]\ ,$$
$$Z \frac{d}{dZ}\ G_2 + Z^2 ab\ [2m\ \alpha G_1 + (m\beta + n\alpha)G_2] =$$
$$= Z^2[(a^2m^2 + b^2\alpha^2)G_1 + (a^2mn + b^2\alpha\beta)G_2] - \omega[(m^2 + \alpha^2)G_1 + (nm + \alpha\beta)G_2\ ,$$

и дальше к

$$\left[Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + \beta m) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \omega\ (nm + \alpha\beta)\right] G_1 =$$
$$= \left[+Z^2 ab2n\beta - Z^2(a^2n^2 + b^2\beta^2) + \omega(n^2 + \beta^2)\right] G_2)\ ,$$
$$\left[Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(m\beta + n\alpha) - Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) + \omega(nm + \alpha\beta)\right] G_2 =$$
$$= \left[-Z^2 ab2m\alpha + Z^2(a^2m^2 + b^2\alpha^2) - \omega(m^2 + \alpha^2)\right] G_1$$

или

$$\left[Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + \beta m) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \omega(nm + \alpha\beta)\right] G_1 =$$
$$= \left[-Z^2(an - b\beta)^2 + \omega(n^2 + \beta^2)\right] G_2)\ ,$$
$$\left[Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(m\beta + n\alpha) - Z^2 a^2mn + b^2\alpha\beta) + \omega(nm + \alpha\beta)\right]\ G_2 =$$
$$= \left[Z^2(am - b\alpha)^2 - \omega(m^2 + \alpha^2)\right] G_1\ . \tag{8.5.5}$$

Требуем выполнения равенства (здесь есть две разные возможности; при этом уравнения (8.5.5) значительно упрощаются):

$$a\ n - b\ \beta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\beta}{n} = \frac{a}{b}\ ,$$

$$\left[Z \frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + \beta m) + Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) - \omega(nm + \alpha\beta)\right] G_1 =$$
$$= +\omega(n^2 + \beta^2)\ G_2\ ,$$
$$\left[Z \frac{d}{dZ} + Z^2 ab(m\beta + n\alpha) - Z^2(a^2mn + b^2\alpha\beta) + \omega(nm + \alpha\beta)\right] G_2 =$$
$$= \left[Z^2(am - b\alpha)^2 - \omega(m^2 + \alpha^2)\right] G_1 \tag{8.5.6}$$

или

$$a\,m - b\,\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\alpha}{m} = \frac{a}{b}\,,$$

$$\left[Z\,\frac{d}{dZ} - Z^2 ab(n\alpha + \beta m) + Z^2(a^2 mn + b^2\alpha\beta) - \omega(nm + \alpha\beta) \right] G_1 =$$

$$= \left[-Z^2(an - b\beta)^2 + \omega(n^2 + \beta^2) \right] G_2\,,$$

$$\left[Z\frac{d}{dZ} + Z^2 ab(m\beta + n\alpha) - Z^2(a^2 mn + b^2\alpha\beta) + \omega(nm + \alpha\beta) \right] G_2 =$$

$$= -\omega\,(m^2 + \alpha^2)\,G_1\,. \tag{8.5.7}$$

Эти две возможности, очевидно, эквивалентны друг другу. Для определенности дальше используем вариант (8.5.6). Ему можно придать более симметричную форму:

$$F_1 = \alpha\,G_1 + \beta\,G_2 = +\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,G_2\,,$$

$$F_2 = m\,G_1 + n\,G_2 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,G_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,G_2\,; \tag{8.5.8}$$

при этом система уравнений (8.5.6) принимает вид

$$\left[Z\,\frac{d}{dZ} - Z^2\,ab\,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} + Z^2\,ab\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} - \omega\,(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \right] G_1 =$$

$$= +\omega\,(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2})\,G_2)\,,$$

$$\left[Z\,\frac{d}{dZ} + Z^2\,ab\,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} - Z^2\,ab\,\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} + \omega\,(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}) \right] G_2 =$$

$$= \left[Z^2(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 - \omega\,(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}) \right] G_1\,,$$

т. е.

$$Z\,\frac{d}{dZ}\,G_1 = \omega\,G_2\,,$$

$$Z\,\frac{d}{dZ}\,G_2 = [Z^2(a^2+b^2) - \omega\,]\,G_1\,. \tag{8.5.9}$$

Из (8.5.9) получим дифференциальное уравнение второго порядка для G_1

$$[\,Z^2\,\frac{d^2}{dZ^2} + Z\,\frac{d}{dZ} + \omega^2 - \omega(a^2+b^2)Z^2\,]\,G_1 = 0\,. \tag{8.5.10}$$

В переменной

$$W = +i\,\sqrt{\omega(a^2+b^2)}\,Z = +i\,\sqrt{a^2+b^2}\,e^z \tag{8.5.11}$$

оно принимает вид уравнения Бесселя

$$[\,\frac{d^2}{dW^2}+\frac{1}{W}\frac{d}{dW}+(1+\frac{\omega^2}{W^2}\,]\;G_1(W)=0\;, \tag{8.5.12a}$$

общее решение представляем как суперпозицию

$$G_1(W)=A\;J_{i\omega}(W)+B\;Y_{i\omega}(W)\;. \tag{8.5.12b}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение найденных решений на бесконечности.

$$z\to+\infty\;,\qquad W=i\;\sqrt{a^2+b^2}\;e^z\to+i\;\infty\;;$$
$$z\to-\infty\;,\qquad W=i\;\sqrt{a^2+b^2}\;e^z\to+i\;0\,. \tag{8.5.13}$$

Будем использовать известные асимптотические свойства функций Бесселя и Неймана:

$$W\to\infty\;,\qquad J_\nu(W)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi W}}\;\cos(W-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})\;;$$
$$W\to\infty\;,\qquad Y_\nu(W)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi W}}\;\sin(W-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})\;;$$
$$W\to 0\;,\qquad J_\nu(W)\sim W^{+\nu}\;,\qquad Y_\nu(W)\sim W^{-\nu}\;. \tag{8.5.14}$$

Выделим в (8.5.12a) два линейно независимых решения с простыми свойствами при $z\to+\infty$:

$$B=+iA\;,\qquad G_1^+\sim A\;\sqrt{\frac{2}{\pi W}}\;e^{+i(W-\frac{\pi}{2}i\omega-\frac{\pi}{4})}\longrightarrow 0\;;$$
$$B=-iA\;,\qquad G_1^-\sim\sqrt{\frac{2}{\pi W}}\;e^{-i(W-\frac{\pi}{2}i\omega-\frac{\pi}{4})}\;\longrightarrow\;\infty\;. \tag{8.5.15a}$$

Хорошими асимптотическими свойствами при $z\to+\infty$ обладает только функция G_1^+. Поведение этого решения при $z\to-\infty$ описывается соотношениями

$$G_1^+\sim A\left[W^{i\omega}+i\;W^{-i\omega}\right]=A\left[(i\;\sqrt{a^2+b^2}e^z)^{i\omega}+i\;(i\;\sqrt{a^2+b^2}\;e^z)^{-i\omega}\right]. \tag{8.5.15b}$$

Чтобы лучше понять смысл найденного асимптотиченского поведения решений, напомним некоторые детали параметризации пространства Лобачевского квазидекартовыми орисферическими координатами (X,Y,Z):

$$x=\frac{u_1}{u_0-u_3}=\frac{q_1}{1-q_3}\;,\qquad y=\frac{u_2}{u_0-u_3}=\frac{q_2}{1-q_3}\;,$$
$$e^z=\frac{1}{u_0-u_3}=\frac{\sqrt{1-q^2}}{1-q_3}\;; \tag{8.5.16a}$$

обратное преобразование (используем переменную $q_i = u_i/u_0$) имеет вид

$$q_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+e^{2z}+1}\ , \qquad q_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+e^{2z}+1}\ ,$$

$$q_3 = \frac{x^2+y^2+e^{2z}-1}{x^2+y^2+e^{2z}+1}\ . \qquad (8.5.16b)$$

На оси $q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q \in (-1, +1)$ соотношения (8.5.16a) принимают вид

$$x = 0\ , \qquad y = 0\ , \qquad e^z = \sqrt{\frac{1+q_3}{1-q_3}}\ , \qquad (8.5.17a)$$

т. е.

$$q \to +1\ , \qquad e^z \to +\infty\ , \qquad z \to +\infty\ ;$$

$$q \to -1\ , \qquad e^z \to +0\ , \qquad z \to -\infty\ . \qquad (8.5.17b)$$

Соответственно координата $i\sqrt{a^2+b^2}\ e^z = W$ стремится к

$$q \to +1\ , \qquad W \ \to\ +i\sqrt{a^2+b^2}\ +i\infty\ ,$$

$$q \to -1\ , \qquad W \ \to\ 0\ . \qquad (8.5.17c)$$

Функцию G_1 из (8.5.12) можно свести к вырожденным гипергеометрическим функциям, для этого представим G_1 в виде

$$G_1(W) = W^A e^{BW} f(W)\ , \qquad (8.5.18)$$

в результате из дифференциального уравнения в (8.5.12a) приходим к уравнению

$$f'' + (AW^{-1} + B + AW^{-1} + B + W^{-1})f' +$$
$$+[(A + \omega^2 + A(A-1))W^{-2} + (B + 2AB)W^{-1} + (B^2+1)]\ f = 0\ .$$

Требуем выполнения равенств

$$A^2 + \omega^2 = 0\ , \qquad A\ \pm i\omega\ ,$$

$$B^2 + 1 = 0\ , \qquad B = \pm i\ ; \qquad (8.5.19)$$

уравнение упрощается

$$Wf'' + [(2A+1) + 2BW]f' + B(2A+1)\ f = 0\ .$$

Откуда, вводя новую переменную $2BW = -w$, приходим к

$$w\frac{d^2}{dw^2}\ f + [(2A+1) - w]\frac{d}{dw}\ f - (A + \frac{1}{2})\ f = 0\ , \qquad (8.5.20)$$

что является уравнением для вырожденной гипергеометрической функции

$$w\frac{d^2}{dw^2} + (c - w)\frac{d}{dw}\ \Phi - \alpha\ \Phi = 0\ ,$$

$$f = \Phi(\alpha, c; w) = \Phi\ (A + \frac{1}{2},\ 2A+1;\ w)\ ,$$

$$G_1 = W^{\pm i\omega} e^{\pm iW}\ f(w)\ . \qquad (8.5.21)$$

Глава 9

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

Обычно, рассматривая электромагнитное поле в искривленном пространстве-времени, например, в пространстве черной дыры Шварцшильда [181], используют вещественное тензорное представление электромагнитного поля [182], либо аппарат, развитый в рамках формализма Ньюмана–Пенроуза [183]–[185], который по существу эквивалентен спинорному подходу.

Ниже мы применяем для этого комплексный трехмерный формализм Майораны–Оппенгеймера. При этом убеждаемся, что эта техника позволяет довольно легко провести процедуру разделения переменных и свести задачу к анализу дифференциального уравнения второго порядка (вырожденного уравнения Гойна) для одной единственной функции.

Дополнительно эта же система анализируется в пространстве Шварцшильда с применением 10-мерного формализма Даффина–Кеммера, когда в описание электромагнитного поля кроме тензора входит и четырехмерный электромагнитный тензор. Такое описание электромагнитного поля является более информативным, поскольку включает также и калибровочные степени свободы. После разделения переменных в уравнении Даффина–Кеммера в метрике Шварцшильда, мы приходим к системе из 10 радиальных уравнений. Найденная система разбивается на две более простые подсистемы с использованием оператора пространственной четности. В этом втором подходе задача также сводится к анализу решений вырожденного уравнения Гойна. Кроме того, используя сопоставление двух указанных подходов, удается легко решить вопрос о выделении чисто калибровочных решений, не дающих вклада в электромагнитный тензор.

9.1 Разделение переменных и функции Вигнера

Матричное уравнение Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда

$$dS^2 = \Phi\, dt^2 - \frac{dr^2}{\Phi} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ , \quad \Phi = 1 - M/r\ ,$$

$$e^{\alpha}_{(0)} = (\frac{1}{\sqrt{\Phi}}, 0, 0, 0)\ , \qquad e^{\alpha}_{(3)} = (0, \sqrt{\Phi}, 0, 0)\ ,$$

$$e^{\alpha}_{(1)} = (0, 0, \frac{1}{r}, 0)\ , \qquad e^{\alpha}_{(2)} = (1, 0, 0, \frac{1}{r\sin\theta})\ ,$$

$$\gamma_{030} = \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}}\ ,\ \gamma_{311} = \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ ,\ \gamma_{322} = \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ ,\ \gamma_{122} = \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} \qquad (9.1.1)$$

имеет следующий явный вид (предполагаем использование циклического базиса, когда матрица S_3 диагональна)

$$[-\frac{i\partial_t}{\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\Phi}(\alpha^3\partial_r + \frac{\alpha^1 s_2 - \alpha^2 s_1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}s_3) + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta,\phi}] \left| \begin{array}{c} 0 \\ \psi \end{array} \right| = 0\ ,$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \frac{\alpha^1}{r}\partial_\theta + \alpha^2\ \frac{\partial_\phi + s_3\cos\theta}{\sin\theta}\ . \qquad (9.1.2)$$

Будем диагонализировать оператор квадрата и третьей проекции полного момента электромагнитного поля $\mathbf{J}^2$, J^3; соответственно для полевой функции используем подстановку

$$\psi = e^{-i\omega t} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \varphi_1(r)D_{-1} \\ \varphi_2(r)D_0 \\ \varphi_3(r)D_{+1} \end{array} \right| , \qquad (9.1.3)$$

где, как и ранее, для выделения угловой зависимости используются D-функции Вигнера $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0), \sigma = -1,0,+1$. С использованием рекуррентных формул [179]

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(aD_{-2} - \nu D_0)\ , \frac{m-\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1} = \frac{1}{2}(aD_{-2} + \nu D_0)\ ,$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} - \nu D_{+1})\ ,\ \frac{m}{\sin\theta}D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} + \nu D_{+1})\ ,$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 - aD_{+2})\ ,\ \frac{m+\cos\theta}{\sin\theta}D_{+1} = \frac{1}{2}\ (\nu D_0 +\ aD_{+2})\ ,$$

$$\nu = \sqrt{j(j+1)}\ , \qquad a = \sqrt{(j-1)(j+2)} \qquad (9.1.4)$$

получаем (фактор $e^{-i\omega t}$ опускаем)

$$\Sigma_{\theta\phi}\Psi' = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{r} (\varphi_1+\varphi_3)D_0 \\ -i\ \varphi_2 D_{-1} \\ i\ (\varphi_1-\varphi_3)D_0 \\ +i\ \varphi_2 D_{+1} \end{array} \right| . \qquad (9.1.5)$$

Ниже, чтобы упростить формулы, сменим обозначение:

$$\frac{\nu}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{j(j+1)}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \nu\ . \qquad (9.1.6)$$

Возвращаясь к уравнению Максвелла, после простых вычислений приходим к системе из 4-х уравнений

$$(1) \qquad \sqrt{\Phi}\ (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\ \varphi_2 + \frac{\nu}{r}\ \ (\varphi_1+\varphi_3) = 0\ ,$$

$$(2) \qquad (-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}} - i\,\sqrt{\Phi}\,\frac{d}{dr} - i\frac{\sqrt{\Phi}}{r} - i\frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})\,\varphi_1 - \frac{i\nu}{r}\,\varphi_2 = 0\,,$$

$$(3) \qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}\,(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,,$$

$$(4) \qquad (-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}} + i\,\sqrt{\Phi}\,\frac{d}{dr} + i\frac{\sqrt{\Phi}}{r} + i\frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})\,\varphi_3 + \frac{i\nu}{r}\,\varphi_2 = 0\,. \qquad (9.1.7)$$

Комбинируя уравнения (2) и (4), вместо (9.1.7) получаем

$$(2)+(4)\,, \qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1+\varphi_3) - i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1-\varphi_3) = 0\,,$$

$$(2)-(4)\,, \qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1-\varphi_3) - i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1+\varphi_3) - \frac{2i\nu}{r}\,\varphi_2 = 0\,,$$

$$(3) \qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}\,(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,,$$

$$(1) \qquad \sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\varphi_2 + \frac{\nu}{r}\,(\varphi_1 + \varphi_3) = 0\,. \qquad (9.1.8)$$

Уравнение (1) превращается в тождество при учете трех остальных. Следовательно, имеем только три независимых уравнения

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}\,(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\,,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1+\varphi_3) - i(\sqrt{\Phi}\,\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1-\varphi_3) = 0\,,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1-\varphi_3) - i\,(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1+\varphi_3) - \frac{2i\nu}{r}\,\varphi_2 = 0\,. \quad (9.1.9)$$

Введем новые функции:

$$f = \varphi_1 + \varphi_3\,, \qquad g = \varphi_1 - \varphi_3\,,$$

тогда уравнения (9.1.9) запишутся так:

$$\varphi_2 = \frac{i\nu}{\omega}\frac{\sqrt{\Phi}}{r}g\,, \qquad -\frac{\omega}{\Phi}f - i(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})g = 0\,,$$

$$-\frac{\omega^2}{\Phi}g - i\omega(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\,f + \frac{2\nu^2}{r^2}\;g = 0\,. \qquad (9.1.10)$$

Эта система упрощается с использованием подстановок

$$g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\,G(r)\,, \qquad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\,F(r)\,;$$

при этом получаем

$$\varphi_2 = \frac{i\nu}{\omega}\ \frac{1}{r^2}\, G(r)\ , \qquad i\omega\ F = \Phi \frac{d}{dr} G\ ,$$

$$+ i\omega\ \frac{d}{dr}\ F + \frac{\omega^2}{\Phi}\ G - \frac{2\nu^2}{r^2}\ G = 0\ . \tag{9.1.11}$$

В результате приходим к уравнению второго порядка для $G(r)$:

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{\Phi'}{\Phi}\ \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\Phi^2} - \frac{j(j+1)}{r^2\Phi} \right) G = 0 \tag{9.1.12}$$

или

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)}\ \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)} \right) G = 0\ . \tag{9.1.13}$$

Более удобным будет использовать новую переменную $x = r/M$, тогда уравнение выглядит так:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) \frac{dG}{dx} +$$

$$+ \left(M^2\omega^2 + \frac{j(j+1)}{x} + \frac{2M^2\omega^2 - j(j+1)}{x-1} + \frac{M^2\omega^2}{(x-1)^2} \right) G = 0\ . \tag{9.1.14}$$

Применяя подстановку

$$G = (x-1)^{\alpha}\, x^{\beta} e^{\gamma x} g(x)\, ,$$

из (9.1.14) получаем

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \left[\frac{1+2\,\alpha}{x-1} - \frac{1-2\,\beta}{x} + 2\gamma \right]\ \frac{dg}{dx} +$$

$$+ \left[M^2\omega^2 + \gamma^2 + \frac{M^2\omega^2 + \alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{\beta\,(\beta-2)}{x^2} + \right.$$

$$+ \frac{j(j+1) + \alpha - \beta - \gamma - 2\,\alpha\beta + 2\,\beta\gamma}{x} +$$

$$\left. + \frac{2M^2\omega^2 - j(j+1) - \alpha + \beta + \gamma + 2\,\alpha\beta + 2\,\alpha\gamma}{x-1} \right] g = 0\ . \tag{9.1.15}$$

При ограничениях на параметры α, β, γ

$$\alpha = \pm iM\omega\, , \qquad \beta = 0,\ 2\, , \qquad \gamma = \pm iM\omega \tag{9.1.16}$$

уравнение (9.1.15) упрощается

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \left[\frac{1+2\,\alpha}{x-1} - \frac{1-2\,\beta}{x} + 2\gamma \right]\ \frac{dg}{dx} +$$

$$+\left[\frac{j(j+1)+\alpha-\beta-\gamma-2\,\alpha\beta+2\,\beta\gamma}{x}+\right.$$

$$\left.+\frac{2M^2\omega^2-j(j+1)-\alpha+\beta+\gamma+2\,\alpha\beta+2\,\alpha\gamma}{x-1}\right]g=0\,, \qquad (1.9.17)$$

что является вырожденным уравнением Гойна $G(A,B,C,D,F)$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\left[A+\frac{1+B}{z}+\frac{1+C}{z-1}\right]\frac{dZ}{dz}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}\,\frac{A-B-C+AB-BC-2F}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\frac{A+B+C+AC+BC+2D+2F}{z-1}\right]f=0$$

с параметрами

$$A=2\gamma\,,\qquad B=2\beta-2\,,C=2\alpha\,,$$
$$D=2M^2\omega^2\,,\qquad F=1-j(j+1)\,. \qquad (9.1.18)$$

9.2 О векторном поле в подходе Даффина–Кеммера

Для уравнения Даффина–Кеммера в пространстве-времени Шварцшильда получим представление (I_6 – проектор на 6-мерное тензорное подпространство)

$$[\,i\,\beta^0\partial_t\,+\,i\,\Phi\,(\beta^3\partial_r\,+\,\frac{1}{r}\,(\beta^1 j^{31}\,+\,\beta^2 j^{32})\,+$$

$$+\frac{\Phi'}{2\Phi}\,\beta^0 J^{03})\,+\,\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\,\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi}\,-I_6\,\sqrt{\Phi}\,\,]\,\Phi(x)=0\,,$$

$$\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi}=\,i\,\beta^1\partial_\theta\,+\,\beta^2\,\frac{i\partial\,+\,i\,j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}\,. \qquad (9.2.1)$$

Подстановка для решения в виде сферической волны имеет вид

$$\Phi_{\omega jm}(x)=e^{-i\omega t}\,[\,f_1(r)\,D_0,\;f_2(r)\,D_{-1},\;f_3(r)\,D_0,\;f_4(r)\,D_{+1},$$

$$f_5(r)\,D_{-1},f_6(r)\,D_0,\;f_7(r)\,D_{+1},f_8(r)\,D_{-1},\;f_9(r)\,D_0,\;f_{10}(r)\,D_{+1}\,]\,. \qquad (9.2.2)$$

После разделения переменных получаем 10 радиальных уравнений ($\nu=\sqrt{j(j+1)/2}$ и совпадает с (9.1.6))

$$-\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\,f_6-\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\,(f_5+f_7)=0\,,$$

$$i\omega f_5 + i\Phi\ (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\ f_8 + i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_9 = 0\ ,$$

$$i\omega f_6 + i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ (-f_8 + f_{10}) = 0\ ,$$

$$i\omega f_7 - i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\ f_{10} - i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_9 = 0\ ,$$

$$-i\omega f_2 + \nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_1 - \sqrt{\Phi}\ f_5 = 0\ ,$$

$$-i\omega f_3 - \Phi(\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\ f_1 - \sqrt{\Phi}\ f_6 = 0\ ,$$

$$-i\omega f_4 + \nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_1 - \sqrt{\Phi}\ f_7 = 0\ ,$$

$$-i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\ f_2 - i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_3 - \sqrt{\Phi}\ f_8 = 0\ ,$$

$$i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ (f_2 - f_4) - \sqrt{\Phi}\ f_9 = 0\ ,$$

$$i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\ f_4 + i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_3 - \sqrt{\Phi}\ f_{10} = 0\ . \qquad (9.2.3)$$

Диаганализируя дополнительно оператор пространственной инверсии

$$\hat{P}^{cycl.}_{sph.} = \left| \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right| \otimes \hat{P}\ ,$$

из уравнения на собственные значения $\hat{P}^{cycl.}_{sph.}\ \Phi_{jm} = P\ \Phi_{jm}$, мы получаем два типа собственных значений с соответствующими ограничениями на радиальные функции:

$$P = (-1)^{j+1}\ ,$$

$$f_1 = f_3 = f_6 = 0\ ,\ f_4 = -f_2\ ,\ f_7 = -f_5\ ,\ f_{10} = +f_8\ ; \qquad (9.2.4)$$

$$P = (-1)^{j}\ ,$$

$$f_9 = 0\ ,\ f_4 = +f_2\ ,\ f_7 = +f_5\ ,\ f_{10} = -f_8\ . \qquad (9.2.5)$$

Принимая во внимание (9.2.4), (9.2.5), получаем соответственно более простые системы

$$P = (-1)^{j+1} \,,$$

$$i\omega \; f_5 \;+\; i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \;+\; \frac{\Phi'}{2\Phi}) \; f_8 \;+\; i\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r} \; f_9 = 0 \,, \qquad -i\omega \; f_2 \;- \sqrt{\Phi} \; f_5 = 0 \,,$$

$$-i\Phi \; (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}) \; f_2 \;-\; \sqrt{\Phi} \; f_8 = 0 \,, \qquad i2\nu \frac{\sqrt{\Phi}}{r} \; f_2 \;-\; \sqrt{\Phi} \; f_9 = 0 \,, \qquad (9.2.6)$$

откуда следует дифференциальное уравнение второго порядка для f_2:

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \left(\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{2}{r} \right) \; \frac{df_2}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\Phi^2} - \frac{2\nu^2}{r^2 \Phi} + \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{1}{r} \right) f_2 = 0 \,.$$

С использованием подстановки $f_2 = r^{-1} F_2$ последнее уравнение примет вид

$$\frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{\Phi'}{\Phi} \; \frac{dF_2}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{\Phi^2} - \frac{j(j+1)}{r^2 \Phi} \right) F_2 = 0 \,,$$

что совпадает с уравнением для G (9.1.12).

В случае $P = (-1)^j$ имеем

$$\Phi \; (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}) \; F_6 \;+\; \frac{2\nu}{r} \; F_5 \;=0 \,, \qquad i\omega \; F_5 \;+\; i\Phi \; (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}) \; F_8 = 0 \,,$$

$$i\omega \; F_6 \;-\; i\frac{2\nu}{r} \; F_8 = 0 \,, \qquad -i\omega \; F_2 \;+\; \frac{\nu}{r} \; F_1 \;- F_5 = 0 \,,$$

$$i\omega \; F_3 \;+\; \Phi \; \frac{d}{dr} F_1 \;+\; \Phi \; F_6 = 0 \,,$$

$$i\Phi \; (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}) \; F_2 \;+\; i\frac{\nu}{r} \; F_3 \;+\; F_8 = 0 \,, \qquad (9.2.7)$$

где

$$F_1 = \sqrt{\Phi} \; f_1 \,, \; F_2 = f_2 \,, \; F_3 = \sqrt{\Phi} \; f_3 \,,$$
$$F_5 = \sqrt{\Phi} \; f_5 \,, \; F_6 = f_6 \,, \; F_8 = \sqrt{\Phi} \; f_8 \,. \qquad (9.2.8)$$

9.3 Связь между формализмами

Чтобы перейти от системы (9.2.6), воспользуемся результатами, полученными в разделе **9.1**. Исходим из следующих соотношений

$$E_{(1)} = F_{(0)(1)} \,, \qquad E_{(2)} = F_{(0)(2)} \,, \qquad E_{(3)} = F_{(0)(3)} \,,$$

$$B_{(1)} = - \; F_{(2)(3)} \,, \qquad B_{(2)} = -F_{(3)(1)} \,, \qquad B_{(3)} = -F_{(1)(2)} \qquad (9.3.1)$$

и известных структур 3-вектора и 6-мерного тензора

$$\Psi = e^{-i\omega t} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \varphi_1 D_{-1} \\ \varphi_2 D_0 \\ \varphi_3 D_{+1} \end{array} \right| , \qquad \Phi = e^{-i\omega t} \, [..., ..., ..., ...,$$

$$f_5 \, D_{-1}, f_6 \, D_0, f_7 \, D_{+1}, f_8 \, D_{-1}, f_9 \, D_0, f_{10} \, D_{+1}] \, , \qquad (9.3.2)$$

мы приходим к трем уравнениям

$$e^{-i\omega t} \, D_0 \varphi_2(r) = E_{(2)} + iB_{(2)} = F_{(0)(2)} - iF_{(3)(1)} =$$
$$= e^{-i\omega t}(f_6(r) \, D_0 + if_9(r) \, D_0) \, ,$$

$$e^{-i\omega t} D_{-1} \varphi_1(r) = E_{(1)} + iB_{(1)} = F_{(0)(1)} - iF_{(2)(3)} =$$
$$= e^{-i\omega t}(f_5(r) \, D_{-1} - i \, f_8(r) \, D_{-1}) \, ,$$

$$e^{-i\omega t} \, D_{+1} \varphi_3(r = E_{(3)} + iB_{(3)} = F_{03} - iF_{12} =$$
$$= e^{-i\omega t}(f_7(r) \, D_{+1} - if_{10}(r) \, D_{+1}) \, ,$$

откуда следует

$$\varphi_2 = f_6 + i \, f_9 \, , \qquad \varphi_1 = f_5 - i \, f_8 \, , \qquad \varphi_3 = f_7 - i \, f_{10} \, . \qquad (9.3.3)$$

Принимая во внимание ограничения, связанные с четностью (9.2.4), (9.2.5), получаем

$$\underline{P = (-1)^{j+1}} \, , \qquad f_6 = 0 \, , \;\; f_7 = -f_5 \, , \; f_{10} = +f_8 \qquad \Longrightarrow$$
$$\varphi_2 = +i \, f_9 \, , \qquad \varphi_1 = f_5 - i \, f_8 \, , \qquad \varphi_3 = -f_5 - i \, f_8 \, ; \qquad (9.3.4)$$

$$\underline{P = (-1)^{j}} \, , \qquad f_9 = 0 \, , \;\; f_7 = +f_5 \, , \; f_{10} = -f_8 \qquad \Longrightarrow$$
$$\varphi_2 = f_6 \, , \qquad \varphi_1 = f_5 - i \, f_8 \, , \qquad \varphi_3 = f_5 + i \, f_8 \, ; \qquad (9.3.5)$$

обратные соотношения имеют вид

$$\underline{P = (-1)^{j+1}} \, , \qquad f_9 = -i\varphi_2 \, , \; f_8 = \frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \, ,$$
$$f_5 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3) \, ; \qquad (9.3.6)$$

$$\underline{P = (-1)^{j}} \, , \qquad F_6 = \varphi_2 \, , \; F_5 = \frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \, ,$$
$$F_8 = i\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1 - \varphi_3) \, . \qquad (9.3.7)$$

9.4 Анализ радиальной системы для состояний $P=(-1)^j$

Вначале рассмотрим случай $P=(-1)^j$. Для этого в шести уравнениях (9.2.7) учтем (9.3.7). Три первых уравнения (они содержат только функции $F_5,\ F_6,\ F_8$)

$$i\omega\ F_6\ -\ i\frac{2\nu}{r}\ F_8=0\ ,\qquad \Phi\ (\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\ F_6\ +\ \frac{2\nu}{r}\ F_5\ =0\ ,$$

$$i\omega\ F_5\ +\ i\Phi\ (\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\ F_8=0$$

после введения новых переменных запишутся так:

$$i\omega\ \varphi_2\ -\ i\frac{\nu}{r}\ i\sqrt{\Phi}\ (\varphi_1-\varphi_3)=0\ ,$$

$$\Phi\ (\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\varphi_2+\frac{\nu}{r}\ \sqrt{\Phi}\ (\varphi_1+\varphi_3)=0\ ,$$

$$i\omega\ \sqrt{\Phi}\ (\varphi_1+\varphi_3)+i\Phi\ (\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\ i\sqrt{\Phi}\ (\varphi_1-\varphi_3)=0\ . \qquad (9.4.1)$$

Уравнения (9.4.1) можно сравнить с (9.1.8)

$$(3)\qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2+\frac{i\nu}{r}\ (\varphi_1-\varphi_3)=0\ ,$$

$$(1)\qquad \sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\varphi_2+\frac{\nu}{r}\ (\varphi_1+\varphi_3)=0\ ,$$

$$(2)+(4)\qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1+\varphi_3)-i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr}+\frac{\sqrt{\Phi}}{r}+\frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1-\varphi_3)=0\ ,$$

$$(2)-(4)\qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1-\varphi_3)-$$

$$-i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr}+\frac{\sqrt{\Phi}}{r}+\frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1+\varphi_3)-\frac{2i\nu}{r}\ \varphi_2=0\ . \qquad (9.4.2)$$

Три первых уравнения совпадают; последнее равенство в (9.4.2), (2)–(4), не имеет партнера, но является следствием первых трех в (9.4.2) и, следовательно, его можно не учитывать. Напоминаем, что 3 функции φ_1, φ_2, φ_3 однозначно определяются функцией G:

$$\varphi_2=-\frac{1}{i\omega}\ \frac{\nu}{r^2}\ G(r)\ ,\qquad \varphi_1+\varphi_3=\frac{1}{i\omega}\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ \frac{d}{dr}G\ ,$$

$$\varphi_1-\varphi_3=\frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\ G(r)\ , \qquad (9.4.3)$$

где G определяется уравнением

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{M}{r(r-M)}\,\frac{dG}{dr}+\left(\frac{\omega^2r^2}{(r-M)^2}-\frac{j(j+1)}{r(r-M)}\right)G=0\;. \qquad (9.4.4)$$

Оставшихся 3 уравнения в (9.2.7) связывают радиальные функции электромагнитного 4-вектора F_1, F_2, F_3 с радиальными функциями электромагнитного тензора F_5, F_6, F_8 следующим образом

$$\begin{gathered} i\omega\;F_3\;+\;\Phi\;\frac{d}{dr}F_1\;+\;\Phi\;F_6=0\;,\\ -i\omega\;F_2\;+\;\frac{\nu}{r}\;F_1\;-F_5=0\;,\\ i\Phi\;(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\;F_2\;+\;i\frac{\nu}{r}\;F_3\;+\;F_8=0\;; \end{gathered} \qquad (9.4.5)$$

откуда с помощью (9.3.7) получаем

$$\begin{gathered} i\omega\;F_3\;+\;\Phi\;\frac{d}{dr}F_1\;+\;\Phi\;\varphi_2=0\;,\\ -i\omega\;F_2\;+\;\frac{\nu}{r}\;F_1\;-\;\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1+\varphi_3)=0\;,\\ i\Phi\;(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\;F_2\;+\;i\frac{\nu}{r}\;F_3+i\frac{\sqrt{\Phi}}{2}(\varphi_1-\varphi_3)=0\;. \end{gathered} \qquad (9.4.6)$$

В свою очередь, из (9.4.6) с учетом (9.4.3) получаем

$$\begin{gathered} \frac{i\omega}{\Phi}\;F_3\;+\frac{d}{dr}F_1\;-\;\frac{1}{i\omega}\;\frac{\nu}{r^2}\;G(r)=0\;,\\ -i\omega\;F_2\;+\;\frac{\nu}{r}\;F_1\;-\frac{1}{i\omega}\frac{\Phi}{\sqrt{2}\;r}\;\frac{d}{dr}G(r)=0\;,\\ \Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\;F_2\;+\;\frac{\nu}{r}\;F_3+\frac{1}{\sqrt{2}\;r}\;G(r)=0\;. \end{gathered} \qquad (9.4.7)$$

Эта система эквивалентна следующей

$$\begin{gathered} F_3=\frac{i\Phi}{\omega}\,\frac{dF_1}{dr}-\frac{\Phi\,\nu}{\omega^2r^2}\,G(r)\,,\\ F_2=-\frac{i\nu}{\omega r}\,F_1+\frac{\Phi}{\sqrt{2}\,\omega^2r}\,\frac{dG(r)}{dr}\,,\\ \frac{d^2G(r)}{dr^2}+\frac{\Phi'}{\Phi}\,\frac{dG(r)}{dr}-\frac{\sqrt{2}\,\nu^2}{r^2\,\Phi}\,G(r)+\frac{\omega^2}{\Phi^2}G(r)=0\,. \end{gathered} \qquad (9.4.8)$$

Обращаем внимание, что все члены с F_1 компенсируют друг друга. Это означает, что функция F_1 может быть произвольной. Этот факт является проявлением калибровочной свободы в электромагнитных 4-потенциалах по постоянным электромагнитного тензора.

9.5 Анализ радиальной системы для состояний $P = (-1)^{j+1}$

Теперь рассмотрим случай $P = (-1)^{j+1}$. В системе уравнений (9.2.6) учтем условия (9.3.6):

$$P = (-1)^{j+1}\,, \qquad -i\omega\; f_2 \; - \sqrt{\Phi}\; f_5 = 0\;,$$

$$i\omega\; f_5 \; + \; i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \; + \; \frac{\Phi'}{2\Phi})\; f_8 \; + \; i\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\; f_9 = 0\;,$$

$$-i\Phi\;(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\; f_2 \; - \; \sqrt{\Phi}\; f_8 = 0\;,$$

$$i2\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\; f_2 \; - \;\; \sqrt{\Phi}\; f_9 = 0\;,$$

что дает

$$\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\;\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}\;(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\;,$$

$$-\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\;(\varphi_1 - \varphi_3)\; - i\,\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \; + \; \frac{\Phi'}{2\Phi})\;(\varphi_1 + \varphi_3)\; + \; \frac{2i\,\nu}{r}\;\varphi_2 = 0\;,$$

$$-\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\varphi_2 + \frac{\nu}{r}\;(\varphi_1 + \varphi_3) = 0\;, \qquad f_2 = -\frac{r}{2\,\nu}\,\varphi_2\,. \tag{9.5.1}$$

Обращаем внимание, что функция F_2 определяемого электромагнитного 4-вектора однозначно определяется компонентами тензора. Это означает, что в этом классе решений не существует калибровочной свободы.

Сравним уравнения (9.5.1) с первыми тремя уравнениями в (9.1.8) (последнее уравнение (2)+(4) в (9.1.8) является следствием трех остальных, поэтому его можно не учитывать)

$$(3) \quad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}\varphi_2 + \frac{i\nu}{r}\;(\varphi_1 - \varphi_3) = 0\;,$$

$$(1)\;\; \sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\varphi_2 + \frac{\nu}{r}\;(\varphi_1 + \varphi_3) = 0\;,$$

$$(2)-(4)\,, \qquad -\frac{\omega}{\sqrt{\Phi}}(\varphi_1 - \varphi_3) - i(\sqrt{\Phi}\frac{d}{dr} + \frac{\sqrt{\Phi}}{r} + \frac{\Phi'}{2\sqrt{\Phi}})(\varphi_1 + \varphi_3) - \frac{2i\nu}{r}\;\varphi_2 = 0\,. \tag{9.5.2}$$

Системы (9.5.1) и (9.5.2) отличаются только знаком функции φ_2.

Введем новые переменные

$$f = \varphi_1 + \varphi_3\;, \qquad g = \varphi_1 - \varphi_3\;,$$

тогда уравнения (9.5.1) примут вид

$$\varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega}\frac{\sqrt{\Phi}}{r}g\;, \qquad i\sqrt{\Phi}(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\frac{\sqrt{\Phi}}{r}g + \frac{\omega}{r}\;f = 0\;,$$

$$-\frac{\omega^2}{\Phi}g - i\omega(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\ f + \frac{2\nu^2}{r^2}\ \ g = 0\ . \qquad (9.5.3)$$

Система (9.5.3) упрощается с помощью подстановки

$$g = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\ G(r)\ , \qquad f = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\ F(r)\ ,$$

в результате приходим к уравнениям

$$\varphi_2 = -\frac{i\nu}{\omega r^2}\ G\ , \qquad \omega F = -i\Phi\ \frac{d}{dr}G\ ,$$

$$-\frac{\omega^2}{\Phi}G - i\frac{d}{dr}\omega F + \frac{2\nu^2}{r^2}G = 0\,. \qquad (9.5.4)$$

Таким образом, задача свелась к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{M}{r(r-M)}\ \frac{dG}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{(r-M)^2} - \frac{j(j+1)}{r(r-M)}\right)G = 0\ . \qquad (9.5.5)$$

Сопутствующие функции определяются из (9.5.5) согласно

$$P = (-1)^{j+1}\ , \qquad \varphi_2 = -i\frac{\nu}{\omega r^2}G\ ,$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = -i\frac{\sqrt{\Phi}}{\omega r}\frac{d}{dr}G\ , \qquad \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\ G(r)\ . \qquad (9.5.6a)$$

В свою очередь для волны с противоположной четностью имеем

$$P = (-1)^{j}\ , \qquad \varphi_2 = +i\ \frac{\nu}{\omega r^2}\ G\ ,$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = -i\frac{\sqrt{\Phi}}{\omega r}\ \frac{d}{dr}G\ , \qquad \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{r\sqrt{\Phi}}\ G(r)\ . \qquad (9.5.6b)$$

Связь между двумя линейно независимыми решениями, найденными соответственно в рамках комплексного формализма Майораны–Оппенгеймера и 10-мерного формализма Даффина–Кеммера–Петье, может быть выражена следующим образом:

$$\text{Майорана–Оппенгеймер} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_2, \quad +\varphi_1 \quad \varphi_3\ ,$$

$$P = (-1)^{j}\ ,\ \text{Даффин–Кеммер} \quad \Longrightarrow \quad +\varphi_2, \quad \varphi_1\ , \quad \varphi_3\ ,$$

$$P = (-1)^{j+1}\ ,\ \text{Даффин–Кеммер} \quad \Longrightarrow \quad -\varphi_2, \quad \varphi_1\ ,\ \varphi_3\ .$$

С учетом $(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \sim \vec{\varphi} = (\varphi_i)$ полученные в формализме Майораны–Оппенгеймера простые линейные соотношения дают нам линейно независимые решения уравнений Максвелла.

9.6 Калибровочные степени свободы

Уравнения Максвелла допускают существование чисто калибровочных (тривиальных) решений, для них должна использоваться следующая подстановка

$$\Phi_{\omega jm}(x) = e^{-i\omega t}(\ f_1 D_0, f_2 D_{-1}, f_3 D_0, f_4 D_{+1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\ )\ . \qquad (9.6.1)$$

Для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ имеем

$$P = (-1)^{j+1}\ , \qquad f_1 = f_3 = 0\ ,\ f_4 = -f_2\ ,$$

$$i\omega 0 + i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})0 + i\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}0 = 0\ , \ \ -i\omega f_2 - \sqrt{\Phi}0 = 0\ ,$$

$$-i\Phi\ (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\ f_2\ -\ \sqrt{\Phi}\ 0 = 0\ , \qquad i2\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\ f_2\ -\ \sqrt{\Phi}\ 0 = 0\ ,$$

откуда следует $f_2 = 0$. Другими словами, чисто калибровочные решения не существуют, когда четность равна $P = (-1)^{j+1}$.

Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ имеем

$$P = (-1)^j\ , \qquad f_4 = +f_2\ ,$$

$$(F_1 = \sqrt{\Phi}\ f_1\ ,\ F_2 = f_2\ ,\ F_3 = \sqrt{\Phi}\ f_3\ )\ ,$$

$$\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})0 + \frac{2\nu}{r}0 = 0\ , \qquad i\omega 0 +\ i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})0 = 0\ ,$$

$$i\omega 0 - i\frac{2\nu}{r}0 = 0\ , \qquad -i\omega F_2 + \frac{\nu}{r}F_1 - 0 = 0\ ,$$

$$i\omega F_3 + \Phi\frac{d}{dr}F_1 + \Phi 0 = 0\ , \qquad i\Phi(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})F_2 + i\frac{\nu}{r}F_3 + 0 = 0\ ,$$

откуда следует

$$i\omega\ F_2 = \frac{\nu}{r}\ F_1\ , \qquad i\omega\ F_3 = -\Phi\ \frac{d}{dr}F_1\ ,$$

$$i\Phi\ (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})\ F_2\ +\ i\frac{\nu}{r}\ F_3 = 0\ .$$

Исключив в третьем уравнении переменные F_2, F_3, мы приходим к тождеству $0 \equiv 0$. Это означает, что функция F_1 может быть произвольной, две остальные функции определяются согласно

$$i\omega\ F_2 = \frac{\nu}{r}\ F_1\ , \qquad i\omega\ F_3 = -\Phi\ \frac{d}{dr}F_1\ . \qquad (9.6.2)$$

Последние соотношения могут быть дополнительно проверены с помощью калибровки Лоренца. Действительно, в радиальной форме это

$$\frac{-i\omega}{\sqrt{\Phi}}\, f_1 - \sqrt{\Phi}\, (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\, f_3 - \frac{\nu}{r}\, (f_2 + f_4) = 0 \, . \tag{9.6.3}$$

Это тождество выполняется для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$; в свою очередь для состояний с четностью $P = (-1)^j$ калибровка Лоренца принимает вид

$$\frac{-i\omega}{\sqrt{\Phi}}\, f_1 - \sqrt{\Phi}\, (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi})\, f_3 - \frac{2\nu}{r}\, f_2 = 0 \, ; \tag{9.6.4}$$

принимая во внимание (9.2.8), получаем

$$\frac{-i\omega}{\Phi}\, F_1 - (\frac{d}{dr} + \frac{2}{r})\, F_3 - \frac{2\nu}{r}\, F_2 = 0 \, . \tag{9.6.5}$$

Учитывая (9.6.2), имеем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr} + \frac{\omega^2}{\Phi^2} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}\right] F_1 = 0 \, . \tag{9.6.6}$$

Сравним полученный результат с радиальной формой скалярной волны $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0$. В метрике Шварцшильда она имеет вид

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \Psi \Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Psi =$$

$$= \left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \Psi \, ;$$

для скалярного волнового уравнения мы получим следующее выражение

$$\left(\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{l}^2}{r^2} \right) e^{-i\omega t} f(r) Y_{jm}(\theta, \phi) = 0 \, .$$

Таким образом, для радиальной функции имеем уравнение

$$\left(-\frac{\omega^2}{\Phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \Phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{j(j+1)}{r^2} \right) f(r) = 0 \, ,$$

которое совпадает с (9.6.6).

Таким образом, общековариантный тетрадный формализм Римана–Зильберштейна–Майораны–Оппенгеймера применен к решению уравнений электродинамики в метрике Шварцшильда. После разделения переменных задача сводится к дифференциальному уравнению того же вида, которое возникает в теории скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда. Полученное уравнение является вырожденным уравнением Гойна.

Электромагнитное поле рассмотрено также на основе 10-мерного матричного формализма Даффина–Кеммера, в котором в дополнение к шести компонентам электромагнитного тензора используются 4 компоненты векторного потенциала. С помощью оператора пространственной четности радиальная система из 10 уравнений расщепляется на подсистемы из 4 и 6 уравнений соответственно. В этом подходе задача также сводится к вырожденному уравнению Гойна.

В частности показано, каким образом решения, найденные в комплексной форме, встроены в 10-мерный формализм. Кроме того, определены радиальные функции, ответственные за калибровочные степени свободы электромагнитного поля.

Список литературы

[1] **Gordon, W.** Zur Lichtfortpanzungnach der Relativitätstheorie / W. Gordon // Ann. Phys. (Leipzig). – 1923. – Bd. 72. – S. 421–456.

[2] **Тамм, И.Е.** Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности / И.Е. Тамм // ЖРФХО. Физ. Отд. – 1924. – Т. 56, вып. 2-3. – С. 248–262.

[3] **Тамм, И.Е.** Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией квадратичной формы / И.Е. Тамм // ЖРФХО. – 1925. – Т. 54, вып. 3-4. – С. 1.

[4] **Mandelstam, L.I.** Elektrodynamik der anisotropen Medien und der speziallen Relativitatstheorie / L.I. Mandelstam, I.E. Tamm // Math. Annalen. – 1925. – Bd. 95. – S. 154–160.

[5] **Ландау, Л.Д.** Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 6-е изд. – Москва: Наука, 1973. – Т. 2: Теория поля. – 504 с.

[6] **Lichnerowicz, A.** Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme / A. Lichnerowicz. – Paris: Masson et Cie., 1955. – 78 p.

[7] **Novacu, V.** Introducere in Electrodinamica / V. Novacu. – Romine: Ed. Acad. Rep. Romine Popul, 1955.

[8] **Balazs, N.L.** The propagation of light rays in moving media / N.L. Balazs // Jour. Optical Soc. Amer. – 1955. – Vol. 45, № 1. – P. 63–64.

[9] **Balazs, N.L.** Effect of a gravitational field, due to a rotating body, on the plane of polarization of an electromagnetic wave / N.L. Balazs // Phys. Rev. – 1958. – Vol. 110. – P. 236–239.

[10] **Pham Man Quan.** Sur les équations de l'électromagnétisme dans la materie / Pham Man Quan // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1956. – Vol. 242. – P. 465–467.

[11] **Pham Man Quan.** Projections des géodésiques de longuer nulle et rayons électromagnétiques dans un milieu en movement permanent / Pham Man Quan // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1956. – Vol. 242. – P. 857.

[12] **Skrotskii, G.V.** The influence of gravitation on the propagation of light / G.V. Skrotskii // Soviet Phys. Dokl. – 1957. – Vol. 2. – P. 226–229.

[13] **Томильчик, Л.М.** Магнитная анизотропия как метрическое свойство пространства / Л.М. Томильчик, Ф.И. Федоров // Кристаллография. – 1959. – Т. 4, вып. 4. – С. 498–504.

[14] **Plebanski, J.** Electromagnetic waves in gravitational fields / J. Plebanski // Phys. Rev. – 1960. – Vol. 118. – P. 1396–1408.

[15] **Post, E.** Formal structure of Electrodynamics. General Covariance and Electromagnetics / E. Post. – Amsterdam: North-Holland, 1962. – 224 p.

[16] **Tonnelat, M.A.** Sur la théorie du photon dans un espace de Riemann / M.A. Tonnelat // Ann. Phys. N.Y. – 1941. – Vol. 15. – P. 144.

[17] **Ellis, J.R.** Maxwell's equations and theories of Maxwell form: Ph.D. thesis / J.R. Ellis. – University of London, 1964. – 417 p.

[18] **O'Del, T.H.** The electrodynamics of magneto-electric media / T.H. O'Del. – Amsterdam: North-Holland, 1970.

[19] **De Felice, F.** On the gravitational field acting as an optical medium / F. De Felice // Gen. Relat. Grav. – 1971. – Vol. 2. – P. 347–357.

[20] **Болотовский, Б.М.** Современное состояние электродинамики движущихся сред / Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1974. – Т. 114, № 12. – С. 569.

[21] **Болотовский, Б.М.** Современное состояние электродинамики движущихся сред (неограниченные среды) / Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров // Эйнштейновский сборник, 1974 / Отв. ред.: В.Л. Гинзбург, Г.И. Наан; сост.: У.И. Франкфурт. – Москва: Наука, 1976. – С. 179–275.

[22] **Venuri, G.** A geometrical formulation of electrodynamics / G. Venuri // Nuovo Cim. A. – 1981. – Vol. 65, № 1. – С. 64–76.

[23] **Schleich, W.** General relativity and modern optics / W. Schleich, M.O. Scully // New Trends in Atomic Physics, Les Houches, Session XXXVIII, 1982 / Eds.: G. Grynberg, R. Stora. – Amsterdam: North-Holland, 1984.

[24] **Березин, А.В.** Дуальноинвариантные уравнения связи для покоящихся гиротропных сред / А.В. Березин, Е.А. Толкачев, Ф.И. Федоров // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 7. – С. 595–597.

[25] Кватернионные уравнения связи для движущихся гиротропных сред / **А.В. Березин** [и др.] // Журн. прикл. спектроскопии. – 1987. – Т. 47, № 1. – С. 113–118.

[26] **Барыкин, В.Н.** О симметрийных аспектах выбора материальных уравнений в макроскопической электродинамике движущихся сред / В.Н. Барыкин, Е.А. Толкачев, Л.М. Томильчик // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 96–98.

[27] **Antoci, S.** The electromagnetic properties of material media and Einstein's unified field theory / S. Antoci // Progr. Theor. Phys. – 1992. – Vol. 87. – P. 1343–1357.

[28] **Antoci, S.** Microscopic Fields and Macroscopic Averages in Einstein's Unified Field Theory / S. Antoci // Ann. Fond. L. de Broglie. – 1996. – Vol. 21. – P. 11–38.

[29] **Antoci, S.** A forgotten argument by Gordon uniquely selects Abraham's tensor as the energy-momentum tensor for the electromagnetic field in homogeneous, isotropic matter / S. Antoci, L. Mihich // Nuovo Cim. B. – 1997. – Vol. 112. – P. 991.

[30] **Antoci, S.** One thing that general relativity says about photons in matter / S. Antoci, L. Minich // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2001. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/gr-qc/0106059.

[31] **Hillion, P.** Spinor electromagnetism in isotropic chiral media / P. Hillion // Adv. Appl. Clifford Alg. – 1993. – Vol. 3. – P. 107–120.

[32] **Hillion, P.** Constitutive relations and Clifford algebra in electromagnetism / P. Hillion // Adv. Appl. Clifford Alg. – 1995. – Vol. 5. – P. 141–158.

[33] **Weiglhofer, W.S.** On a medium constraint arising directly from Maxwell's equations / W.S. Weiglhofer // J. Phys. A. – 1994. – Vol. 27. – P. 871–874.

[34] **Lakhtakia, A.** Lorentz covariance, Occam's razor, and a constraint on linear constitutive relations / A. Lakhtakia, W.S. Weiglhofer // Phys. Lett. A. – 1996. – Vol. 213. – P. 107–111.

[35] **Lakhtakia, A.** Towards gravitationally assisted negative refraction of light by vacuum / A. Lakhtakia, Tom G. Mackay // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2004. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/physics/0408021.

[36] **Lakhtakia, A.** Global and local perspectives of gravitationally assisted negative-phase-velocity propagation of electromagnetic waves in vacuum / A. Lakhtakia, T.G. Mackay, S. Setiawan // Phys. Lett. A. – 2005. – Vol. 336. – P. 89–96.

[37] **Mackay, T.G.** Negative phase velocity of electromagnetic waves and the cosmological constant / T.G. Mackay, S. Setiawan, A. Lakhtakia // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2005. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411754.

[38] **Leonhardt, U.** Optics of nonuniformly moving media / U. Leonhardt, P. Piwnicki // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60. – P. 4301–4312.

[39] **Leonhardt, U.** Relativistic effects of light in moving media with extremely low group velocity / U. Leonhardt, P. Piwnicki // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – P. 822–825.

[40] **Leonhardt, U.** Space-time geometry of quantum dielectrics / U. Leonhardt // Phys. Rev. A. – 2000. – Vol. 62. – P. 012111.

[41] **Piwnick, P.** Geometrical approach to light in inhomogeneous media / P. Piwnick // Int. J. Mod. Phys. A. – 2002. – Vol. 17. – P. 1543–1558.

[42] **Leonhardt, U.** General relativity in electricale Engineering / U. Leonhardt, T.G. Philbin // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2006. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0607418.

[43] **Obukhov, Y.N.** Spacetime metric from linear electrodynamics / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 458. – P. 466–470.

[44] **De Lorenci, V.A.** On optical black holes in moving dielectrics / V.A. De Lorenci, R. Klippert, Y.N. Obukhov // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 68. – Paper 061502.

[45] **Hehl, F.W.** Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric / F.W. Hehl, Yu.N. Obukhov. – Boston: Birkhäuser, 2003.

[46] **Hehl, F.W.** Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint / F.W. Hehl, Yu.N. Obukhov // Phys. Lett. A. – 2005. – Vol. 334. – P. 249–259.

[47] **Novello, M.** Effective electromagnetic geometry / M. Novello, J.M. Salim // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 63. – Paper 083511.

[48] **Novello, M.** Effective Geometry / M. Novello, S. Perez Bergliaffa // AIP Conf. Proc. – 2003. – Vol. 668. – P. 288–300.

[49] **Novello, M.** Analog black holes in flowing dielectrics / M. Novello, S. Perez Bergliaffa, J. Salim // Class. Quant. Grav. – 2003. – Vol. 20. – P. 859–872.

[50] **De Lange, O.L.** Post's constrain for electromagnetic constitutive relations / O.L. De Lange, R.E. Raab // J. Opt. A. – 2001. – Vol. 3. – P. 23–26.

[51] **Raab, R.E.** Symmetry constrains for electromagnetic constitutive relations / R.E. Raab, O.L. de Lange // J. Opt. A. – 2001. – Vol. 3. – P. 446–451.

[52] **Brevik, I.** Effective potential for light in moving media / I. Brevik, G. Halnes // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65. – Paper 024005.

[53] Analog of the Fizeau effect in an effective optical medium / **K.K. Nandi** [et al.] // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – Paper 025002.

[54] **Matagne, E.** Algebraic decomposition of the electromagnetic constitutive tensor. A step toward pre-metric based gravitation / E. Matagne // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2008. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/gr-qc/0512068.

[55] **Delphenich, D.H.** Symmetries and pre-metric electromagnetism / D.H. Delphenich // Ann. Phys. – 2005. – Vol. 14. – P. 663–704.

[56] Effective refractive index tensor for weak field gravity / **P. Boonserm** [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2005. – Vol. 22. – P. 1905–1915.

[57] **Barcelro, C.** Analogue Gravity / C. Barcelro, S. Liberati, M. Visser // Living Rev. Rel. – 2005. – Vol. 8. – P. 12.

[58] **Minkowski, H.** Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Kërpern / H. Minkowski // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. – 1908. – P. 53–111; reprint in Math. Ann. – 1910. – Vol. 68. – P. 472–525.

[59] **Lorentz, H.** Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity less than that of Light / H. Lorentz // Proc. Royal Acad. Amsterdam. – 1904. – Vol. 6. – P. 809–831.

[60] **Poincaré, H.** Sur la dynamique de l'électron / H. Poincaré // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1905. – Vol. 140. – P. 1504–1508.

[61] **Poincaré, H.** Sur la Dynamique de l'électron / H. Poincaré // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1906. – Vol. 21. – P. 129–175.

[62] **Einstein, A.** Zur Elektrodynamik der bewegten Körper / A. Einstein // Annalen der Physik. – 1905. – Vol. 17. – P. 891–921.

[63] **Silberstein, L.** Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. Phys. (Leiptzig). – 1907. – Vol. 22. – P. 579–586.

[64] **Silberstein, L.** Nachtrag zur Abhandlung Über elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24. – P.783–784.

[65] **Silberstein, L.** The Theory of Relativity / L. Silberstein. – London: Macmillan. – 1914.

[66] **Marcolongo, R.** Les Transformations de Lorentz et les Équations de l'Électrodynamique / R. Marcolongo // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. – 1914. – Vol. 4. – P. 429–468.

[67] **Bateman, H.** The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of Maxwells Equations / H. Bateman. – Cambridge: University Press, 1915.

[68] **Lanczos, K.** Die Funktionentheoretischen Beziehungen der Maxwellschen Aethergleichungen – Ein Beitrag zur Relativitätsund Elektronentheorie / K. Lanczos. – Budapest: Verlagsbuchhandlung Josef Nëmeth, 1919. – 80 p.

[69] **Möglich, F.** Zur Quantentheorie des rotierenden Elektrons / F. Möglich // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48. – P. 852–867.

[70] **Ivanenko, D.** Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48. – P. 340–348.

[71] **Neumann, J.** Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelectrons / J. Neumann // Zeit. Phys. – 1929. – Vol. 48. – P. 868–881.

[72] **Van der Waerden, B.** Spinoranalyse / B. van der Waerden // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math. Physik. Kl. – 1929. – P. 100–109.

[73] **Juvet, G.** Opérateurs de Dirac et Équations de Maxwell / G. Juvet // Comm. Math. Helv. – 1930. – Vol. 2. – P. 225–235.

[74] **Laporte, O.** Application of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations / O. Laporte, G. Uhlenbeck // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 37. – P. 1380–1397.

[75] **Румер, Ю.Б.** Спинорный анализ / Ю.Б. Румер. – Москва–Ленинград: ОНТИ, 1936. – 104 с.

[76] **Majorana, E.** Scientific Papers, Unpublished, Deposited at the "Domus Galileana". Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16; 17, p. 83, 159.

[77] **Oppenheimer, J.** Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.

[78] **Weber, H.** Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901. – 348 p.

[79] **Bialynicki-Birula, I.** On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Polon. – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.

[80] **Bialynicki-Birula, I.** Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.

[81] **De Broglie, L.** L'équation d'Ondes du Photon / L. de Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1934. – Vol. 199. – P. 445–448.

[82] **De Broglie, L.** Sur le Spin du Photon / L. de Broglie, M. Winter // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1934. – Vol. 199. – P. 813–816.

[83] **De Broglie, L.** Sur un Cas de Réductibilité en Mécanique Ondulatoire des Particules de Spin 1 / L. de Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1939. – Vol. 208. – P. 1697–1700.

[84] **De Broglie, L.** Champs Réels et Champs Complexes en Théorie Électromagnétique Quantique du Rayonnement / L. de Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1940. – Vol. 211. – P. 41–44.

[85] **Mercier, A.** Expression des équations de l'Électromagnétisme au Moyen des Nombres de Clifford / A. Mercier // Arch. Sci. Phys. Nat. Genève. – 1935. – Vol. 17. – P. 1–34.

[86] **Petiau, G.** University of Paris thesis / G. Petiau // Acad. Roy. de Belg. Classe Sci. Mem. – 1936. – Vol. 2. – P. 16.

[87] **Proca, A.** Sur les Equations Fondamentales des Particules Élémentaires / A. Proca // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1936. – Vol. 202. – P. 1490–1492.

[88] **Proca, A.** Sur les Équations Relativistes des Particules Élémentaires / A. Proca // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1946. – Vol. 223. – P. 270–272.

[89] **Duffin, R.** On the Characteristic Matrices of Covariant Systems / R. Duffin // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 54. – P. 1114.

[90] **Kemmer, N.** The Particle Aspect of Meson Theory / N. Kemmer // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.

[91] **Kemmer, N.** The Algebra of Meson Matrices / N. Kemmer // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1943. – Vol. 39. – P. 189–196.

[92] **Kemmer, N.** On the Theory of Particles of Spin 1 / N. Kemmer // Helv. Phys. Acta. – 1960. – Vol. 33. – P. 829–838.

[93] **Bhabha, H.** Classical Theory of Meson / H. Bhabha // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 172. – P. 384.

[94] **Belinfante, F.** The Undor Equation of the Meson Field / F. Belinfante // Physica. – 1939. – Vol. 6. – P. 870.

[95] **Belinfante, F.** Spin of Mesons / F. Belinfante // Physica. – 1939. – Vol. 6. – P. 887–898.

[96] **Taub, A.** Spinor Equations for the Meson and their Solution when no Field is Present / A. Taub // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 56. – P. 799–810.

[97] **Sakata, S.** On the Wave Equation of the Meson / S. Sakata, M. Taketani // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. – 1940. – Vol. 22. – P. 757–770; Reprinted in: Suppl. Progr. Theor. Phys. – 1955. – Vol. 22. – P. 84.

[98] **Schrödinger, E.** Maxwell's and Dirac's Equations in Expanding Universe / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Acad. A. – 1940. – Vol. 46. – P. 25.

[99] **Schrödinger, E.** Pentads, Tetrads, and Triads of Meson matrices / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Acad. A. – 1943. – Vol. 48. – P. 135–146.

[100] **Schrödinger, E.** Systematics of Meson Matrices / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Acad. – 1943. – Vol. 49. – P. 29.

[101] **Heitler, W.** On the Particle Equation of the Meson / W. Heitler // Proc. Roy. Irish. Acad. – 1943. – Vol. 49. – P. 1.

[102] **Harish-Chandra.** On the Algebra of the Meson Matrices / Harish-Chandra // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1946. – Vol. 43. – P. 414.

[103] **Harish-Chandra.** The Correspondence Between the Particle and Wave Aspects of the Meson and the Photon / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 502–525.

[104] **Hoffmann, B.** The Vector Meson Field and Projective Relativity / B. Hoffmann // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 72. – P. 458.

[105] **Utiyama, R.** On the Interaction of Mesons with the Gravitational Field / R. Utiyama // Progr. in Theor. Phys. – 1947. – Vol. 2. – P. 38–62.

[106] **Mercier, A.** Sur les Fondements de l'Électrodynamique Classique (Méthode Axiomatique) / A. Mercier // Arch. Sci. Phys. Nat. Genàve. – 1949. – Vol. 2. – P. 584–588.

[107] **Imaeda, K.** Linearization of Minkowski Space and Five-Dimensional Space / K. Imaeda // Progress of Theor. Phys. – 1950. – Vol. 5. – P. 133–134.

[108] **Fujiwara, I.** On the Duffin-Kemmer Algebra / I. Fujiwara // Progr. Theor. Phys. – 1953. – Vol. 10. – P. 589–616.

[109] **Gürsey, F.** Dual Invariance of Maxwell's Tensor / F. Gürsey // Rev. Fac. Sci. Istanbul. A. – 1954. – Vol. 19. – P. 154–160.

[110] **Gupta, S.** Gravitation and Electromagnetism / S. Gupta // Phys. Rev. – 1954. – Vol. 96. – P. 1683–1685.

[111] **Ohmura, T.** A New Formulation on the Electromagnetic Field / T. Ohmura // Prog. Theor. Phys. – 1956. – Vol. 16. – P. 684–685.

[112] **Borgardt, A.** Matrix Aspects of the Boson Theory / A. Borgardt // Sov. Phys. JETP. – 1956. – Vol. 30. – P. 334–341.

[113] **Borgardt, A.** Wave Equatons for a Photon / A. Borgardt // JETF. – 1958. – Vol. 34. – P. 1323–1325.

[114] **Fedorov, F.** On the Reduction of Wave Equations for Spin-0 and Spin-1 to the Hamiltonian Form / F. Fedorov // JETP – 1957. – Vol. 4. – P. 139–141.

[115] **Kuohsien, T.** Sur les Theories Matricielles du Photon / T. Kuohsien // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1957. – Vol. 245. – P. 141–144.

[116] **Bludman, S.** Some Theoretical Consequences of a Particle Having Mass Zero / S. Bludman // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 107. – P. 1163–1168.

[117] **Good, Jr.R.** Particle Aspect of the Electromagnetic Field equations / Jr.R. Good // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 105. – P. 1914–1919.

[118] **Moses, H.** A Spinor Representation of Maxwell Equations / H. Moses // Nuovo Cimento Suppl. – 1958. – Vol. 1. – P. 1–18.

[119] **Moses, E.** Solutions of Maxwell's Equations in Terms of a Spinor Notation: the Direct and Inverse Problems / E. Moses // Phys. Rev. – 1959. – Vol. 113. – P. 1670–1679.

[120] **Moses, H.** Photon Wave Functions and the Exact Electromagnetic Matrix eEements for Hydrogenic Atoms / H. Moses // Phys. Rev. A. – 1973. – Vol. 8. – P. 1710–1721.

[121] **Da Silveira, Adel.** Kemmer Wave Equation in Riemann Space / Adel da Silveira // J. Math. Phys. – 1960. – Vol. 1. – P. 489–491.

[122] **Da Silveira, A.** Invariance algebras of the Dirac and Maxwell Equations / A. da Silveira // Nouvo Cim. A. – 1980. – Vol. 56. – P. 385–395.

[123] **Lomont, J.** Dirac-Like Wave Equations for Particles of Zero Rest mass and their Quantization / J. Lomont // Phys. Rev. 1958. – Vol. 11. – P. 1710–1716.

[124] **Kibble, T.** Lorentz Invariance and the Gravitational Field / T. Kibble // J. Math. Phys. 1961. – Vol. 2. – P. 212–221.

[125] **Bogush, A.** On Properties of the Duffin-Kemmer Matrices / A. Bogush, F. Fedorov // Doklady AN BSSR. – 1962. – Vol. 6. – P. 81–85.

[126] **Sachs, M.** On Covariant Formulations of the Maxwell-Lorentz Theory of Electromagnetism / M. Sachs, S. Schwebel // J. Math. Phys. – 1962. – Vol. 3. – P. 843–848.

[127] **Oliver, L.** Hamiltonian for a Kemmer Particle in an Electromagnetic Field / L. Oliver // Anales de Fisica. – 1968. – Vol. 64. – P. 407.

[128] **Beckers, J.** Vectorial Meson Equations in Relation to Photon Description / J. Beckers, C. Pirotte // Physica. – 1968. – Vol. 39. – P. 205.

[129] **Casanova, G.** Particules Neutre de Spin 1 / G. Casanova // C. R. Acad. Sci. Paris. A. – 1969. – Vol. 268. – P. 673–676.

[130] **Carmeli, M.** Group Analysis of Maxwell Equations / M. Carmeli // J. Math. Phys. – 1969. – Vol. 10. – P. 1699–1703.

[131] **Богуш, А.А.** К теории векторных частиц / А.А. Богуш. – Минск, 1971. – (Препринт / АН БССР, Институт физики).

[132] **Lord, E.** Six-Dimensional Formulation of Meson Equations / E. Lord // Int. J. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 5. – P. 339–348.

[133] **Weingarten, D.** Complex Symmetries of Electrodynamics / D. Weingarten // Ann. Phys. – 1973. – Vol. 76. – P. 510–548.

[134] **Mignani, R.** About a Dirac-Like Equation for the Photon, According to E. Majorana / R. Mignani, E. Recami, M. Baldo // Lett. Nuovo Cimento. – 1974. – Vol. 11. – P. 568–572.

[135] **Frankel, T.** Maxwell's Equations / T. Frankel // Amer. Math. Mon. – 1974. – Vol. 81. – P. 343–349.

[136] **Edmonds, J.** Comment on the Dirac-Like Equation for the Photon / J. Edmonds // Nuovo Cim. Lett. – 1975. – Vol. 13. – P. 185–186.

[137] **Стражев, В.И.** Электродинамика с магнитным зарядом / В.И. Стражев, Л.М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 322 с.

[138] **Jena, P.** Photon as the Zero-Mass Limit of DKP Field / P. Jena, P. Naik, T. Pradhan // J. Phys. A. – 1980. – Vol. 13. – P. 2975–2978.

[139] **Chow, T.** A Dirac-Like Equation for the Photon / T. Chow // J. Phys. A. – 1981. – Vol. 14. – P. 2173–2174.

[140] **Fushchich, V.I.** Symmetries of Maxwell's Equations / V.I. Fushchich, A.G. Nikitin. – Kiev: Naukova Dumka, 1983. – 200 p.; Dordrecht: Reidel, 1987. – 214 p.

[141] **Cook, R.** Photon Dynamics / R. Cook // Phys. Rev. A. – 1982. – Vol. 25. – P. 2164–2167.

[142] **Cook, R.** Lorentz Covariance of Photon Dynamics / R. Cook // Phys. Rev. A. – 1982. – Vol. 26. – P. 2754–2760.

[143] **Giannetto, E.** A Majorana-Oppenheimer Formulation of Quantum Electrodynamics / E. Giannetto // Lett. Nuovo Cim. – 1985. – Vol. 44. – P. 140–144.

[144] **Kidd, R.** Evolution of the Modern Photon / R. Kidd, J. Ardini, A. Anton // Am. J. Phys. – 1989. – Vol. 57. – P. 27.

[145] **Recami, E.** Possible Physical Meaning of the Photon Wave-Function, According to Ettore Majorana / E. Recami // Proc. Fourth Int. Workshop on Hadronic Mechanics and Non-Potential Interactions, Skopje, Yugoslavia, 22–26 August 1988 / Edit.: M. Mijatovic. – New York: Nova Sc. Pub., 1990. – P. 231–238.

[146] **Кривский, И.Ю.** Основы квантовой электродинамики в терминах напряженностей / И.Ю. Кривский, В.М. Симулик. – Киев: Наукова думка, 1992. – 286 с.

[147] **Baylis, W.E.** Light Polarization: A geometric algebra approach / W.E. Baylis // Amer. J. Phys. – 1993. – Vol. 61. – P. 534–545.

[148] **Inagaki, T.** Quantum-Mechanical Approach to a Free Photon / T. Inagaki // Phys. Rev. A. – 1994. – Vol. 49. – P. 2839–2843.

[149] **Bialynicki-Birula, I.** Beams of Electromagnetic Radiation Carrying Angular Momentum: The Riemann-Silberstein Vector and the Classical-Quantum Correspondence / I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicka-Birula // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2006. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0511011.

[150] **Sipe, J.** Photon Wave Functions / J. Sipe // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 52. – P. 1875–1883.

[151] **Ghose, P.** Relativistic Quantum Mechanics of Spin-0 and Spin-1 Bosons / P. Ghose // Found. Phys. – 1996. – Vol. 26. – P. 1441–1455.

[152] **Esposito, S.** Covariant Majorana Formulation of Electrodynamics / S. Esposito // Found. Phys. – 1998. – Vol. 28. – P. 231–244.

[153] **Dvoeglazov, V.** Speculations on the Neutrino Theory of Light / V. Dvoeglazov // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 1999. – Vol. 24. – P. 111–127.

[154] **Dvoeglazov, V.** Historical Note on Relativistic Theories of Electromagnetism / V. Dvoeglazov // Apeiron. – 1998. – Vol. 5. – P. 69–88.

[155] **Dvoeglazov, V.** Generalized Maxwell and Weyl Equations for Massless Particles / V. Dvoeglazov // Rev. Mex. Fis. – 2003. – Vol. 49. – P. 99–103.

[156] **Gersten, A.** Maxwell Equations as the One-Photon Quantum Equation / A. Gersten // Found. of Phys. Lett. – 1998. – Vol. 12. – P. 291.

[157] **Gsponer, A.** On the "equivalence" of the Maxwell and Dirac Equations / A. Gsponer // Int. J. Theor. Phys. – 2002. – Vol. 41. – P. 689–694.

[158] **Ivezić, T.** True Transformations Relativity and Electrodynamics / T. Ivezić // Found. Phys. – 2001. – Vol. 31. – P. 1139.

[159] **Ivezić, T.** The Invariant Formulation of Special Relativity, or the "True Transformations Relativity", and Electrodynamics / T. Ivezić // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2002. – Vol. 27. – P. 287–302.

[160] **Ivezić, T.** An Invariant Formulation of Special relativity, or the True Transformations Relativity and Comparison with Experiments / T. Ivezić // Found. Phys. Lett. – 2002. – Vol. 12. – P. 27.

[161] **Ivezić, T.** Invariant Relativistic Electrodynamics. Clifford Algebra Approach / T. Ivezić // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2002. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/hep-th/0207250.

[162] **Ivezić, T.** The Proof that the Standard Transformations of E and B are not the Lorentz Transformations / T. Ivezić // Found. Phys. – 2003. – Vol. 33. – P. 1339.

[163] **Ivezić, T.** The Difference Between the Standard and the Lorentz Transformations of the Electric and Magnetic Fields. Application to Motional EMF / T. Ivezić // Found. Phys. Lett. – 2005. – Vol. 18. – P. 301.

[164] **Ivezić, T.** The Proof that Maxwell's Equations with the 3D E and B are not Covariant upon the Lorentz Transformations but upon the Standard Transformations. The new Lorentz-Invariant Field Equations / T. Ivezić // Found. Phys. – 2005. – Vol. 35. – P. 1585.

[165] **Ivezić, T.** Axiomatic Geometric Formulation of Electromagnetism with only one axiom: the Field Equation for the bivector Field F with an Explanation of the Trouton-Noble Experiment / T. Ivezić // Found. Phys. Lett. – 2005. – Vol. 18. – P. 401.

[166] **Ivezić, T.** Lorentz Invariant Majorana Formulation of the Field Equations and Dirac-like Equation for the Free Photon / T. Ivezić // EJTP. – 2006. – Vol. 3. – P. 131–142.

[167] **Donev, S.** Complex Structures in Electrodynamics / S. Donev // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2001. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/math-ph/0106008.

[168] **Donev, S.** From Electromagnetic Duality to Extended Electrodynamics / S. Donev // Annales Fond. L. de Broglie. – 2004. – Vol. 29. – P. 375–392.

[169] **Donev, S.** Extended Electrodynamics: A Brief Review / S. Donev, M. Tashkova // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1995. – Vol. 450. – P. 281.

[170] **Rollin S. Armour, Jr.** Spin-1/2 Maxwell fields / Jr. Rollin S. Armour // Found. Phys. – 2004. – Vol. 34. – P. 815–842.

[171] **Kurşunoĝlu, B.** Complex Orthogonal and Antiorthogonal Representation of Lorentz Group / B. Kurşunoĝlu // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 22–32.

[172] **Macfarlane, A.** On the Restricted Lorentz Group and Groups Homomorphically Related to it / A. Macfarlane // J. Math. Phys. – 1962. – Vol. 3. – P. 1116–1129.

[173] **Macfarlane, A.** Dirac Matrices and the Dirac Matrix Description of Lorentz Transformations / A. Macfarlane // Commun. Math. Phys. – 1966. – Vol. 2. – P. 133–146.

[174] **Федоров, Ф.И.** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.

[175] **Дуань И-ши.** Общековариантные уравнения полей с произвольными спинами / Дуань И-ши // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, вып. 3. – С. 632–636.

[176] **Hjalmars, S.** Wave Equations for Scalar and Vector Particles in Gravitational Fields / S. Hjalmars // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 663–666.

[177] **Вайнберг, С.** Гравитация и космология / С. Вайнберг. – Москва: Мир, 1975. – 695 с.

[178] **Богуш, А.А.** Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск: Наука и техника, 1968. – 386 с.

[179] **Варшалович, Д.А.** Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград: Наука, 1975. – 441 с.

[180] **Олевский, М.Н.** Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М.Н. Олевский // Мат. Сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

[181] **Schwarzschild, K.** Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie / K. Schwarzschild // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. K1. – 1916. – P. 189–196.

[182] **Bachelot, A.** Gravitational scattering of electromagnetic field by Schwarzschild black-hole / A. Bachelot // Annales de l'institut Henri Poincarée (A) Physique theorique. – 1991. – Vol. 54, № 3 – P. 261–320.

[183] **Newman, E.T.** New Approach to Einstein and Maxwell-Einstein field equations / E.T. Newman // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 674–676.

[184] **Чандрасекхар, С.** Математическая теория черных дыр: в 2 ч. / С. Чандрасекхар. – Москва: Мир, 1986. – 2 ч.

[185] **Пенроуз, Р.** Спиноры и пространство-время: в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. – Москва: Мир, 1987. – Т. 1: Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. – 528 с.

Публикации авторов, составившие основу этой книги

[186] **Red'kov, V.M.** On the different forms of the Maxwell's electromagnetic equations in a uniform media / V.M. Red'kov, George J. Spix // Nonlinear Phenomena in Complex Systems: Proc. of XIIth Annual Seminar NPCS, Minsk, May 17–20, 2005 / Ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2005. – P. 118–133.

[187] Maxwell equations in Riemannian space-time, geometrical modeling of medias / **V.M. Red'kov**, N.G. Tokarevskaya, E.M.Bychkouskaya, George J. Spix // Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. of XIIIth Annual Seminar NPCS, Minsk, May 16–19, 2006 / ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2006. – P. 207–228.

[188] Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / **V.M. Red'kov**, N.G. Tokarevskaya, E.M. Bychkouskaya, George J. Spix // Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. of XIVth Annual Seminar NPCS, Minsk, May 22–25, 2007 / Ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2007. – P. 126–139.

[189] Duffin–Kemmer–Petiau formalism reexamined: non-relativistic approximation for spin 0 and spin 1 particles in a Riemannian space–time / **A.A. Bogush**, V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Annales de la Fondation Louis de Broglie. – 2007. – Vol. 32, No 2-3. – P. 355–381.

[190] Matrix-based approach to electrodynamics in media / **A.A. Bogush**, V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, George J. Spix // Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. of XIVth Annual Seminar NPCS, Minsk, May 22–25, 2008 / Ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2008. – P. 20–39.

[191] Электродинамика Максвелла в комплексном формализме, решения с цилиндрической симметрией в пространстве Римана / **А.А. Богуш**, Г.Г. Крылов, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 52–58.

[192] **Red'kov, V.M.** Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, E.M. Ovsiyuk, George J. Spix // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 232–250.

[193] **Овсиюк, Е.М.** О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.

[194] Maxwell equations in matrix form, squaring procedure and structure of the electromagnetic solutions / **V.V. Kisel**, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, H.G. Tokarevskaya // Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. of XVI th Annual Seminar NPCS, Minsk, May 19–22, 2009 / Ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2009. – P. 144–168.

[195] Majorana-Oppebheimer approach to Maxwell electrodynamics in Riemannian space-time / **A. Bogush**, V. Red'kov, N. Tokarevskaya, G. Spix // Proc. of 14th International Conference and School "Foundation & Advances in Nonlinear Science", Minsk, September 22–25, 2008 / Belarusian State University; ed.: V.I. Kuvshinov, G.G. Krylov. – Minsk, 2009. – P. 20–49.

[196] **Bogush, A.A.** Maxwell equation in Duffin–Kemmer tetrad form, spherical waves in Riemann spaces S_3 / A.A. Bogush, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. of XVI Annual Seminar NPCS, Minsk, May 19–22, 2009 / Ed.: L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2009. – P. 122–129.

[197] **Редьков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 496 с.

[198] Maxwell Equations in Complex Form Of Majorana–Oppenheimer, Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 Spaces / **A.A. Bogush**, G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

[199] Maxwell equations in complex form of Majorana–Oppenheimer, solutions with cylindric symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces / **A.A. Bogush**, G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

[200] Maxwell equations in complex form, squaring procedure and separating the variables / **V.V. Kisel**, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya // Ricerche di matematica. – DOI: 10.1007/s11587-010-0092-7 (in press).

[201] **Ovsiyuk, E.M.** Spherical waves of spin-1 particle in anti de Sitter space-time / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, № 6. – P. 1247–1276.

Научное издание

Овсиюк Елена Михайловна
Редьков Виктор Михайлович

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Монография

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Корректор Л. Н. Боженко
Оригинал-макет Е. В. Лис

Подписано в печать 04.04.2011. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Ризография. Усл. печ. л. 14,25.
Тираж 100 экз. (1-й завод 1–71 экз.). Заказ 18.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
им. И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г.
247760, Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (02351) 2-46-29