Физико-математические науки и образование: проблемы и перспективы исследований

Мозырь
2011

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЕ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сборник научных трудов
преподавателей физико-математического факультета

Мозырь
2011

УДК 378.147.88
ББК 530.1+530.12
Ф50

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН РБ,
профессор кафедры оптики УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
А. Н. Сердюков

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Ф50 **Физико**-математические науки и образование: проблемы и перспективы исследований : сб. науч. тр. преподавателей физ.-мат. фак. / редкол.: И. Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2011. – 266 с.
ISBN 978-985-477-461-9.

В сборнике представлены статьи преподавателей физико-математического факультета по результатам научных исследований за прошедшие пять лет (2006–2010 гг.). В статьях анализируются актуальные проблемы и перспективы развития современной математики и физики, методологические проблемы внедрения современных информационных технологий и инновационных методик в учебный процесс школы и вуза.

УДК 378.147.88
ББК 530.1+530.12

ISBN 978-985-477-461-9

Научное издание

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЕ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сборник научных трудов
преподавателей физико-математического факультета

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Технический редактор Н. В. Ропот
Оригинал-макет Е. В. Лис
Корректоры: Е. М. Мельченко, М. М. Макаревич

Подписано в печать 29.09.2011. Формат 60x90 1/8. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Ризография. Усл. печ. л. 33,125.
Тираж 100 экз. (1-й завод 1–23 экз.) Заказ 41.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
им. И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г.
247760, Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (0236) 32-46-29

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборнике «Физико-математические науки и образование: проблемы и перспективы исследований» представлены статьи преподавателей физико-математического факультета по результатам научных исследований за прошедшую пятилетку (2005–2010 гг.).

На физико-математическом факультете достигнуты высокие показатели в научно-педагогической деятельности.

Учеными факультета выполнены 4 задания, включенные в государственные комплексные программы научных исследований (рук. д. ф.-м. н., проф. Шепелевич В.В., д. тех. н., проф. Савенко В.С., канд. ф.-м. н., доц. Гречанников Э.Е.). Из средств Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований профинансированы три научно-исследовательские работы, выполненные под руководством доктора физико-математических наук, профессора Шепелевича В.В., кандидата физико-математических наук, доцента Сергиевича Н.В., кандидата физико-математических наук Навныко В.Н.

Завершилось выполнение двух хозяйственных договоров с предприятиями Республики Беларусь под руководством доктора физико-математических наук, профессора Кулака Г.В. и доктора физико-математических наук, профессора Шепелевича В.В. Разработки преподавателей и сотрудников факультета внедрены на базе научно-производственного частного унитарного предприятия «ЛЭМТ» Белорусского оптико-механического объединения и ОАО «Рогачевский завод «Диапроектор».

В июле 2010 года подписано соглашение о заинтересованности ОАО «Рогачевский завод «Диапроектор» в результатах выполняемой коллективом кафедры теоретической физики научно-исследовательской работы «Разработка методов формирования перестраиваемых оптических микроструктур и создание на их основе дифракционных и волноводных элементов для управления световыми полями», включенной в Государственную программу научных исследований «Электроника и фотоника» (2011–2013 гг.). Завод будет способствовать внедрению полученных научных результатов на предприятии.

Получен патент на изобретение «Способ считывания пропускающей голограммы, записанной в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле со структурой силленита в диффузионном режиме» (автор – д. ф.-м. н., проф. Шепелевич В.В.).

За 2006–2010 гг. изданы 5 монографий (авторы – канд. ф.-м. н., доц. Сергиевич Н.В., к. пед. н., доц. Астрейко Е.С., ст. преп. Полоз М.И., д. тех. н., проф. Савенко В.С., канд. пед. н., доц. Равуцкая Ж.И.). Выполняя заказ главного информационно-аналитического центра МО РБ, коллектив преподавателей факультета разработал «Программно-методический комплекс «Геометрия 8 класс»: поддержка учебника Н.М. Рогановского».

На факультете особое внимание уделяется подготовке кадров высшей квалификации. В 2006–2010 гг. защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Сергиевич Н.В. (н/р Юдин М.Д.), Навныко В.Н. (н/р Шепелевич В.В.), Гуцко Н.В. (н/р Скиба А.Н.), Николаенко Т.В. (н/р Кулак Г.В.), Овсиюк Е.М. (н/р Курочкин Ю.А.). Профессору кафедры общей физики и МПФ Кулаку Геннадию Владимировичу присвоено ученое звание профессора.

Факультет имеет научные, творческие связи с ведущими учебными заведениями Республики Беларусь и стран СНГ. Развиваются международные связи с Томским государственным университетом систем управления и радиоэлектроники (Россия), Кокшетауским государственным университетом им. Ш. Уалиханова (Казахстан), Сумским государственным педагогическим университетом им. А.С. Макаренко (Украина) и др. Успешно завершен совместный с Институтом прикладной оптики Йенского университета (Германия) международный проект «Взаимодействие гауссовых световых пучков в фоторефрактивных кристаллах».

Аспиранты, магистранты, студенты физико-математического факультета ежегодно становятся лауреатами Республиканского конкурса научных работ высших учебных заведений Республики Беларусь. За особые успехи в учебно-познавательной и научно-исследовательской деятельности аспирантке кафедры теоретической физики Давыдовской В.В. и студенту 3 курса Дубине М.В. назначены стипендии Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных студентов и талантливой молодежи (н/р Шепелевич В.В.).

Ежегодно команды студентов физико-математического факультета результативно участвуют в соревнованиях по программированию различного уровня.

В ноябре 2007 года команда студентов физико-математического факультета под руководством доцента кафедры информатики и МПИ Сергиевича Н.В. и старшего преподавателя кафедры информатики и МПИ Полоза М.И. вошла в число победителей отборочных соревнований командного чемпионата мира по программированию среди студентов Западного региона (1/4 финала) и успешно выступила в полуфинале командного чемпионата мира по программированию среди студентов Северо-восточного региона в г. Санкт-Петербурге.

В октябре 2010 года команда студентов факультета успешно выступила в четвертьфинале командного чемпионата мира по программированию среди студентов Западного региона, проходившего в БГУ.

На всероссийской олимпиаде с международным участием по высшей и элементарной математике среди студентов педагогических вузов, которая проводилась 11 ноября 2010 года Уральским государственным педагогическим университетом (г. Екатеринбург) в режиме онлайн, студенты физмата УО «МГПУ им. И.П. Шамякина» завоевали первое командное место в общем зачете. Всего участвовало – 13 команд из 11 городов РФ (Челябинск, Шадринск, Уфа, Бирск, Нижний Новгород, Оренбург, Орск, Пермь, Курган, Нижний Тагил, Екатеринбург) и команда г. Мозыря.

Переход на инновационную модель образования предполагает принципиально иную организацию учебного процесса и предъявляет новые требования к профессиональной подготовке учителя. Опыт использования в учебном процессе современных образовательных технологий постоянно обсуждается в рамках факультетских семинаров и конференций. На факультете ежегодно проводится международная интернет-конференция «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам».

Факультет тесно сотрудничает с отделами образования Гомельской области. Ежегодно проводятся совместные научно-методические семинары с учителями физики и математики школ Гомельской области. Завершена работа по трем хозяйственным договорам факультета с Мозырским государственным областным лицеем и отделом образования Ельского районного исполнительного комитета. Результатом явилось внедрение инновационных технологий в учебный процесс учреждений образования данных регионов.

В целях дальнейшего совершенствования работы по выявлению и развитию творческого потенциала молодых граждан, развития научно-исследовательской деятельности учащихся общеобразовательных учреждений начала работать инновационная площадка «Интеллектуал: юный физик, юный математик» на базе Мозырского областного лицея. Преподаватели факультета проводят занятия для учащихся лицея по подготовке к олимпиадам по математике и физике.

Коллектив физико-математического факультета и в дальнейшем нацелен на реализацию важнейших государственных задач – выполнение практико-ориентированных исследований, использование современных технологий в преподавании, развитие науки и образования в Республике Беларусь.

Е. С. Астрейко

ЭТАПЫ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА К ИННОВАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Современный этап социально-экономического и научно-технического прогресса способствует углублению интеграции между наукой, техникой, производством и системой образования. В документах, определяющих развитие системы педагогического образования [1], особое внимание уделяется инновационным процессам в образовании. Это обуславливает необходимость подготовки творчески мыслящих специалистов, которые способны ориентироваться в постоянно изменяющемся потоке информации, умеют самостоятельно принимать решения в ситуации выбора, осознанно осуществляют инновационную деятельность.

Инновационно-педагогическая деятельность проблемно ориентирована, продуктивна, является основой педагогического творчества и предполагает интеграцию познавательной, преобразовательной, управленческой и оценочной сфер. И.И. Цыркун [2; 3] характеризует целостную инновационную деятельность педагога как самостоятельный тип деятельности, которая выступает особой формой активности инноватора, направлена на решение проблем, связанных с преобразованием нормативно одобренных дидактических предписаний.

Рассмотрение инновационно-педагогической деятельности как типа деятельности обусловливает необходимость обращения к педагогической категории – инновационным умениям. Под *инновационными умениями* понимается владение субъектом способами инновационно-педагогической деятельности, которые характеризуются осознанностью, обобщенностью, иерархичностью, возможностью их творческого переноса в процессе решения инновационных проблем в сфере обучения.

Состав, структура и специфика инновационно-педагогической деятельности явились основой при разработке *системы инновационных умений будущих педагогов*. На макроуровне выделены умения познавательной, преобразовательной, управленческой, оценочной сфер инновационной деятельности, а также метаинновационное умение осуществления целостной инновационной деятельности. На микроуровне – поисковое, аналитическое, модельное, конструктивное, программное, экспериментальное, рефлексивное, информационное умения.

В качестве источников разработки концептуальных оснований процесса формирования системы инновационных умений у будущих педагогов использованы ассоциативно-рефлекторная концепция, теории учебной деятельности, поэтапного формирования умственных действий, проблемного и эвристического обучения, а также культурно-праксиологическая концепция специальной инновационной подготовки специалистов гуманитарной сферы.

Концептуальные основания позволили разработать методику формирования системы инновационных умений у будущих учителей физики и математики, генетическим ядром которой является стратегия решения инновационных проблем.

На основании инновационной стратегии разработана *общая эвристика*, в которую включены следующие действия: анализ ситуации в сфере обучения, формулирование инновационной проблемы, разработка плана решения инновационной проблемы, реализация плана решения инновационной проблемы на практике, рефлексия процесса и результатов решения инновационной проблемы.

Отдельное указание общей эвристики является основой для создания частных и конкретных эвристик, которые ориентированы на формулирование инновационной проблемы, выдвижение инновационного предложения, составление плана решения инновационной проблемы и т. д.

Вся совокупность средств формирования системы инновационных умений у будущих педагогов отражена в разработанном нами дидактическом комплексе, который представлен в виде программы спецкурса «Подготовка педагогов к инновационной деятельности в сфере обучения» [4], учебно-методических пособий «Система инновационных умений педагога: состав, структура и методика формирования» [5] и «Комплекс специальных дидактических средств формирования системы умений инновационно-педагогической деятельности у студентов» [6]; компьютерной базы данных инновационной системы в сфере обучения учащихся физике и математике; структурных формул инновационных потоков, образцов решения типовых инновационных проблем в сфере обучения; эвристики; специальных упражнений и заданий по отработке отдельных видов инновационных умений, контролирующих программ и тестовых заданий.

Процесс формирования системы инновационных умений у будущих педагогов в период обучения в педагогическом вузе разделяется на следующие этапы: *пропедевтика, инновационная школа, инновационное созидание.*

На *пропедевтическом этапе* создаются предпосылки самопознания и саморазвития личности, показывается профессиональная значимость творческих процессов в деятельности учителя-предметника; осуществляется мотивация и стимулирование к предстоящей инновационной деятельности; расширяется и углубляется круг научных знаний студентов о методах обучения, создаются предпосылки формирования основных понятий педагогической инноватики (инновационная проблема, инновационная деятельность, нововведение и др.). Они создают свои первые педагогические произведения: творческие рефераты, эссе, описания педагогического опыта учителей-новаторов.

В таблице 1 представлена технологическая карта, отражающая курс и последовательности дидактических процедур формирования системы инновационных умений у будущих педагогов в сфере обучения на пропедевтическом этапе.

Таблица 1 – Технологическая карта курса и последовательностей дидактических процедур на пропедевтическом этапе

Дидактические задачи	– сформировать основные понятия инновационной области; – показать профессиональную значимость творческих процессов в деятельности учителя-предметника; – осуществить мотивирование и стимулирование будущих педагогов к предстоящей инновационной деятельности; – сформировать умения инновационной деятельности на микроуровне
Доминирующие принципы	– мотивирование будущих педагогов к осуществлению инновационной деятельности; – осуществление межпредметных связей педагогической инноватики с общепедагогическими и специальными дисциплинами
Доминирующее содержание	– прогрессивный педагогический опыт в сфере обучения физике и математике; – межпредметные связи с гуманитарными и социальными, общенаучными и общепрофессиональными, специальными дисциплинами
Оптимальные методы, формы и средства обучения	– метод изучения литературы; – метод классификации информации; – метод наблюдения; – конструирование физических приборов; – учебные пособия и методические рекомендации; – эвристики; – организация выставок педагогических произведений
Промежуточные результаты	– представление об инновационном цикле, основных понятиях педагогической инноватики; – методические произведения: творческие рефераты, эссе, описание прогрессивного педагогического опыта, педагогического новшества

Для решения проблемы формирования у будущих педагогов понятий инновационной области используются возможности межпредметных связей, характеризующиеся временным признаком: предшествующие, сопутствующие и перспективные [7, 20]. Так, в базовых учебных планах по специальностям «Физика. Математика», «Физика. Информатика» предусмотрено изучение следующих дисциплин: «Теория и история культуры», «Философия», «Общие основы педагогической профессии», «Педагогика современной школы: теоретический аспект», «Педагогические системы и технологии: практический аспект», «Общая психология», «Педагогическая психология», «Методика преподавания физики», «Методика преподавания математики», «Методика и техника школьного физического эксперимента».

Изучение отдельных тем типовых программ вышеуказанных дисциплин показало, что их содержание обладает определенными возможностями для сообщения студентам знаний об основных понятиях педагогической инноватики: новшество, инновационная деятельность, формы инновационной деятельности, инновационная проблема.

Анализ содержания гуманитарных и социальных дисциплин с точки зрения реализации предшествующих межпредметных связей показал, что они способствуют ознакомлению студентов с такими понятиями, как новшество, инновационная деятельность.

В ходе изучения гуманитарных и методических дисциплин реализуются предшествующие и сопутствующие межпредметные связи. Студенты знакомятся с сущностью понятий: инновационно-педагогическая деятельность, учитель-инноватор, инновационное умение, инновационная проблема.

При изучении методических дисциплин реализуются сопутствующие и перспективные межпредметные связи. Студенты учатся моделировать учебный процесс, выделяют учебные проблемы, разрабатывают эвристические предписания для изучения тем школьного курса физики, разрабатывают планы-конспекты уроков.

В связи с этим в содержание учебной дисциплины «Методика преподавания физики» была включена тема «Инновационная деятельность учителя физики». В курсе лекций определялась значимость инновационной деятельности учителей физики, раскрывались ее структура и методологические основы, выделялись инновационные проблемы в сфере обучения.

Данная тема дополняется семинарскими и практическими занятиями. На семинарском занятии «Содержание инновационной деятельности учителя физики» рассматривались способы выполнения отдельных действий инновационной деятельности. На практических занятиях проводилась отработка представленных действий (умений) посредством выполнения будущими педагогами следующих заданий:

1. Прочитайте статью и определите инновационную проблему, поставленную автором, а также пути ее решения.

2. Разработайте новшество, направленное на оптимизацию учебных занятий по физике (математике).

3. Изучите передовой педагогический опыт учителя физики (математики) высшей категории.

4. Изготовьте физический прибор и др.

Выполнение заданий способствует изменению отношения будущих педагогов к тем преобразованиям, которые происходят в системе школьного образования в результате перехода к инновационному обучению. Это является главным фактором в процессе поиска новшеств, включения элементов инноваций в свою профессиональную деятельность, а также способствует формированию умений познавательной и преобразовательной сфер инновационной деятельности.

Пропедевтический этап завершается анализом созданных будущими учителями первых методических произведений: творческих рефератов, эссе, описаний прогрессивного педагогического опыта, педагогических новшеств.

Технологическая карта, задающая курс и последовательности дидактических процедур на *этапе инновационной школы*, представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Технологическая карта курса и последовательностей дидактических процедур на этапе инновационной школы

Дидактические задачи	– создать у будущих педагогов целостное представление об инновационной деятельности; – организовать и отработать сообщенные ориентировочные основы содержания инновационных умений в сфере обучения; – создание педагогических произведений
Доминирующие принципы	– культурно-праксиологическая генерализация предметно-содержательной основы формирования системы инновационных умений; – изоморфизм формирования системы инновационных умений стратегии решения инновационных проблем; – дифференциация обучения; – поэтапность формирования инновационных умений групповых и коллективных форм работы
Доминирующее содержание	– спецкурс «Подготовка педагогов к инновационной деятельности в сфере обучения»; – типовые инновационные проблемы; – эвристические предписания
Оптимальные методы, формы и средства обучения	– метод изучения литературы; – метод мозговой атаки; – метод идеализации; – метод оптимального проектирования; – метод конструирования физических приборов; – тренинги в рамках спецкурса; – блиц-игра «Я – Инноватор»; – тестирование; – конкурс инновационных проектов; – выставка педагогических произведений
Промежуточные результаты	– определение обучающимися целей и задач нововведения; – выявление независимых и зависимых переменных процесса обучения, предварительных критериев и оценки новшеств; – описание проекта курса обучения и его апробация; – формирование инновационных умений на микроуровне

Данный этап формирования системы инновационных умений у будущих учителей физики и математики осуществлялся в рамках спецкурса «Подготовка педагогов к инновационной деятельности в сфере обучения».

Процесс формирования системы инновационных умений у будущих педагогов опирался на концептуальные основания и включал *диагностическую, ориентировочную, формирующую, тренировочную, оценочную, диагностико-коррекционную* стадии.

Инновационная деятельность студентов организовывалась таким образом, чтобы побуждать их к поиску собственного пути для достижения поставленного результата. При этом предполагалось, что в процессе решения инновационных проблем будущими учителями физики и математики могли быть использованы уже существующие, предложенные другими педагогами способы решения инновационных проблем.

Формирование системы инновационных умений у будущих педагогов на данном этапе осуществляется при разработке педагогического произведения в форме инновационного проекта, к которому предъявлялись следующие требования:

1. Описать инновационную ситуацию.
2. Сформулировать противоречие и/или несколько противоречий, инновационную проблему.
3. Определить тему дидактического нововведения.
4. Выделить цель дидактического нововведения.
5. Кратко научно обосновать дидактическое нововведение.
6. Представить сущность дидактического новшества.
7. Выявить степень новизны.
8. Представить экспериментальные результаты, связанные с реализацией новшества.
9. Сформулировать выводы

В ходе дискуссии разработанные студентами проекты анализируются, сопоставляются, обобщаются. В результате на данном этапе органично сочетаются и развиваются умения управленческой и оценочной сферы инновационно-педагогической деятельности.

Разработанные инновационные проекты в дальнейшем становятся основой для создания выставок инновационно-педагогических произведений, написания научных статей, моделирования учебного процесса во время педагогической практики.

Особенностью учебной инновационной деятельности студентов является то, что в большинстве случаев в процессе решения инновационных проблем студенты овладевают способами ее выполнения.

На *этапе инновационного созидания* формирования системы инновационных умений у будущих педагогов в сфере обучения происходит совершенствование инновационных умений на микроуровне, формирование инновационных умений на макроуровне. Таблица 3 содержит технологическую карту, задающую курс и последовательности дидактических процедур на данном этапе.

Таблица 3 – Технологическая карта курса и последовательностей дидактических процедур на этапе инновационного созидания

Дидактические задачи	– формировать способность рефлексии и обогащения культурных традиций
Доминирующие принципы	– культурно-праксиологическая генерализация предметно-содержательной основы формирования
Доминирующее содержание	– системы инновационных умений; – поэтапность формирования инновационных умений, работа в исследовательской группе «Инноватор»; – инновационно-педагогические проблемы; – факторы, обеспечивающие эффективность учебной инновационной деятельности; – методы психофизиологической поддержки
Оптимальные методы, формы и средства обучения	– метод изучения литературы; – классификация информации; – метод ликвидации тупиковых ситуаций; – метод оптимального проектирования; защита педагогических произведений
Промежуточные результаты	– выполнение заданий, требующих самостоятельной разработки способов решения инновационных проблем; – описание полученного эффекта от нововведения и выводы

Обогащение знаний применительно к решению инновационных проблем сферы обучения на этапе *инновационного созидания* было организовано посредством работы в проблемной группе «Инноватор». Научными направлениями работы группы были следующие: информационные технологии в обучении физике, современный урок физики в средней школе, реализация принципов историзма и воспитывающего обучения в процессе преподавания физики и др.

В заключение отметим, что в результате педагогического эксперимента на основе качественного и количественного анализа выявлено положительное влияние разработанной методики на уровень сформированности системы инновационных умений у будущих педагогов. В процессе исследования определено, что разработанная методика формирования системы инновационных умений у будущих педагогов обеспечивает перевод студентов на более высокие уровни (базовый, нормативный, генеративный), т. е. позволяет управлять данным процессом; успешнее формируются программное, экспериментальное и рефлексивное умения инновационной деятельности (значения кумулятивного индекса соответственно равны 0,87; 0,89; 0,85).

Литература

1. Концепция развития системы педагогического образования в Республике Беларусь : проект / П.Д. Кухарчик [и др.] ; под общ. ред. И.И. Цыркуна. – Минск : БГПУ, 2008. – 32 с.
2. Цыркун, И.И. Система инновационной подготовки специалистов гуманитарной сферы / И.И. Цыркун. – Минск : Тэхналогія, 2000. – 326 с.
3. Цыркун, И.И. Инновационное образование педагога: на пути к профессиональному творчеству : пособие / И.И. Цыркун, Е.И. Карпович. – Минск : БГПУ, 2006. – 311 с.
4. Астрейко, Е.С. Подготовка педагогов к инновационной деятельности в сфере обучения : учеб. прогр. спецкур. / Е.С. Астрейко. – Мозырь : УО МГПУ, 2003. – 18 с.
5. Астрейко, Е.С. Система инновационных умений педагога: состав, структура и методика формирования : учеб.-метод. пособие / Е.С. Астрейко. – Мозырь : УО МозГПУ, 2005. – 96 с.
6. Астрейко, Е.С. Комплекс специальных дидактических средств формирования системы умений инновационно-педагогической деятельности у студентов : учеб.-метод. пособие / Е.С. Астрейко. – Мозырь : УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2008. – 46 с.
7. Зверев, И.Д. Межпредметные связи в современной школе / И.Д. Зверев. – М. : Педагогика, 1981. – 160 с.

Е. С. Астрейко, Н. С. Астрейко, О. Н. Фещенко

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПОРТФОЛИО СТУДЕНТА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ГОТОВНОСТИ БУДУЩИХ ПЕДАГОГОВ К ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

На современном этапе социально-экономические условия нашей республики требуют повышения кадрового потенциала на основе модернизации системы непрерывного профессионального образования. Ключевой фигурой остается педагог – личность активная, целеустремленная, деятельностная, совершенствующая профессиональные качества для решения задач, поставленных перед ней государством и обществом.

Однако современная педагогическая действительность характеризуется высоким темпом изменений, обогащением направлений и содержания деятельности учителя, усилением требований к его личностным и профессиональным качествам, результатам труда. Следовательно, сегодня он должен быть готов гибко реагировать на изменения образовательной ситуации, быстро адаптироваться к новым условиям, учитывать специфику существующих педагогических систем, стремиться в полной мере реализовать свой личностно-профессиональный потенциал.

В связи с этим процесс модернизации общего среднего образования в Республике Беларусь ставит перед педагогической общественностью ряд новых задач, успешное решение которых будет способствовать обеспечению качества подготовки подрастающего поколения:

– мотивация к образовательным достижениям;
– формирование (совершенствование) личностных пристрастий, построение собственной шкалы ценностей;
– развитие личностно-профессионального креативного мышления;
– умение работать с образовательными ситуациями, моделировать их и находить эффективные пути решения;
– развитие коммуникативности, эмпатии, восприимчивости;
– воспитание толерантности, интереса к иной культуре, способности вести диалог на различных уровнях;
– повышение конкурентоспособности будущего специалиста.

Для решения поставленных задач, связанных с повышением качества подготовки учителя физики, совершенствованием его профессионально-педагогической культуры, развитием профессиональной компетентности, большую роль играет система методической работы общеобразовательного учреждения.

Под *методической работой общеобразовательного учреждения* будем понимать систему научно-практических мероприятий, базирующихся на достижениях педагогики и смежных наук (психологии, педагогики, методики, социологии и др.), идеях передового педагогического опыта и обеспечивающую профессиональную адаптацию, становление, развитие и саморазвитие личности будущего учителя для качественного решения задач обучения, воспитания и развития учащихся.

Одним из важнейших направлений методической работы является самообразование, которое определяется как специально организованная, самостоятельная, систематическая познавательная деятельность, направленная на достижение прогнозируемых личностно-профессиональных целей.

В качестве одного из способов и средств решения таких задач, и, следовательно, профессионального развития будущего учителя физики, выступает *индивидуальное портфолио студента*. В данной ситуации индивидуальное портфолио будет представлено как средство формирования готовности будущих педагогов к профессиональной деятельности, как эффективный способ рационального продвижения будущих профессионалов на рынке труда, способ оценивания имеющихся у них ключевых и иных компетенций.

Проанализировав психолого-педагогическую и методическую литературу по проблеме исследования можно сделать вывод, что понятие «портфолио» используется в двух значениях:

– портфолио-продукт (портфолио в переводе с итальянского означает «папка с документами», «папка специалиста»);

– портфолио-технология (современная образовательная технология, в основе которой используется метод аутентичного оценивания результатов образовательной и профессиональной деятельности).

Аутентичное оценивание – это вид оценивания, применяющийся, прежде всего, в практико-ориентированной деятельности и предусматривающий оценивание сформированности умений и навыков личности в условиях помещения её в ситуацию, максимально приближенную к требованиям реальной жизни – повседневной или профессиональной. Такой компетентностный подход применим к оцениванию качества образования, с одной стороны, как качества образовательных результатов, с другой, как качества условий, в которых они достигаются.

К одной из задач оценивания относится оказание помощи будущим специалистам в развитии их способностей анализировать собственную деятельность, сопоставлять её с общепринятыми стандартами и на основе этого пересматривать, совершенствовать свои способности, проявлять инициативу для достижения собственного роста.

Портфолио не только является современной формой оценивания, но и помогает решать следующие педагогические задачи: поддерживать высокую учебную мотивацию студентов; поощрять их активность и самостоятельность, расширять возможности обучения и самообучения; развивать навыки их рефлексивной и оценочной деятельности; формировать умение учиться – ставить цели, планировать и организовывать собственную учебную деятельность. И как результат – способствовать повышению качества образования в целом.

В индивидуальном портфолио студента отражаются цели, задачи, непосредственные достижения (грамоты и благодарности за участие в семинарах, форумах, конференциях; свидетельство о занесении на доску почета учебного заведения; сертификаты об успешном освоении обучающих программ и т. п.); материалы, собранные студентами при подготовке к мероприятиям или урокам при прохождении педагогической практики (тексты докладов на научно-практических конференциях; оттиски статей в профессиональных журналах; отчеты и отзывы о прохождении производственных практик и т. п.) и рекомендательные письма от преподавателей.

Практическая значимость портфолио состоит в систематизации деятельности будущего специалиста; стимулировании к непрерывному самосовершенствованию; диагностировании результатов труда студента.

Остановимся на требованиях к оформлению и структуре индивидуального портфолио студента.

Требования к оформлению индивидуального портфолио студентов:

– систематичность и регулярность самомониторинга (студент систематично отслеживает результаты своей деятельности в избранной им области, отбирает наиболее интересные работы в свое «досье», организует их в предусмотренную структуру);

– структуризация и логичность представленных материалов;

– аккуратность и эстетичность оформления;

– целостность, тематическая завершенность материалов;

– наглядность и обоснованность.

Структура индивидуального портфолио студента:

1. *Титульная страница* (Ф.И.О. студента).

2. *Общие сведения* о студенте (фотография, автобиография, показывающая раннее проявление склонности к данной профессии (если таковое было), способности к изучению физики и желание изучать её дальше и т. д.).

3. *Документы*, регламентирующие работу педагога (Закон об образовании в РБ, инструктивно-методические письма, программа по физике для общеобразовательных учреждений, Положения о десятибальной системе обучения и др.).

4. *Творческое досье* представляет собой собрание различных творческих, проектных, исследовательских работ будущего учителя физики; описание методик, разработок, программ; основные направления его творческой активности: участие в научных конференциях, конкурсах и др.; публикации, если таковые имеются; если их много или они объёмные, достаточно перечислить их с указанием изданий, а две-три небольшого объёма внести в портфолио.

Творческое досье можно разделить на две части: в первой поместить разработки уроков по физике, во второй – сценарии внеклассных мероприятий, планы предметных недель и декад, тематические подборки материалов, каталоги, памятки, программы факультативных или элективных курсов.

5. *Список литературы*.

Индивидуальное портфолио студента может быть представлено на бумажных носителях и в электронной версии. В первом случае – это папка с вкладышами, в которой материалы размещаются в соответствии с указанной выше структурой (титульная страница, общие сведения, документы, творческое досье, список литературы). Электронная версия портфолио оформляется в виде электронных таблиц с приложениями отсканированных документов, подтверждающих наличие наработанных материалов и достижений, а также электронных файлов с работами.

Процесс разработки и ведения портфолио (как способа и средства профессионального развития, которые рано или поздно подлежат оцениванию) не предполагает принципа обязательности. Данное нововведение следует рассматривать как рекомендацию студенту с целью оптимизации его личностно-профессионального роста. В случае применения данного средства в образовательном учреждении возникает необходимость разработки *критериев* оценки индивидуального портфолио студента. К таким критериям следует отнести:

– творческий подход к созданию портфолио;
– степень обоснованности содержащихся в нем материалов;
– глубину и практическую значимость данных материалов;
– наличие выраженной авторской позиции при систематизации и разработке материалов;
– способ подачи материалов;
– оформление портфолио и др.

Данные критерии будут востребованы при организации публичной презентации индивидуального портфолио на экзамене по методике преподавания физики. Это, в свою очередь, обеспечит гласность итогов учебной деятельности и будет служить образцом творческого роста для начинающих педагогов.

Экзаменационные билеты экзамена «Методика преподавания физики» могут содержать инвариантную и вариативную части.

Инвариантная часть экзаменационного билета ориентирована на выявление теоретической компетентности будущего учителя физики, что предусматривает его ответ на первый вопрос билета. Данные вопросы составляются на основе программы экзамена «Методика преподавания физики», их формулировка предполагает возможность продемонстрировать свою научную компетентность, умение интегрировать психолого-педагогические знания по ключевым проблемам современного образования.

Вариативная часть экзаменационного билета ориентирована на выявление готовности студента к решению практических задач, определяющих его компетентность в области обучения физике. При этом студент решает предлагаемую в билете педагогическую задачу с использованием материала своего индивидуального портфолио.

На экзамене, при подготовке к ответу, студенту разрешается пользоваться программами по физике, образовательными программами, а также своим педагогическим портфолио, самостоятельно составленным в процессе изучения учебных дисциплин профильной подготовки.

Индивидуальное портфолио следует регулярно обновлять по мере продвижения во время обучения по основному и сопутствующим направлениям профессиональной подготовки, а также включать в него информацию, отражающую актуальные умения, навыки и наработку компетенций на каждом этапе профессионального обучения и развития. По мере приближения к выпуску из учебного заведения более специфичными для выбранного студентом профиля деятельности и для целей его карьеры должны становиться пункты в портфолио. Соответственно, «индивидуальное портфолио студента» становится динамичным и развивающимся инструментом карьеры.

В заключение отметим, что в наиболее простом понимании индивидуальное портфолио студента – это папка достижений, собрание различных материалов, документов и других свидетельств в заданной области. Если рассматривать понятие индивидуальное портфолио через контекст социально-экономической жизни, то можно уже говорить об этом средстве как эффективном способе рационального продвижения будущих профессионалов на рынке труда, способе формирования готовности будущих педагогов к профессиональной деятельности, способе очень точного оценивания имеющихся у них ключевых и иных компетенций, а также перспектив делового, профессионального и творческого взаимодействия с ними.

В. П. Басаргин

ВОПРОСЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИННОВАЦИОННЫХ ПОДХОДОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРИНЦИПОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Автоматические системы выполняют функции контроля, регулирования и управления без вмешательства человека. В прошлом веке это определение было достаточно правильным и корректным. В XXI веке в связи с всеобъемлющей технологизацией и компьютеризацией оно требует некоторых добавлений и уточнений. Одним из главных следствий широкого внедрения микро-ЭВМ в разнообразных системах контроля и управления является резкий спрос на дешевые, надежные и технологичные датчики, создаваемые на современных материалах и технологиях. Эти датчики должны быть электрически и конструктивно совместимыми с микропроцессорами и обладать к тому же некоторой «интеллектуализацией», т. е. способностью самостоятельного выбора способа передачи информации. Современные нанотехнологии позволяют это сделать.

В связи с этим необходимо не только восстановить угасший в последнее время интерес школьников, студентов и преподавателей к автоматике и автоматическим системам, но развить его на новом уровне с применением микропроцессорной техники, в частности, микро-ЭВМ. Для этого нужно проанализировать, воссоздать и дополнить учебный и прикладной материал по физике для формирования понятий об автоматике и автоматизации и развивать их в новых условиях.

Знакомство учащихся с современной автоматической системой целесообразно начать с изучения физических принципов работы датчиков на основе учебного и методического материала в классной и во внеклассной работе по физике с использованием знаний по информатике, химии, биологии, экологии и т. п. Техническую сторону функционирования датчиков можно изучать на уроках технологии в форме индивидуальных творческих заданий. Внедрение датчиков во всевозможные системы автоматизации возможно на основе аналогий системы органов чувств и головного мозга человека, с одной стороны, и технической системы «датчик-микро-ЭВМ» – с другой. Схема 1 позволяет выделить общие функции элементов систем в формировании сигналов и команд.

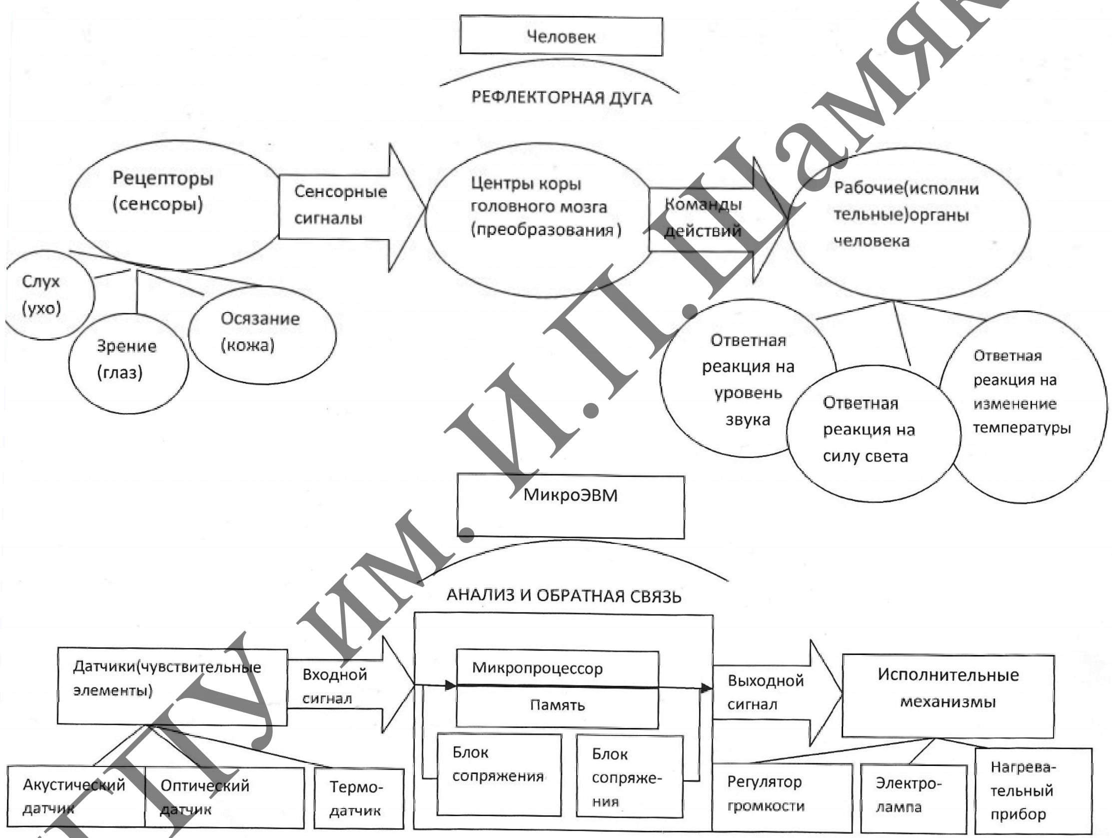


Схема 1 – Функциональные схемы и основные элементы человеческой и технической систем (на примере трех аналогий)

Из анализа функциональной схемы видно, что датчики в технической системе выполняют роль органов чувств, а микро-ЭВМ аналогична функциям головного мозга. Таким образом, с определенными допущениями функции системы одинаковы.

Датчики, как известно, рассматриваются как устройства, реагирующие на изменение внешних факторов окружающей среды путем формирования определенных сигналов. Существует множество явлений и эффектов, преобразований свойств материалов и энергетических свойств, которые лежат в основе работы различных датчиков.

Рассмотрим некоторые из них, анализируя схему 1.

Для всех датчиков, работающих в технических системах с микро-ЭВМ, необходимо, чтобы их выходные сигналы были электрическими. В одних датчиках осуществляется прямое преобразование изменения параметров анализируемой среды в электрический сигнал (термосопротивление), в других необходимы дополнительные преобразования (контактные термометры). В соответствии с этим датчики подразделяются на прямые и косвенные. По принципу действия датчики делятся на множество групп. В данной работе ограничимся рассмотрением датчиков физической группы.

Исходя из аналогий, приведенных в схеме 1, и основываясь на их применимости в технологических системах, приведем следующие данные о датчиках и некоторые демонстрационные модели на их основе:

- оптические (рисунок 1)
- акустические (рисунок 2)
- температурные (рисунок 3)

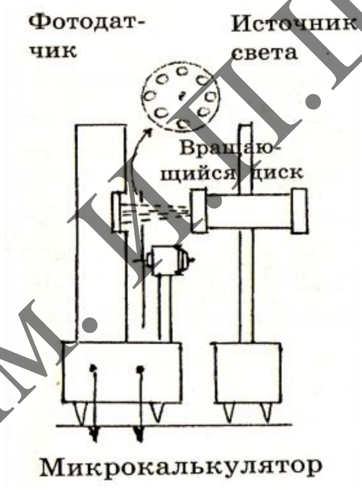


Рисунок 1 – Модель оптической системы подсчета деталей

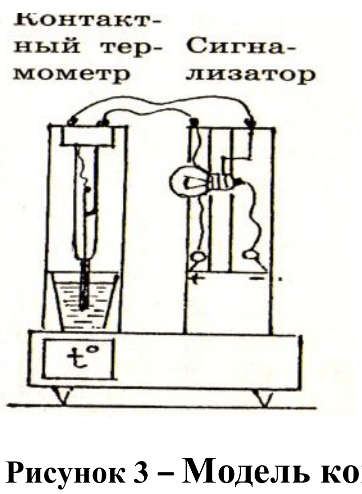


Рисунок 2 – Модель акустической «тени»

Рисунок 3 – Модель контроля температуры

Приведем конкретизацию моделей электрическими схемами автоматических систем.

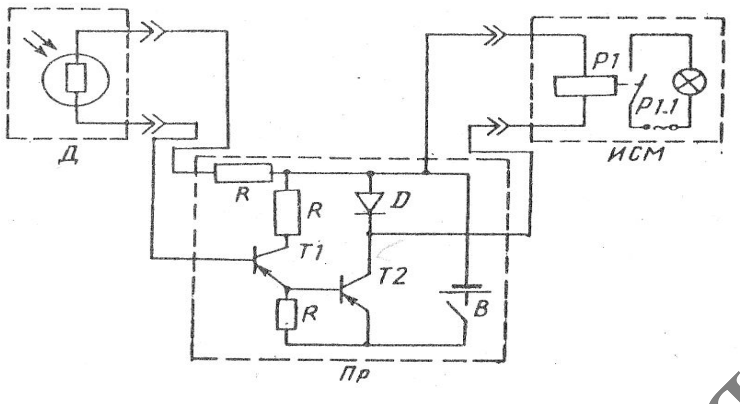


Рисунок 4 – Автоматическая система с фотодатчиками

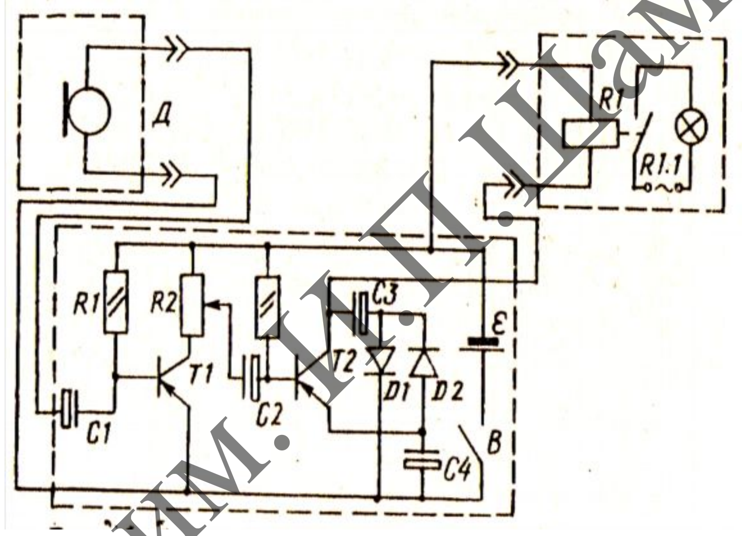


Рисунок 5 – Автоматическая система с акустическим датчиком

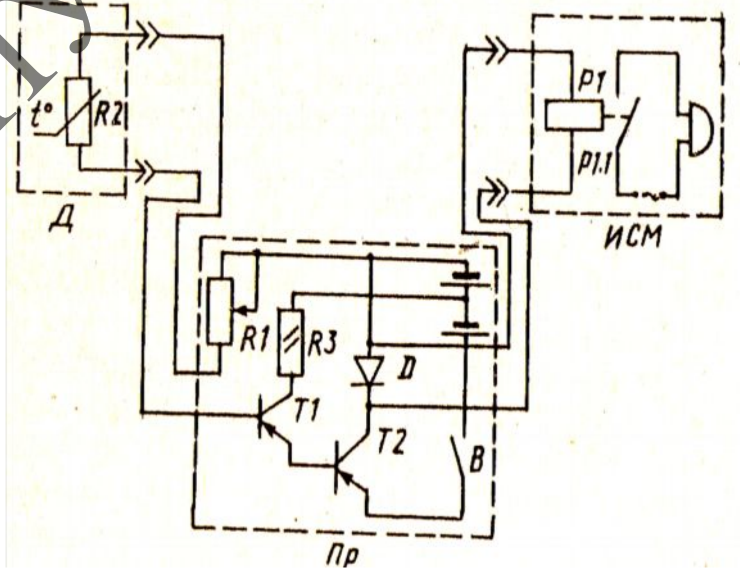
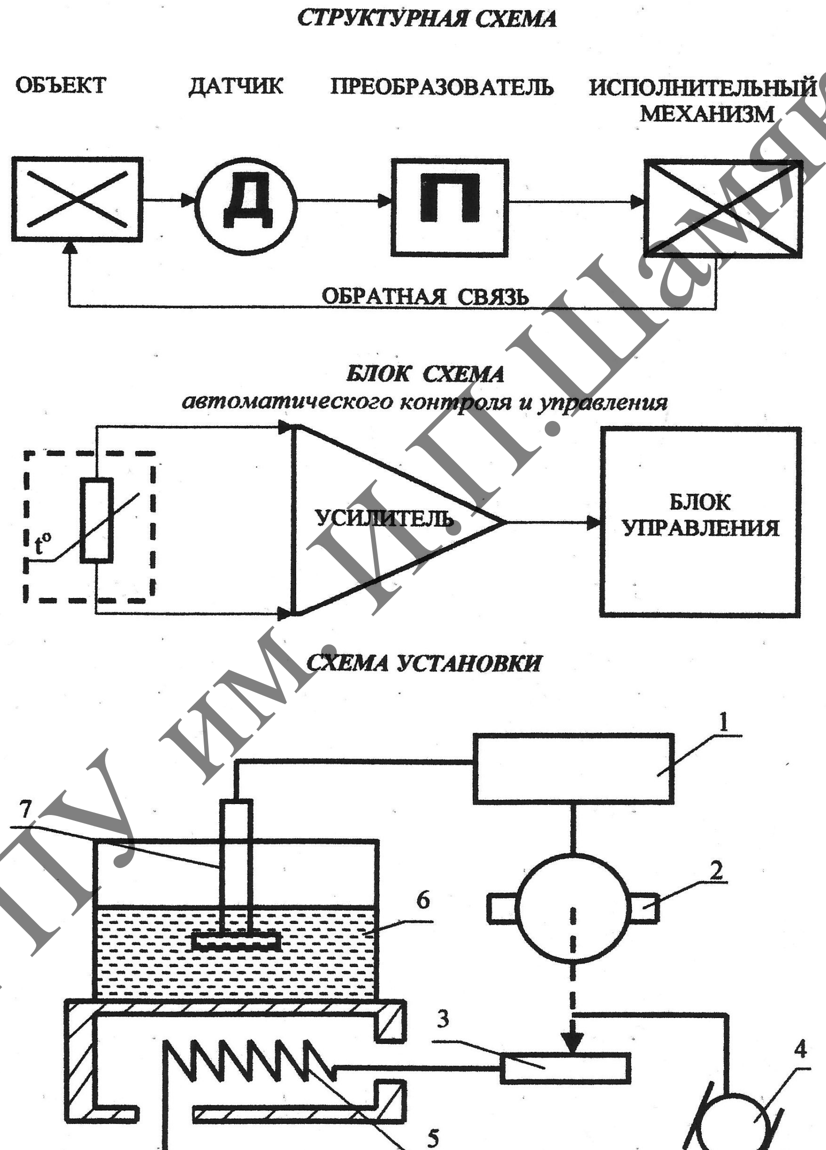


Рисунок 6 – Автоматическая система с термодатчиком

Продолжая перечень автоматических систем, приведем примеры построения других схем автоматической системы контроля и управления химических реакций на емкостных датчиках (рисунок 7) и системы контакта и присутствия на сенсорных датчиках (рисунок 8).

С помощью других датчиков можно продолжить перечень возможных систем контроля и управления, например, давления, влажности, магнитного и электрического поля.

Общие принципы построения автоматических систем показаны на примере построения конкретной автоматической системы (рисунок 7).



1 – блок управления; 2 – управление реохордом; 3 – реохорд;
4 – источник тока; 5 – нагреватель; 6 – контролируемая среда; 7 – датчик

Рисунок 7 – Построения схем конкретной автоматической системы управления нагревом

Все перечисленные датчики и системы информируют о состоянии внешней среды и позволяют в системе управления и регулирования управлять ее состоянием. Для этого необходимо изучить основные эффекты, явления и свойства среды, которые возможно преобразовать в виде команд для исполнительных устройств, меняющих ее состояние (таблица 1).

Таблица 1 – Примеры перехода от явлений, эффектов, свойств к конкретному датчику и прибору

№ п/п	Эффект, явление, свойства	Переходы	Физическая сущность преобразования	Фактор воздействующей среды	Датчик	Преобразование в датчике	Прибор на основе датчика
1	Тепловое излучение	Тепловая энергия – инфракрасное излучение	Изменение оптического излучения при изменении температуры физического объекта	Температура	Контактный термометр, термопара, терморезистор, биметаллическая пластина	Объемное температурное расширение ртути, эффект Зеебека, фотопроводимость, линейное расширение материалов	Термограф, термореле, противообледенительная система, пожарная сигнализация
2	Фотогальванический эффект	Энергия светового излучения – фотоЭДС	Появление свободных электронов и положительных дырок в p-n-переходе	Световой поток	Фоторезистор, светодиод, фотоэлемент	Появление ЭДС при освещении полупроводника, изменение сопротивления под действием света	Фотореле, фотодатчик, термограф, анализатор оптической плотности, спектрофотометр
3	Электромагнитные колебания	Электромагнитные колебания – колебания упругой среды	Изменение частоты электромагнитных колебаний – колебаний упругой физической среды – электромагнитные колебания	Электромагнитные колебания ультразвуковой частоты	Излучатель, микрофон, пьезодатчик, наушник, магнитострикционный излучатель	Электромагнитные колебания – механические колебания	Эхолот, уравнемер, устройство неразрушающего контроля, охранная сигнализация

На данном этапе необходимо сформировать у обучающихся понятия о датчике как о части технологической системы (измерительной и управляющей), представляющей совокупность измерителей и преобразователей.

Один из конкретных путей реализации данного проекта – это создание школьных станций экологического контроля (СЭК). Разработка, конструирование и изготовление функциональных блоков и собственно станции может осуществляться в различных школьных и внешкольных объединениях учащихся.

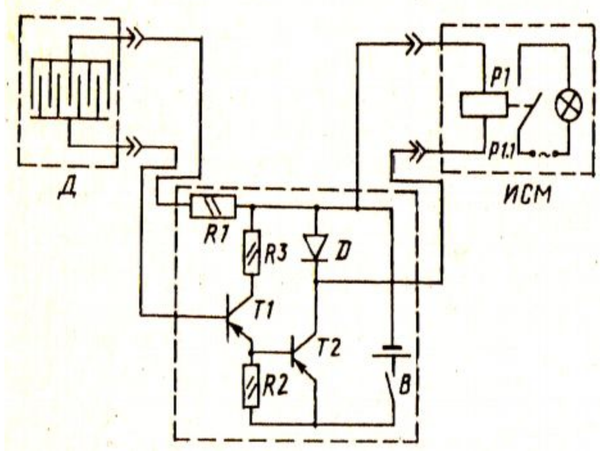


Рисунок 8 – Автоматическая система с емкостным датчиком

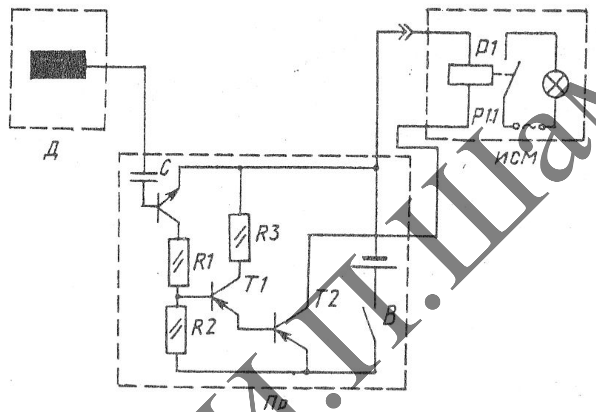


Рисунок 9 – Автоматическая система с сенсорным датчиком

Так как СЭК является объектом физико-технического творчества, то работу по ее созданию можно организовать, например, в научно-конструкторском объединении школьников, работающем в структуре студенческого конструкторского бюро педуниверситета.

Работа школьной портативной станции экологического контроля строится по следующей функциональной схеме:

Фактор среды→датчик→преобразователь→индикатор.

Используя в данной схеме различные датчики, можно получить информацию о скорости ветра и его направлении; о количестве осадков; величине радиационного γ-фона; о температуре почвы и окружающей среды; о влажности почвы и воздуха; о загазованности (СО); об атмосферном давлении.

В качестве датчиков используются механические и электронно-механические устройства, принцип работы некоторых из них показан на рисунке 10. Сигнал с датчиков поступает в блок преобразования, а затем в блок счета и индукции, где высвечивается в виде цифровой информации определенной размерности.

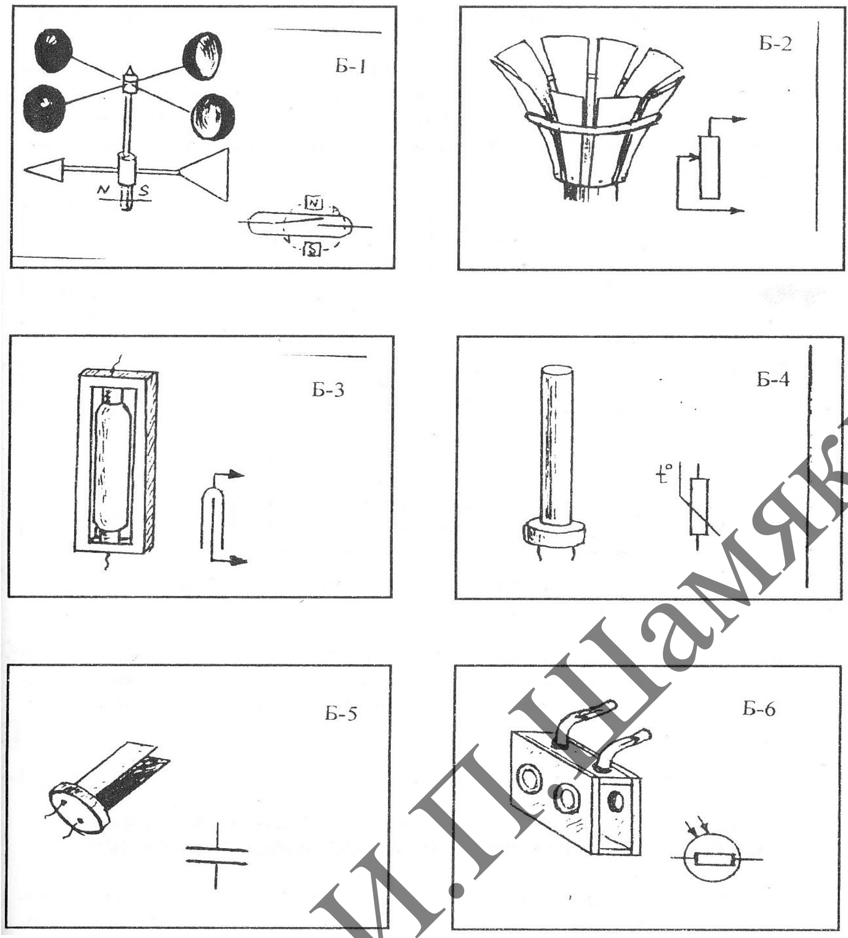


Рисунок 10 – Датчики и преобразователи сигнала портативной станции экологического контроля (СЭК)

Конструктивно блоки датчиков, преобразователей и индукции размещаются в дипломате типа «Кейс» в виде сборных механических элементов (блок 1 и 2) и электронных датчиков (блок 3–6). Электронные схемы сопряжения, преобразования и индукции находятся в одном блоке 7 (рисунок 11).

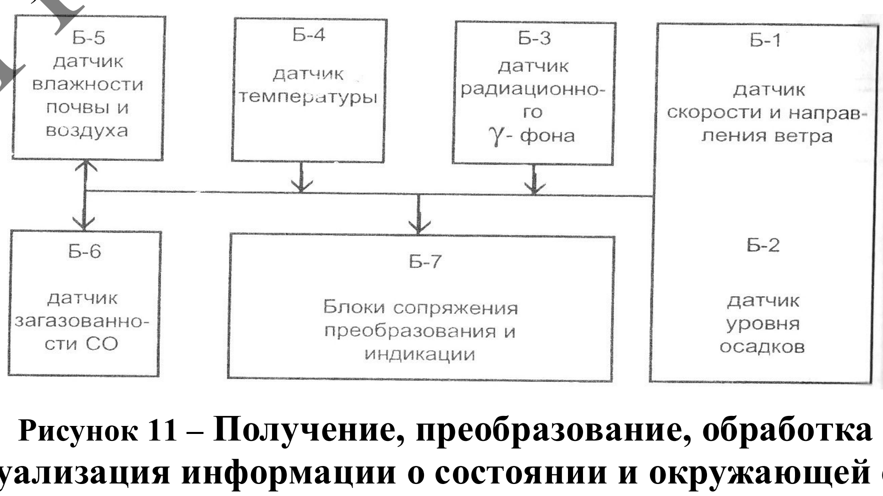


Рисунок 11 – Получение, преобразование, обработка и визуализация информации о состоянии и окружающей среды

Участие школьников в любом виде экологической преобразующей деятельности формирует ответственность за состояние окружающей среды в зоне проживания и дает им возможность активно влиять на ее улучшение.

Литература

1. Борисов, Н.М. Автоматические устройства контроля и управления / Н.М. Борисов. – М. : Энергия, 1976. – 88 с.

2. Како, Н. Датчики и микро ЭВМ / Н. Како, Я. Ямаэ. – Л. : Энергоатомиздат, Ленинград. отделение, 1986. – 120 с.

С. М. Бирук

ТРАЕКТОРИИ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУКРАТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ НА СФЕРАХ ПУАНКАРЕ И БЕНДИКСОНА

Введение. Согласно [1] всякая квадратичная автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка с линейным частным интегралом некоторым невырожденным линейным преобразованием может быть приведена к системе одного из видов:

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j; \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j; \qquad \frac{dx}{dt} = x + ax^2, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j;$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j.$$

Для указанных систем функция

$$w : (x, y) \to x \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

является частным интегралом.

Теорема: *Для того чтобы автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка имела двукратный линейный частный интеграл, достаточно, чтобы она некоторым невырожденным линейным преобразованием приводилась к виду* (1).

Действительно, производная в силу системы (1)

$$\mathsf{P}\frac{a + x}{x} = -a,$$

где $\mathsf{P}(x, y) = x^2 \partial_x + \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \partial_y \ \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ \ a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$

В виду определения кратности частного интеграла [2, ст. 193–194]

$$\varepsilon = \xi = 1, \qquad h_1 = f_1 = g_1 = 1,$$

$$Q_{11}(x, y) = a + x, \qquad R_{11}(x, y) = -a \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Полином $Q_{11}(x, y)$ взаимно прост с полиномиальным частным интегралом w, а у полинома $R_{11}(x, y)$ степень меньше $p_1 - 1 = 1$.

Поэтому частный интеграл w системы (1) имеет кратность $\kappa = 1 + f_1 = 2$.

Поставим задачу: исследовать поведение траекторий системы (1) при $b_{02} = 0$, $|b_{00}| + |b_{01}| \neq 0$, далее системы (1'), на сферах Пуанкаре и Бендиксона.

Поведение траекторий на сфере Пуанкаре будем описывать посредством проективного атласа, состоящего из трех карт KP_1, KP_2, KP_3. Карты атласа представляют собой фазовые портреты поведения траекторий на круге Пуанкаре соответственно системы (1') и систем, полученных из (1') при проективных преобразованиях Пуанкаре $x = z^{-1}$, $y = uz^{-1}$ и $x = vz^{-1}$, $y = z^{-1}$. Такой подход к описанию поведения траекторий дифференциальной системы на сфере Пуанкаре был предложен в [3].

Поведение траекторий на сфере Бендиксона будем описывать посредством атласа, состоящего из двух координатных карт KB_1 и KB_2. Карта KB_1 представляет собой круг, состоящий из точек фазовой плоскости Oxy, с центром в точке $O(0,0)$, на котором лежат все изолированные состояния равновесия системы (1'), отличные от бесконечно удаленного. Карта KB_2 – круг из точек плоскости $O^*\xi\zeta$ с центром в начале координат, на котором лежит не более одного изолированного состояния равновесия $O^*(0, 0)$ системы, полученной из (1') при преобразовании Бендиксона

$$x = \frac{4\xi}{\xi^2 + \zeta^2}, \qquad v = \frac{4\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Такой подход к описанию поведения траекторий дифференциальной системы на сфере Бендиксона предложен в [4].

Качественное исследование. При исследовании поведения траекторий системы (1') в окрестности экватора сферы Пуанкаре различаем два случая: $|b_{20}| + |b_{11} - 1| \neq 0$, когда (1') имеет неособый тип при преобразованиях Пуанкаре, и $b_{20} = 0$, $b_{11} = 1$, когда (1') имеет особый тип при преобразованиях Пуанкаре [3].

В первом случае экватор сферы Пуанкаре является траекторией системы (1'), которая первым и вторым преобразованиями Пуанкаре соответственно приводится к системам

$$\frac{du}{d\tau} = -b_{20} - (b_{11} - 1)u - b_{10}z - b_{01}uz - b_{00}z^2, \qquad \frac{dz}{d\tau} = z; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= b_{01}z^2 + b_{11}zv + b_{00}z^3 + b_{10}z^2v + b_{20}zv^2, \\ \frac{dv}{d\tau} &= b_{01}zv + (b_{11} - 1)v^2 + b_{00}z^2v + b_{10}zv^2 + b_{20}v^3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $dt = -zd\tau$.

Во втором случае экватор сферы Пуанкаре не является траекторией системы (1'), которая первым и вторым преобразованиями Пуанкаре соответственно приводится к системам

$$\frac{du}{dt} = b_{10} + b_{01}u + b_{00}z, \qquad \frac{dz}{dt} = -u; \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt} = -b_{01}z - v - b_{00}z^2 - b_{10}zv, \qquad \frac{dv}{dt} = -b_{01}v - b_{00}zv - b_{10}v^2. \tag{5}$$

Исследуя поведение траекторий системы (1') в окрестности бесконечно удаленной точки (северного полюса) сферы Бендиксона [4], различаем два случая: $|b_{20}| + |b_{11} - 1| \neq 0$, когда система (1') имеет неособый тип при преобразовании Бендиксона, и $b_{20} = 0,\ b_{11} = 1$, когда система (1') имеет особый тип при преобразовании Бендиксона [4].

В первом случае преобразованием Бендиксона систему (1') приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\rho} &= -4\xi^4 - 8b_{20}\xi^3\zeta + 4(1 - 2b_{11})\xi^2\zeta^2 + 2b_{20}\xi^4\zeta - 2b_{01}\xi^3\zeta^2 - \\ &\quad - 2b_{10}\xi^2\zeta^3 - 2b_{01}\xi\zeta^4 - \frac{b_{00}}{2}\xi^5\zeta - b_{00}\xi^3\zeta^3 - \frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^5, \\ \frac{d\zeta}{d\rho} &= 4b_{20}\xi^4 + 4(b_{11} - 2)\xi^3\zeta - 4b_{20}\xi^2\zeta^2 - 4b_{11}\xi\zeta^3 + b_{10}\xi^5 + b_{01}\xi^4\zeta - \\ &\quad - b_{10}\xi\zeta^4 - b_{01}\zeta^5 + \frac{b_{00}}{4}\xi^6 + \frac{b_{00}}{4}\xi^4\zeta^2 - \frac{b_{00}}{4}\xi^2\zeta^4 - \frac{b_{00}}{4}\zeta^6, \end{aligned} \tag{6}$$

где $(\xi^2 + \zeta^2)^2 d\rho = dt$, а во втором случае – к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\gamma} &= -4\xi^2 - 2b_{10}\xi^2\zeta - 2b_{01}\xi\zeta^2 - \frac{b_{00}}{2}\xi^3\zeta - \frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^3, \\ \frac{d\zeta}{d\gamma} &= \xi\zeta + b_{10}\xi^3 + b_{01}\xi^2\zeta - b_{10}\xi\zeta^2 - b_{01}\zeta^3 + \frac{b_{00}}{4}\xi^4 - \frac{b_{00}}{4}\zeta^4, \end{aligned} \tag{6'}$$

где $(\xi^2 + \zeta^2)d\gamma = dt$, так как $b_{11} \neq 2$.

Для систем (2) и (4) двукратным линейным частным интегралом на проективной фазовой плоскости $\mathbf{R}P^2$ с координатами (x, u, z) является

$$w_1 : (x,u,z) \to x \quad \forall (x,u,z) \in \mathbf{R}P^2,$$

соответствующий бесконечно удаленной прямой-траектории $x = 0.$

Для систем (3) и (5) двукратным линейным частным интегралом на проективной фазовой плоскости $\mathbf{R}P^2$ с координатами (y, z, v) является

$$w_2 : (y,z,v) \to v \quad \forall (y,z,v) \in \mathbf{R}P^2.$$

Для систем (6) и (7) двукратным линейным частным интегралом является

$$w_3 : (\xi,\zeta) \to \xi \quad \forall (\xi,\zeta) \in \mathbf{R}^2.$$

Результаты исследования изолированных состояний равновесия систем (1'), (2)–(7) приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1 – Изолированные состояния равновесия систем (1'), (2)–(7)

Сост. равн. / Сист.	$A_1\ (b_{01} \neq 0)$		$A_2\ (b_{11} \neq 1)$		A_3	A_4
	$(b_{00} \neq 0)$	$(b_{00} = 0)$	$(b_{20} \neq 0)$	$(b_{20} = 0)$		
(1')	$\left(0, -\dfrac{b_{00}}{b_{01}}\right)$		«концы» $b_{20}x + (b_{11}-1)y = 0$		«концы» $x = 0$	бесконечно удаленная точка
(2)	«концы» $b_{01}u + b_{00}z = 0$		$\left(\dfrac{b_{20}}{1-b_{11}}, 0\right)$		«концы» $z = 0$	—
(3)	$\left(-\dfrac{b_{01}}{b_{00}}, 0\right)$	«концы» $v = 0$	$\left(0, \dfrac{1-b_{11}}{b_{20}}\right)$	«концы» $z = 0$	(0,0)	—
(4)	«концы» $b_{01}u + b_{00}z = 0$		—		«концы» $z = 0$	—
(5)	$\left(-\dfrac{b_{01}}{b_{00}}, 0\right)$	«концы» $v = 0$	—		(0,0)	—
(6), (7)	$\left(0, -\dfrac{4b_{01}}{b_{00}}\right)$	бесконечно удаленная точка	—		—	(0,0)

Таблица 2 – Характер состояний равновесия при $b_{01} \neq 0$

b_{11}	b_{00}	b_{20}	Дополн. условия	Сост. равнов.				Карты атласов				
				A_1	A_2	A_3	A_4	KP_1	KP_2	KP_3	KB_1	KB_2
<1	$\neq 0$	$\neq 0$	$k_1 < 0$	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	3	35	36
<1	$\neq 0$	$\neq 0$	$k_1 > 0$	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	4	35	36
<1	$\neq 0$	$=0$	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	5	35	36
<1	$=0$	$\neq 0$	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	6	35	36
<1	$=0$	$=0$	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	7	35	36
$=1$	$\neq 0$	$\neq 0$	$b_{00}b_{01} < 0$	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	10	35	36
$=1$	$\neq 0$	$\neq 0$	$b_{00}b_{01} > 0$	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	11	35	36
$=1$	$\neq 0$	$=0$	—	с-у	—	ву	2п2э	12	13	14	35	36
$=1$	$=0$	$\neq 0$	—	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	15	35	36
$=1$	$=0$	$=0$	—	с-у	—	ву	2п2э	12	13	16	35	36
>1	$\forall$	$=0$	$b_{10}b_{01} < 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	19	35	36
>1	$\neq 0$	$\neq 0$	$b_{00}b_{01} < 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	20	35	36
>1	$\neq 0$	<0	$b_{00}b_{01} > 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	21	35	36
>1	$\neq 0$	>0	$b_{00}b_{01} > 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	22	35	36
>1	$\neq 0$	$\neq 0$	$k_1 < 0$, $k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	25	35	36
>1	$\neq 0$	$\neq 0$	$k_1 > 0$, $k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	26	35	36
>1	$\neq 0$	$=0$	$b_{00}b_{01} < 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	27	35	36
>1	$\neq 0$	$=0$	$b_{00}b_{01} > 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	28	35	36
>1	$\neq 0$	$=0$	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	29	35	36
>1	$=0$	$\neq 0$	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	30	35	36
>1	$=0$	<0	$k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	31	35	36
>1	$=0$	>0	$k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	32	35	36
>1	$=0$	$=0$	$b_{10}b_{01} > 0$, $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	33	35	36
>1	$=0$	$=0$	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	34	35	36

Таблица 3 – Характер состояний равновесия при $b_{01}=0,\ b_{00}\neq 0$

b_{11}	b_{10}	b_{20}	Дополн. условия	Сост. равнов.			Карты атласов				
				A_2	A_3	A_4	KP_1	KP_2	KP_3	KB_1	KB_2
<-1	$\neq 0$	$=0$	—	у	2п2г	4п4э	37	38	39	63	64
<-1	$=0$	$=0$	—	у	2п2г	4п4э	37	38	40	63	64
<-1	$\forall$	<0	—	у	2п2г	4п4э	37	38	41	63	64
<-1	$\forall$	>0	—	у	2п2г	4п4э	37	38	42	63	64
$\in[-1,1)$	$\forall$	<0	—	у	2п2г	2п2э	43	44	45	65	36
$\in[-1,1),\ \neq 0$	$\forall$	$=0$	—	у	2п2г	2п2э	43	44	46	65	36
$\in[-1,1)$	$\forall$	>0	—	у	2п2г	2п2э	43	44	47	65	36
$=0$	$\forall$	$=0$	—	у	2п2г	2п2э	43	44	48	65	36
$=1$	$\forall$	$=0$	—	—	2пэг	2п2э	49	50	51	65	36
$=1$	$\forall$	$\neq 0$	$b_{00}b_{20}<0$	—	3п2э2г	2п2э	52	53	54	65	36
$=1$	$\forall$	$\neq 0$	$b_{00}b_{20}>0$	—	у	2п2э	55	55	56	65	36
>1	$\neq 0$	$=0$	—	с	2п2э	2п2э	57	58	59	65	36
>1	$=0$	$=0$	—	с	2п2э	2п2э	57	58	60	65	36
>1	$\forall$	<0	—	с	2п2э	2п2э	57	58	61	65	36
>1	$\forall$	>0	—	с	2п2э	2п2э	57	58	62	65	36

В таблице 1 указаны условия существования изолированных состояний равновесия (в скобках непосредственно за обозначением состояния равновесия) и их расположение на проективных фазовых плоскостях систем (1'), (2)–(7).

В таблицах 2 и 3 указан вид изолированных состояний равновесия систем (1'), (2)–(7). При этом использовались условные обозначения:

$$k_1=b_{00}b_{01}b_{20},\quad k_2=(1-b_{11})(b_{01}b_{10}-b_{00}b_{11})+b_{01}^2b_{20},$$

«$\forall$» – любое; «с» – седло; «у» – узел; «ду» – дикритический узел; «ву» – вырожденный узел; «с-у» – седло-узел; «2п2г» – сложное состояние равновесия, состоящее из двух параболических и двух гиперболических секторов Бендиксона; «2пэг» – сложное состояние равновесия, состоящее из одного эллиптического, двух сопровождающих его параболических и одного гиперболического секторов Бендиксона; «2п2э» – сложное состояние равновесия, состоящее из двух эллиптических и двух сопровождающих их параболических секторов Бендиксона; «4п4э» – сложное состояние равновесия, состоящее из четырех эллиптических и четырех сопровождающих их параболических секторов Бендиксона; «3п2э2г» – сложное состояние равновесия, состоящее из трех параболических, двух эллиптических и двух гиперболических секторов Бендиксона.

Поведение траекторий системы (1') с учетом расположения и характера ее состояний равновесия определяется однозначно. При этом учитывается отсутствие предельных циклов. Последнее следует уже из того, что все состояния равновесия системы (1') расположены на прямых-траекториях $x = 0$ и $z = 0$ проективной фазовой плоскости (z, x, y).

Атласы поведения траекторий. В таблицах 2 и 3 для каждого из случаев указаны номера рисунков, на которых построены карты атласов поведения траекторий системы (1') на сферах Пуанкаре и Бендиксона.

Проективные атласы систем, полученных из (1') при первом и втором проективных преобразованиях Пуанкаре, соответственно состоят из KP_2, KP_3, KP_1 и KP_3, KP_1, KP_2 карт проективного атласа системы (1').

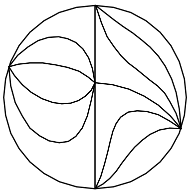


Рис. 1

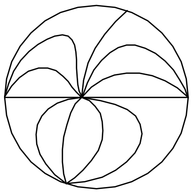


Рис. 2

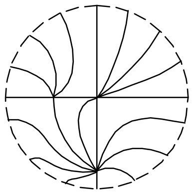


Рис. 3

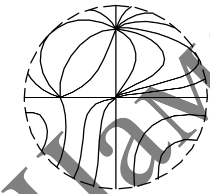


Рис. 4

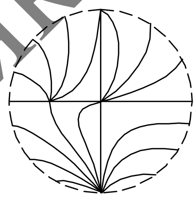


Рис. 5

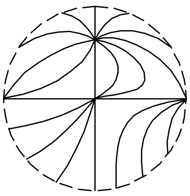


Рис. 6

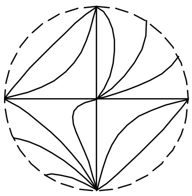


Рис. 7

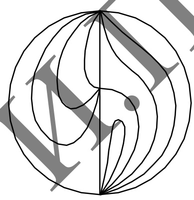


Рис. 8

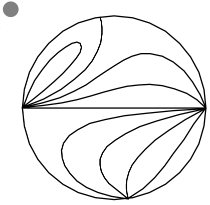


Рис. 9

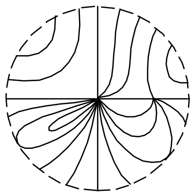


Рис. 10

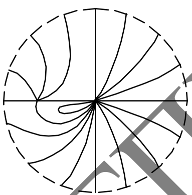


Рис. 11

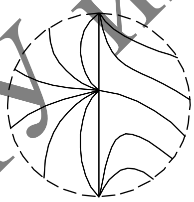


Рис. 12

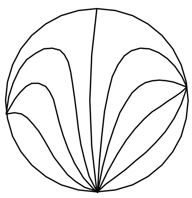


Рис. 13

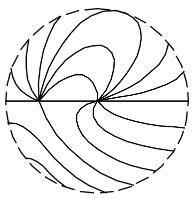


Рис. 14

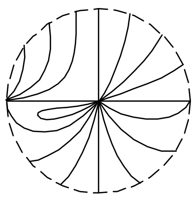


Рис. 15

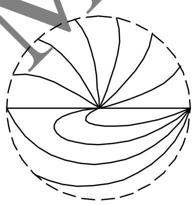


Рис. 16

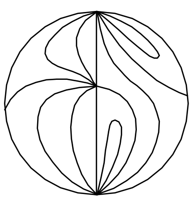


Рис. 17

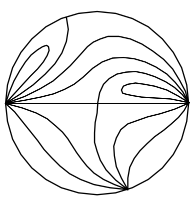


Рис. 18

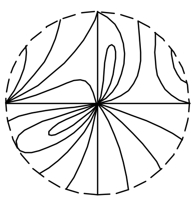


Рис. 19

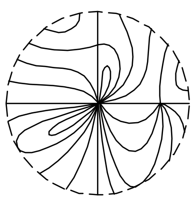


Рис. 20

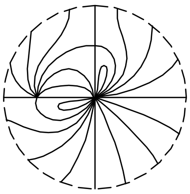


Рис. 21

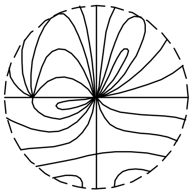


Рис. 22

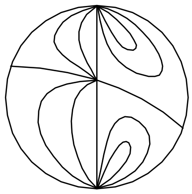


Рис. 23

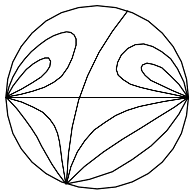


Рис. 24

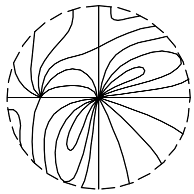


Рис. 25

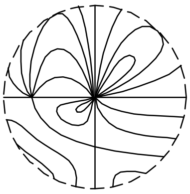


Рис. 26

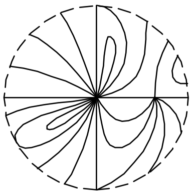


Рис. 27

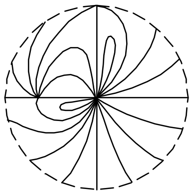


Рис. 28

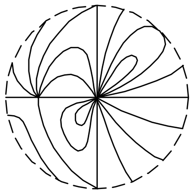


Рис. 29

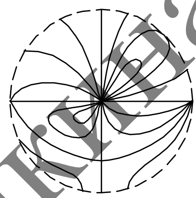


Рис. 30

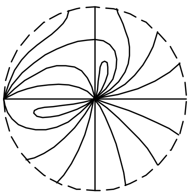


Рис. 31

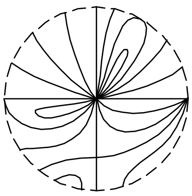


Рис. 32

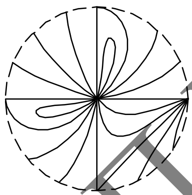


Рис. 33

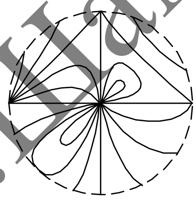


Рис. 34

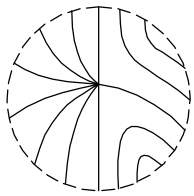


Рис. 35

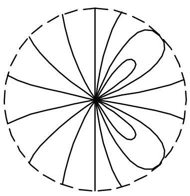


Рис. 36

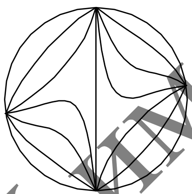


Рис. 37

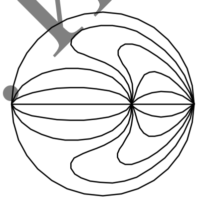


Рис. 38

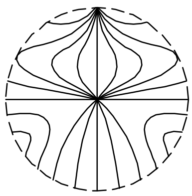


Рис. 39

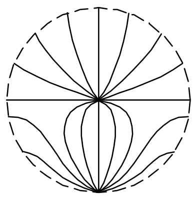


Рис. 40

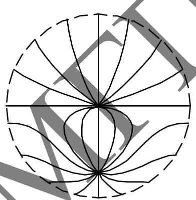


Рис. 41

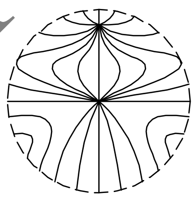


Рис. 42

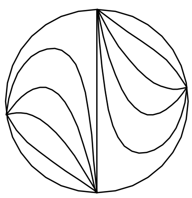


Рис. 43

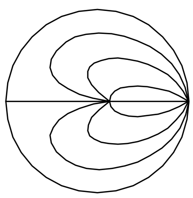


Рис. 44

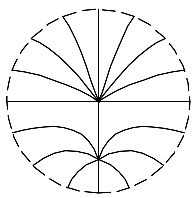


Рис. 45

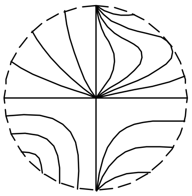


Рис. 46

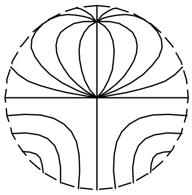


Рис. 47

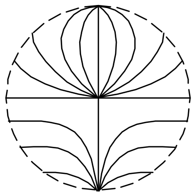


Рис. 48

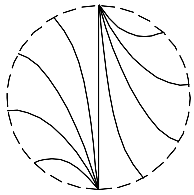


Рис. 49

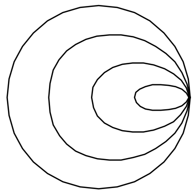


Рис. 50

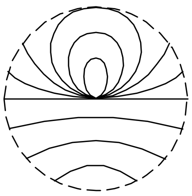


Рис. 51

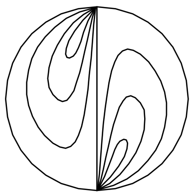


Рис. 52

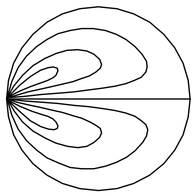


Рис. 53

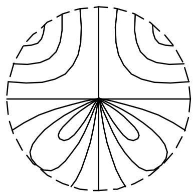


Рис. 54

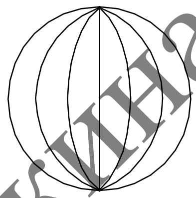


Рис. 55

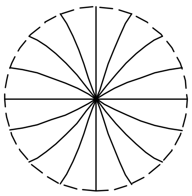


Рис. 56

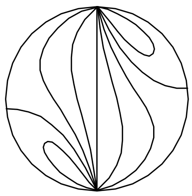


Рис. 57

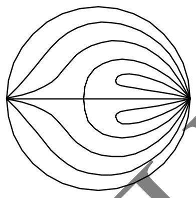


Рис. 58

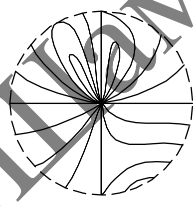


Рис. 59

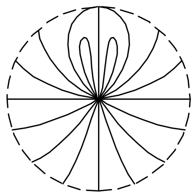


Рис. 60

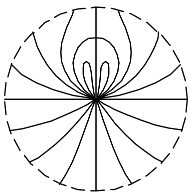


Рис. 61

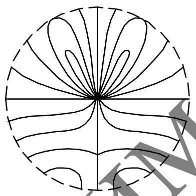


Рис. 62

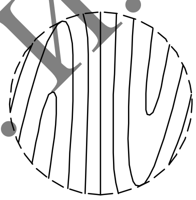


Рис. 63

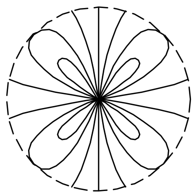


Рис. 64

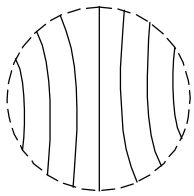


Рис. 65

В **заключение** коротко о результатах, полученных в статье:

1) построены проективные атласы поведения траекторий систем (1'), (2)–(5) на сфере Пуанкаре;

2) построены атласы поведения траекторий системы (1') на сфере Бендиксона.

Литература

1. Бирук, С.М. Качественное исследование в целом класса квадратичных систем с двукратным линейным частным интегралом / С.М. Бирук // Веснік ГрДУ. Сер. 2. – 2007. – № 3(57). – С. 52–57.

2. Горбузов, В.Н. Интегралы дифференциальных систем: монография / В.Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 447 с.

3. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.

4. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.

В. А. Германович

МЕТОД ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ «ЦЕНТРА-ФОКУСА»

В работе предлагается и обосновывается новый метод решения проблемы «центра-фокуса», основанный на понятии отражающей функции [1]. Этот метод сводится к вычислению бесконечной последовательности чисел $m_i (i=\overline{1,\infty})$. Система имеет центр, если все эти числа равны нулю. Сама же последовательность (m_i), вообще говоря, не совпадает с Ляпуновской последовательностью $g_i (i=\overline{1,\infty})$. Благодаря этому мы имеем возможность комбинировать эти два метода. Кроме того иногда конечное число m_i даёт нам возможность построить отражающую функцию и тем самым полностью решить проблему «центра-фокуса».

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha y + P(x,y),\ \dot{y} = \alpha x + Q(x,y), \tag{1}$$

где P, Q – ряды вида

$$P(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x,y),\ Q(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(x,y), \tag{2}$$

(p_k, q_k – однородные многочлены степени k).

Точка $O(0,0)$ является состоянием равновесия данной системы. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$ чисто мнимые $\lambda = \pm\alpha\, i$. В этом случае состояние равновесия $O(0,0)$ может быть либо центром, либо фокусом.

Для решения проблемы «центра-фокуса» обычно применяют метод Ляпунова [2], который состоит в следующем. В системе (1) переходят к полярным координатам ρ, φ. Далее составляют дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\rho,\varphi), \tag{3}$$

решение которого $\rho(\varphi)$ может быть представлено в виде ряда

$$\rho(\varphi) = c + c^2 h_1(\varphi) + c^3 h_2(\varphi) + c^4 h_3(\varphi) + \ldots \tag{4}$$

где $h_1(0) = h_2(0) = \ldots = 0.$

Подставив (4) в (3), сравнивают члены при одинаковых степенях c и выписывают последовательность дифференциальных уравнений:

$$h_1'(\varphi) = \sigma_1(\varphi, h_1)$$
$$h_2'(\varphi) = \sigma_2(\varphi, h_1, h_1', h_2)$$
$$h_3'(\varphi) = \sigma_3(\varphi, h_1, h_1', h_2, h_2', h_3)$$
$$h_4'(\varphi) = \sigma_4(\varphi, h_1, h_1', h_2, h_2', h_3, h_3', h_4)$$

………………………………………

Интегрируя правые части по φ на отрезке $[0, 2\pi]$ и приравнивая нулю полученные выражения, находят необходимые условия центра заданной системы (1)

$$g_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_i d\varphi = 0. \qquad (5)$$

Для полиномиальных систем количество таких условий конечно и, начиная с некоторого $i = k$, все последующие условия $g_k = g_{k+1} = g_{k+2} = ... = 0$ будут выполняться автоматически при тех же допущениях, при которых $g_1 = g_2 = ... = g_{k-1} = 0$. К сожалению, неизвестно, как велико должно быть k.

Мы докажем, что необходимые условия действительно являются достаточными, если докажем, что все последующие g будут равны нулю. Обычно доказательство достаточности полученных условий проводится с помощью отыскания некоторого рода симметрий в системе (1). Поэтому естественно использовать для решения проблемы центра-фокуса отражающую функцию Мироненко В.И.

Идея ее использования для решения проблемы «центра-фокуса» неоднократно высказывалась самим Мироненко В.И. (см. [3]).

Приведём необходимые для дальнейшего изложения сведения об отражающей функции уравнения (3). Пусть решения этого уравнения есть $\rho = S(\varphi; \varphi_0, \rho_0)$. Тогда ОФ $F(\varphi,\rho)$ определяется формулой $F(\varphi,\rho) = S(-\varphi; \varphi, \rho)$. Дифференцируемая функция $F(\varphi,\rho)$ является ОФ уравнения (3) тогда и только тогда, когда для неё выполнено основное соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \rho}R(\varphi,\rho) + R(-\varphi, F) = 0, \; F(0,\rho) \equiv \rho. \qquad (6)$$

Все продолжимые на $[-\pi; \pi]$ решения 2π-периодического по φ уравнения (3) являются 2π-периодическими, тогда и только тогда, когда $F(\pi,\rho) \equiv \rho$ (см.[1, 62–69]).

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) имела центр в т. (0,0), необходимо и достаточно, чтобы ОФ уравнения (3) имела вид*

$$F = \rho + l_2[\varphi]\rho^2 + l_3[\varphi]\rho^3 + ..., \qquad (7)$$

где $l_2[\varphi], l_3[\varphi], ...$ суть 2π-периодические функции.

Доказательство.

В нашем случае ОФ удовлетворяет соотношениям (6). Уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\rho,\varphi) = R_1(\varphi)\rho^2 + R_2(\varphi)\rho^3 + R_3(\varphi)\rho^4 + R_4(\varphi)\rho^5 + ... \qquad \text{(см. [2,6]).}$$

Для уравнения (3) с аналитической правой частью отражающая функция, как следует из её определения, аналитична по ρ и по φ

и, значит, представима в виде ряда по степеням ρ:

$$F(\rho,\varphi) = l_0(\varphi) + l_1(\varphi)\rho + l_2(\varphi)\rho^2 + l_3(\varphi)\rho^3 + ... \quad (8)$$

Поэтому справедливо тождество

$$\begin{aligned}&\left(l_0' + l_1'\rho + l_2'\rho^2 + ...\right) + \left(l_1 + 2l_2\rho + 3l_3\rho^3 + ...\right)\left(R_1\rho^2 + R_2\rho^3 + ...\right) + \\ &+ \left[\left(l_0 + l_1\rho + ...\right)^2 \overline{R_1} + \left(l_0 + l_1\rho + ...\right)^3 \overline{R_2} + \left(l_0 + l_1\rho + ...\right)^4 \overline{R_3} + ...\right] = 0\end{aligned} \quad (9)$$

Откуда коэффициент при нулевой степени ρ: $l_0' + l_0^2\overline{R_1} + l_0^3\overline{R_2} + l_0^4\overline{R_3} + ... = 0$ или $l_0' = -R(-\varphi, l_0)$. Тогда, учитывая, что $l_0(0) = 0$, получаем $l_0(\varphi) \equiv 0$ и, значит, (8) принимает вид $F(\rho,\varphi) = l_1(\varphi)\rho + l_2(\varphi)\rho^2 + l_3(\varphi)\rho^3 + ...$

После этого (9) запишется в виде

$$\begin{aligned}&\left(l_1'\rho + l_2'\rho^2 + ...\right) + \left(l_1 + 2l_2\rho + 3l_3\rho^3 + ...\right)\left(R_1\rho^2 + R_2\rho^3 + ...\right) + \\ &+ \left[\left(l_1\rho + ...\right)^2 \overline{R_1} + \left(l_1\rho + ...\right)^3 \overline{R_2} + \left(l_1\rho + ...\right)^4 \overline{R_3} + ...\right] = 0\end{aligned}$$

Для коэффициента при первой степени ρ имеем $l_1' = 0$, причем $l_1(0) = 1$. Поэтому $l_1(\varphi) \equiv 1$. Видим, что ОФ уравнения (3) действительно имеет вид (7). Т. к. для системы с центром уравнение (3) имеет только 2π-периодические решения, то согласно определению ОФ она и, значит, её коэффициенты должны быть 2π-периодическими функциями. **Теорема доказана.**

Из этой теоремы следует, что для решения проблемы «центра-фокуса» с использованием ОФ Мироненко В.И. необходимо выполнить следующее. В системе (1) перейти к полярным координатам и составить уравнение (3). Правую часть $R(\rho,\varphi)$ уравнения (3) разложить в ряд по степеням ρ. Отражающую функцию $F(\rho,\varphi)$ уравнения (3) искать в виде ряда (7) как решение уравнения (6) с начальным угловым коэффициентом.

Отражающая функция (7) характеризуется свойствами (6).

Необходимо подставить (7) в (6) и выписать члены при одинаковых степенях ρ. Получим, что коэффициенты ряда (7) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$l_2'(\varphi) = \sigma_2(\varphi, l_2),\ l_2(0) = 0,$$
$$l_3'(\varphi) = \sigma_3(\varphi, l_2, l_2', l_3),\ l_3(0) = 0,$$
$$l_4'(\varphi) = \sigma_4(\varphi, l_2, l_2', l_3, l_3', l_4),\ l_4(0) = 0,$$
………………………………………………..

Из доказанной выше теоремы, следует, что для того, чтобы система (1) имела центр в точке $O(0,0)$, необходимо и достаточно, чтобы все функции $l_i(\varphi)$ были 2π-периодическими по φ. Каждая из функций $l_i(\varphi)$ является 2π-периодической, если и только если числа

$$m_i = \int_0^{2\pi} \sigma_i d\varphi = 0.$$

Т. о. для решения проблемы необходимо найти бесконечную последовательность m_i, приравнять их нулю, полученные равенства будут необходимыми и достаточными условиями центра данной системы. По теореме Гильберта о базисе, чтобы доказать, что указанные условия являются необходимыми и достаточными, нужно указать такой номер $i = k$, что все $m_k, m_{k+1}, m_{k+2}...$ будут автоматически равняться нулю, если равны нулю все $m_i, i = \overline{1, k-1}$.

В этой работе показано, что последовательности чисел g_i и m_i, вообще говоря, не совпадают между собой. В связи с этим мы вправе надеяться на то, что эффективность рассматриваемых методов для разных систем различна, т. е. для некоторых систем эффективен первый метод, для некоторых – второй.

Так как отражающая функция описывает симметрии решений уравнения (3) по φ, то мы вправе надеяться (это подтверждают соответствующие примеры), что наличие, может быть скрытых, симметрий уравнения (3) приведет решение проблемы «центра-фокуса» для таких систем вторым методом быстрее, чем первым.

В подтверждение этих слов приведем систему, сводящуюся к уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho\cos\varphi + \cos 2\varphi - \rho^2(\sin\varphi - 2)}{1 + \rho^2\sin\varphi} + \frac{\rho\,(1 + \lambda_1\rho)\cos\varphi + \cos 2\varphi - \rho^2(\lambda_2\sin\varphi + \lambda_0)}{-1 + \rho^2\sin\varphi} \tag{10}$$

Задача 1. Требуется выяснить, при каких значениях $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ система, записанная в полярных координатах уравнением (10), будет иметь центр, и доказать, наличие центра при полученных условиях.

Методом ОФ.

Вычислим коэффициенты ряда (7) описанным выше способом и составим необходимые условия центра.

$$l_2 = 2(-2\varphi + \lambda_0\varphi + \lambda_1\sin\varphi)$$

$$m_2 = \int_0^{2\pi}(4 - 2\lambda_0 - 2\lambda_1\cos\varphi)d\varphi = -4\pi(\lambda_0 - 2) = 0$$

Из первого условия $\lambda_0 = 2$.

$$l_3 = -2\left(-\lambda_1^{\,2} + \lambda_1^{\,2}\cos 2\varphi\right)$$

$$m_3 = \int_0^{2\pi}\left(-8\lambda_1^{\,2}\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$l_4 = \varphi - \lambda_2\varphi + \lambda_1\sin\varphi - 6\lambda_1^{\,3}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\lambda_2\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\lambda_1\sin 3\varphi + 2\lambda_1^{\,3}\sin 3\varphi$$

$$m_4 = \int_0^{2\pi}\Big(2\lambda_1^{\,2}(\cos 2\varphi - 1)(5\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi + \sin 3\varphi) +$$

$$+ 2\sin^2\varphi\left(1 - \lambda_2 - 2\lambda_1\left(\lambda_1^{\,2} - 1\right)\cos\varphi + 2\lambda_1^{\,2}\lambda_2\sin\varphi + 2\lambda_1^{\,2}\sin 3\varphi\right)\Big)d\varphi = -2\pi(\lambda_2 - 1) = 0$$

Отсюда следует $\lambda_2 = 1$.

$$l_5 = \frac{1}{9}\left(-63\lambda_1{}^2 + 126\lambda_1{}^4 - 78\lambda_1\varphi + \left(72\lambda_1{}^2 - 144\lambda_1{}^4\right)\cos^2\varphi + \left(18\lambda_1{}^4 - 9\lambda_1{}^2\right)\cos 4\varphi -\right.$$
$$\left. - 9\lambda_1{}^2 \sin\varphi + 4\lambda_1 \cos 3\varphi \sin^3\varphi + 39\lambda_1 \sin 2\varphi + 3\lambda_1{}^2 \sin 3\varphi\right)$$

$$m_5 = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(\lambda_1 \sin^2\varphi\left(-13 - 3\lambda_1\cos\varphi + \cos 4\varphi - 12\lambda_1 \sin 2\varphi + 24\lambda_1{}^3 \sin 2\varphi\right)\right)d\varphi =$$
$$= \frac{52}{3}\pi\lambda_1 = 0$$

Находим, что $\lambda_1 = 0$.

Оказывается, что при найденных значениях $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ коэффициенты ОФ l_2, l_3, l_4, l_5 обращаются в нуль. Более того, видим, что вычисление каждого последующего m_i сводится к вычислению интеграла $\int_0^{2\pi} 0\, d\varphi$. Не трудно убедиться, что именно $F(\rho,\varphi) = \rho$ является ОФ уравнения (10). Следовательно, при $\lambda_0 = 2, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, система, записанная в полярных координатах в виде (10) имеет центр в точке (0, 0).

Методом Ляпунова.

Будем искать решение уравнения (10) в виде $\rho = c + c^2 h_1(\varphi) + c^3 h_2(\varphi) + \ldots$ Вычислим коэффициенты ряда и найдем необходимые условия центра.

$$h_1 = \frac{1}{3}\left(1 + 3\lambda_2 + 6\varphi - 3\lambda_0\varphi - 3\lambda_2\cos\varphi - \cos 3\varphi - 3\lambda_1 \sin\varphi\right)$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-2 + \lambda_0 + \lambda_1\cos\varphi - \sin\varphi - \lambda_2\sin\varphi - 2\cos 2\varphi \sin\varphi\right)d\varphi = \lambda_0 - 2 = 0$$

Отсюда $\lambda_0 = 2$.

$$h_2 = \frac{1}{18}\left(12 + 9\lambda_1{}^2 + 12\lambda_2 + 27\lambda_2{}^2 - (12\lambda_2 + 36\lambda_2{}^2)\cos\varphi -\right.$$
$$- (9 + 9\lambda_1{}^2 - 6\lambda_2 - 9\lambda_2{}^2)\cos 2\varphi - (4 + 12\lambda_2)\cos 3\varphi + 6\lambda_2\cos 4\varphi + \cos 6\varphi -$$
$$\left. - 12\lambda_1(1 + 3\lambda_2)\sin\varphi - 6\lambda_1(1 - 3\lambda_2)\sin 2\varphi + 6\lambda_1 \sin 4\varphi\right)$$

$$g_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\left(-1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_2\cos\varphi + \cos 3\varphi + 3\lambda_1\sin\varphi\right)\left(-\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi + \sin 3\varphi\right)\right)d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$h_3 = \frac{1}{540}\left(2552 + 135\lambda_1 + 270\lambda_1{}^2 + 720\lambda_2 + 810\lambda_1{}^2\lambda_2 + 810\lambda_2{}^2 + 1350\lambda_2{}^3 + 270\varphi - 270\lambda_2\varphi +\right.$$
$$+ (-2160 + 135\lambda_1{}^2 - 270\lambda_2 - 405\lambda_1{}^2\lambda_2 - 1215\lambda_2{}^2 - 2025\lambda_2{}^3)\cos\varphi - (270 + 135\lambda_1 + 270\lambda_1{}^2 + 630\lambda_2 +$$
$$+ 810\lambda_1{}^2\lambda_2 - 810\lambda_2{}^2 - 810\lambda_2{}^3)\cos 2\varphi - (255 + 270\lambda_1{}^2 - 405\lambda_1{}^2\lambda_2 + 810\lambda_2{}^2 + 135\lambda_2{}^3)\cos 3\varphi +$$
$$+ (180\lambda_2 + 540\lambda_2{}^2)\cos 4\varphi + (108 + 135\lambda_1{}^2 - 45\lambda_2 - 135\lambda_2{}^2)\cos 5\varphi + (30 + 90\lambda_2)\cos 6\varphi - 45\lambda_2\cos 7\varphi -$$
$$- 5\cos 9\varphi - (1350\lambda_1 + 405\lambda_1{}^3 + 810\lambda_1\lambda_2 + 2025\lambda_1\lambda_2{}^2)\sin\varphi - (135 + 180\lambda_1 - 135\lambda_2 - 1620\lambda_1\lambda_2{}^2)\sin 2\varphi +$$
$$\left. + (360\lambda_1 + 135\lambda_1{}^3 - 405\lambda_1\lambda_2{}^2)\sin 3\varphi + (180\lambda_1 + 540\lambda_1\lambda_2)\sin 4\varphi + (45\lambda_1 - 270\lambda_1\lambda_2)\sin 5\varphi - 45\lambda_1\sin 7\varphi\right)$$

$$\begin{aligned}
&g_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\lambda_1\cos\varphi\sin\varphi+\lambda_2\sin^2\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi(-1-3\lambda_2+3\lambda_2\cos\varphi+\cos 3\varphi+3\lambda_1\sin\varphi)^2-4\sin\varphi-\\
&-\sin^2\varphi-\frac{1}{9}(-\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi)(-1-3\lambda_2+3\lambda_2\cos\varphi+\cos 3\varphi+3\lambda_1\sin\varphi)^2+\frac{4}{9}\sin^2\frac{\varphi}{2}\times\\
&\times\Big(\frac{4}{9}\sin^2\frac{\varphi}{2}(-12-9\lambda_1{}^2-6\lambda_2-9\lambda_2{}^2-3(4+3\lambda_1{}^2-3\lambda_2{}^2)\cos\varphi+(3+6\lambda_2)\cos 3\varphi+2\cos 4\varphi+\cos 5\varphi+\\
&+12\lambda_1\sin\varphi+18\lambda_1\lambda_2\sin\varphi+12\lambda_1\sin 2\varphi+6\lambda_1\sin 3\varphi)(-\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi))\ \Big)d\varphi=\lambda_2-1=0
\end{aligned}$$

Получили $\lambda_2=1$.

$$\begin{aligned}
&h_4=\frac{1}{12960}\big(475111+10368\lambda_1+98010\lambda_1{}^2+4860\lambda_1{}^4-47520\lambda_1\varphi+\\
&+(-569856\cos\varphi+2160\lambda_1-34560\lambda_1{}^2)\cos\varphi+\\
&+(130176-17280\lambda_1-96120\lambda_1{}^2-6480\lambda_1{}^4)\cos 2\varphi+\\
&+(-101632+3240\lambda_1+17280\lambda_1{}^2)\cos 3\varphi+(72558+3510\lambda_1{}^2+1620\lambda_1{}^4)\cos 4\varphi-\\
&+(-9216+1512\lambda_1+17280\lambda_1{}^2)\cos 5\varphi+(8408-4320\lambda_1{}^2)\cos 6\varphi-5760\cos 7\varphi+\\
&+(591-1080\lambda_1{}^2)\cos 8\varphi-640\cos 9\varphi+240\cos 10\varphi+20\cos 12\varphi-\\
&-(379776\lambda_1+16200\lambda_1{}^2+51840\lambda_1{}^3)\sin\varphi+(381600\lambda_1+12960\lambda_1{}^3)\sin\varphi\cos\varphi+\\
&+(-5760\lambda_1+5400\lambda_1{}^2+17280\lambda_1{}^3)\sin 3\varphi+54792\lambda_1\sin 4\varphi-28800\lambda_1\sin 5\varphi+\\
&+(1728\lambda_1-2160\lambda_1{}^3)\sin 6\varphi-5760\lambda_1\sin 7\varphi+1920\lambda_1\sin 8\varphi+240\lambda_1\sin 10\varphi\ \big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_4=\frac{1}{1080\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}(-8648\lambda_1-675\lambda_1{}^2-1080\lambda_1{}^3-2\lambda_1(7658+675\lambda_1+1080\lambda_1{}^2)\cos\varphi-\\
&-\lambda_1(675\lambda_1-2488)\cos 2\varphi+(4392\lambda_1+1620\lambda_1{}^3)\cos 3\varphi+(7016\lambda_1+1080\lambda_1{}^3)\cos 4\varphi+\\
&+(508+540\lambda_1{}^3)\cos 5\varphi-940\lambda_1\cos 7\varphi-200\lambda_1\cos 8\varphi-100\lambda_1\cos 9\varphi+(14938+630\lambda_1+\\
&+4545\lambda_1{}^2++270\lambda_1{}^4)\sin\varphi+(6132+1350\lambda_1)\sin 2\varphi+(8174+630\lambda_1+2745\lambda_1{}^2+270\lambda_1{}^4)\sin 3\varphi-\\
&-(2488-315\lambda_1)\sin 4\varphi-(1057+2160\lambda_1{}^2)\sin 5\varphi-(1546+720\lambda_1)\sin 6\varphi+(67-360\lambda_1{}^2)\sin 7\varphi+\\
&+130\sin 9\varphi+20\sin 10\varphi+10\sin 11\varphi\Big)d\varphi=\frac{11}{3}\lambda_1=0
\end{aligned}$$

Следовательно $\lambda_1=0$.

Необходимые условия центра $\lambda_0=2,\lambda_1=0,\lambda_2=1$ для заданной системы получены также после вычисления четырех коэффициентов ряда, однако проводимые вычисления более громоздкие. А так как вычислительные машины ограничены в скорости производимых вычислений в единицу времени, то, сократив число операций на каждом шаге в два и более раз, мы увеличим возможное количество шагов метода.

Задача 2. Требуется выяснить, при каких значениях λ система (11) будет иметь центр, и доказать наличие центра при полученных условиях.

$$\begin{cases}\overset{*}{x}=2y+x^2+6xy-x^2y-2y^2-6xy^2+2xy^3+\lambda y^4,\\ \overset{*}{y}=-2x+3xy+6y^2-xy^2-6y^3+2y^4.\end{cases}\tag{11}$$

Методом ОФ.

Вычислим коэффициенты ряда (7) описанным выше способом и составим необходимые условия центра.

$$l_2 = \sin\varphi$$

$$m_2 = -\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = 0$$

$$l_3 = \sin^2\varphi$$

$$m_3 = -2\int_0^{2\pi}\cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$l_4 = -\frac{1}{10}\left(-10-\lambda+\lambda\cos 2\varphi\right)\sin^3\varphi$$

$$m_4 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-6-\lambda+\lambda\cos 2\varphi\right)\cos\varphi\,\sin^2\varphi\, d\varphi = 0$$

$$l_5 = \frac{1}{320}\left(120-160\cos 2\varphi+40\cos 4\varphi\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{320}\left(60-180\varphi-90\cos 2\varphi+36\cos 4\varphi-6\cos 6\varphi+135\sin 2\varphi-27\sin 4\varphi+3\sin 6\varphi\right)$$

$$m_5 = -\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-9\lambda\sin\varphi+9\lambda\cos^2\varphi\sin\varphi+20\cos\varphi+18\lambda\sin^2\varphi\cos\varphi\right)\sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{9\pi\lambda}{8} = 0.$$

На четвертом шаге метода получено условие $\lambda = 0$.

При $\lambda = 0$ получим $l_4 = \sin^3\varphi$, $l_5 = \sin^4\varphi$, $l_6 = \sin^5\varphi$, $l_7 = \sin^6\varphi$ и т. д. Разложение отражающей функции в ряд по степеням ρ имеет вид:

$$F(\rho,\varphi) = \rho+\rho^2\sin\varphi+\rho^3\sin^2\varphi+\rho^4\sin^3\varphi+\rho^5\sin^4\varphi+\rho^6\sin^5\varphi+\ldots=\frac{\rho}{1-\rho\sin\varphi} \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться, что функция (12) является отражающей функцией системы (11). Согласно Теореме 1 система (11) имеет в т. O(0,0) центр.

Методом Ляпунова.

Будем искать решение системы (11) в виде $\rho = c + c^2 h_1(\varphi) + c^3 h_2(\varphi) + \ldots$ Вычислим коэффициенты ряда и найдем необходимые условия центра.

$$h_1 = \frac{1}{2}\left(-6+6\cos\varphi-\sin\varphi\right)$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{2}+3\sin\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$h_2 = \frac{1}{8}\left(109-144\cos\varphi+35\cos 2\varphi+24\sin\varphi-12\sin 2\varphi\right)$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(-6+6\cos\varphi-\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi+6\sin\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$h_3=\frac{1}{480}\big(-33260+49230\cos\varphi-18900\cos 2\varphi+2930\cos 3\varphi-(8145+30\lambda)\sin\varphi+$$
$$+6480\sin 2\varphi+(15\lambda-1605\sin 3\varphi)-3\lambda\sin 5\varphi\big)$$

$$g_3=\frac{1}{64\pi}\int_0^{2\pi}\big((543+2\lambda)\cos\varphi-864\cos 2\varphi+(321-3\lambda)\cos 3\varphi+\lambda\cos 5\varphi+$$
$$+3282\sin\varphi+2520\sin 2\varphi+586\sin 3\varphi\big)d\varphi=0$$

$$h_4=\frac{1}{3840}\big(1430490+170\lambda+1080\lambda\varphi-2253120\cos\varphi+$$
$$+(1073160-255\lambda)\cos 2\varphi-281280\cos 3\varphi+(30750+102\lambda)\cos 4\varphi+$$
$$+17\lambda\cos 6\varphi+(369760+2880\lambda)\sin\varphi-(365920+1530\lambda)\sin 2\varphi+$$
$$+(154080-1440\lambda)\sin 3\varphi+(738\lambda-25040)\sin 4\varphi+$$
$$+288\lambda\sin 5\varphi-162\sin 6\varphi\big)$$

$$g_4=\frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\big(\sin^4\varphi(8-6\lambda+6\lambda\cos 2\varphi+\lambda\sin 2\varphi)+4(-6+6\cos\varphi-\sin\varphi)\times$$
$$\times\big(1/4(6-6\cos\varphi+\sin\varphi)^2(\cos\varphi+6\sin\varphi)+\sin^3\varphi(4+\lambda\sin 2\varphi)\big)+$$
$$+1/60(\cos\varphi+6\sin\varphi)(-33260+49230\cos\varphi+18900\cos 2\varphi+2930\cos 3\varphi-$$
$$-(8145+30\lambda)\sin\varphi+6480\sin 2\varphi+(15\lambda-1605)\sin 3\varphi-3\lambda\sin 5\varphi\big)d\varphi=-\frac{9\lambda}{32}=0$$

Необходимое условие центра $\lambda=0$ найдено на четвертом шаге метода Ляпунова.

Аналогично, как и с использованием отражающей функции, достаточно четырех шагов метода для нахождения необходимого условия центра системы (11). Однако достаточность этого условия не является очевидной.

Доказанная нами теорема дает новый подход к решению проблемы различения центра и фокуса.

Поставим перед собой задачу выяснить, при каких условиях функция (7) является отражающей функцией уравнения (3).

Решение этой задачи сводится к следующему: необходимо проверить выполнимость основного соотношения (6) для отражающей функции (7) и уравнения (3). Полученные условия того, что заданная функция (7) является отражающей функцией уравнения (3), являются достаточными условиями центра системы (1).

Рассмотрим, например, функцию

$$F(\varphi,\rho)=\frac{\rho}{1+s(\varphi)\rho}=\rho+s(\varphi)\rho^2+s(\varphi)^2\rho^3+s(\varphi)^3\rho^4+,\text{ где } s(0)=0$$

и выясним, при каких условиях она может быть отражающей функцией для уравнения (3). Уравнение (3) построим при переходе к полярным координатам в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3 + \\ \quad + a_8x^4 + a_9x^3y + a_{10}x^2y^2 + a_{11}xy^3 + a_{12}y^4, \\ \dot{y} = -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x^3 + b_5x^2y + b_6xy^2 + b_7y^3 + \\ \quad + b_8x^4 + b_9x^3y + b_{10}x^2y^2 + b_{11}xy^3 + b_{12}y^4. \end{cases} \tag{13}$$

Перейдем к полярным координатам в системе (13), получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\varphi,\rho) = \frac{f_2(\varphi)\rho^2 + f_3(\varphi)\rho^3 + f_4(\varphi)\rho^4}{-1 + g_1(\varphi)\rho + g_2(\varphi)\rho^2 + g_3(\varphi)\rho^3} \tag{14}$$

где

$f_2(\varphi) = a_1\cos^3\varphi + (a_2+b_1)\cos^2\varphi\sin\varphi + (a_3+b_2)\cos\varphi\sin^2\varphi + b_3\sin^3\varphi,$

$f_3(\varphi) = a_4\cos^4\varphi + (a_5+b_4)\cos^3\varphi\sin\varphi + (a_6+b_5)\cos^2\varphi\sin^2\varphi +$

$\quad + (a_7+b_6)\cos\varphi\sin^3\varphi + b_7\sin^4\varphi,$

$f_4(\varphi) = a_8\cos^5\varphi + (a_9+b_8)\cos^4\varphi\sin\varphi + (a_{10}+b_9)\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$

$\quad + (a_{11}+b_{10})\cos^2\varphi\sin^3\varphi + (a_{12}+b_{11})\cos\varphi\sin^4\varphi + b_{12}\sin^5\varphi,$

$g_1(\varphi) = b_1\cos^3\varphi + (-a_1+b_2)\cos^2\varphi\sin\varphi + (-a_2+b_3)\cos\varphi\sin^2\varphi - a_3\sin^3\varphi,$

$g_2(\varphi) = b_4\cos^4\varphi + (-a_4+b_5)\cos^3\varphi\sin\varphi + (-a_5+b_6)\cos^2\varphi\sin^2\varphi +$

$\quad + (-a_6+b_7)\cos\varphi\ \sin^3\varphi - a_7\sin^4\varphi,$

$f_4(\varphi) = b_8\cos^5\varphi + (-a_8+b_9)\cos^4\varphi\sin\varphi + (-a_9+b_{10})\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$

$\quad + (-a_{10}+b_{11})\cos^2\varphi\sin^3\varphi + (-a_{12}+b_{21})\cos\varphi\sin^4\varphi - a_{12}\sin^5\varphi.$

Теорема 2. *Для того, чтобы уравнение (12) имело дробно-линейную 2π-периодическую отражающую функцию, необходимо и достаточно выполнения условий:*

$-f_3(-\varphi) - f_3(\varphi) - f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi) - f_2(\varphi)\,g_1(\varphi) = 0$

$-f_4(-\varphi) - f_4(\varphi) + f_3(\varphi)\,g_1(-\varphi) + f_3(-\varphi)\,g_1(\varphi) + f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi)\,g_1(\varphi) +$
$+ f_2(\varphi)\,g_1(-\varphi)\,g_1(\varphi) - f_2(-\varphi)\,g_2(-\varphi) - f_2(\varphi)\,g_2(\varphi) - 2f_3(-\varphi)\,s(\varphi) -$
$-3f_3(\varphi)\,s(\varphi) - 2f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi)\,s(\varphi) - 3f_2(\varphi)\,g_1(\varphi)\,s(\varphi) = 0$

$-(f_2(-\varphi) + f_2(\varphi)\,g_3(\varphi) + (f_4(\varphi) + (f_2(-\varphi) + f_2(\varphi))\,g_2(\varphi))\,(g_1(-\varphi)\text{-}3\,s(\varphi))) +$
$+(f_3(-\varphi) + 2f_2(-\varphi)\,s(\varphi))\,(g_2(\varphi) + g_1(\varphi)\,s(\varphi)) + f_2(-\varphi)\,(g_3(\varphi) + g_2(\varphi)\,s(\varphi)) +$
$+(f_3(\varphi) + (f_2(-\varphi) + f_2(\varphi))\,g_1(\varphi))\,(g_2(-\varphi) + (2\,g_1(-\varphi) - 3\,s(\varphi))\,s(\varphi)) +$
$+(g_1(\varphi) - s(\varphi))\,(f_4(-\varphi) + s(\varphi)\,(f_3(-\varphi) + f_2(-\varphi)\,s(\varphi))) - f_2(-\varphi)\,(g_3(-\varphi) +$
$+s(\varphi)\,(g_2(-\varphi) + (g_1(-\varphi)\text{-}s(\varphi))\,s(\varphi))) = 0$

$$
\begin{aligned}
&(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\,g_3(\varphi)\,(g_1(-\varphi)-3\,s(\varphi))+f_2(-\varphi)\,g_3(\varphi)\,s(\varphi)+(f_3(-\varphi)+\\
&+2\,f_2(-\varphi)\,s(\varphi))\,(g_3(\varphi)+g_2(\varphi)\,s(\varphi))+(f_4(\varphi)+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\,g_2(\varphi))\\
&(g_2(-\varphi)+(2\,g_1(-\varphi)\text{-}3\,s(\varphi))\,s(\varphi))+(g_2(\varphi)+g_1(\varphi)\,s(\varphi))\,(f_4(-\varphi)+s(\varphi)\\
&(f_3(-\varphi)+f_2(-\varphi)\,s(\varphi)))+(f_3(\varphi))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\,g_1(\varphi))\,(g_3(-\varphi)+\\
&+s(\varphi)\,(g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\,s(\varphi)))=0
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(\varphi)\,s(\varphi)\,(f_3(-\varphi)+2\,f_2(-\varphi)\,s(\varphi))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\,g_3(\varphi)\,(g_2(-\varphi)+\\
&+(2\,g_1(-\varphi)\text{-}3\,s(\varphi))\,s(\varphi)+(g_3(\varphi)+g_2(\varphi)\,s(\varphi))\,(f_4(-\varphi)+s(\varphi)(f_3(-\varphi)+\\
&+f_2(-\varphi)\,s(\varphi)))+(f_4(\varphi)+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\,g_2(\varphi))(g_3(-\varphi)+\\
&+s(\varphi)\,(g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\,s(\varphi)))=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(\varphi)\,(s(\varphi)\,(f_4(-\varphi)+s(\varphi))\,(f_3(-\varphi)+f_2(-\varphi)\,s(\varphi)))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\times\\
&\times\,(g_3(-\varphi)+s(\varphi)\,(g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\,s(\varphi))))=0
\end{aligned}
$$

где $s(\varphi)=-\int\limits_0^{\varphi}\left(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\right)d\varphi$.

При этом сама отражающая функция будет иметь вид $F=\dfrac{\rho}{1-\rho\int\limits_0^{\varphi}\left(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\right)d\varphi}$.

Доказательство. Будем рассматривать дробно-линейную отражающую функцию вида $F(\varphi,\rho)=\dfrac{n(\varphi)\rho+r(\varphi)}{s(\varphi)\rho+n(-\varphi)}$. В нашем случае она должна раскладываться в ряд $F(\varphi,\rho)=\rho+z(\varphi)\rho^2+z(\varphi)^2\rho^3+z(\varphi)^3\rho^4+\ldots$ с периодическими по φ коэффициентами. Поэтому $F(\varphi,0)\equiv 0$, откуда следует, что $r(\varphi)\equiv 0$. Следовательно $F(\varphi,\rho)=\dfrac{n(\varphi)\rho}{s(\varphi)\rho+n(-\varphi)}=\dfrac{n(\varphi)\rho}{s_1(\varphi)\rho+1}$, видим, что $n(\varphi)\equiv 1$.

Составим основное соотношение (6), приведем к общему знаменателю полученное выражение, числитель разложим по степеням ρ. Приравняв коэффициент при ρ^2 нулю, получили дифференциальное уравнение, решив которое, выяснили, что если $F(\varphi,\rho)=\dfrac{\rho}{1+s_1(\varphi)\rho}$ является отражающей функцией уравнения (14), то $s_1(\varphi)=-\int\limits_0^{\varphi}\left(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\right)d\varphi$. Согласно теореме 1 система (13) будет иметь центр тогда и только тогда, когда $s_1(\varphi)-2\pi$ -периодическая. А это значит, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\right)d\varphi=0 \tag{16}$$

Видим, что коэффициенты при $\rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \rho^8, \rho^9$ не обращаются в нуль при любых $f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$. Приравнивая нулю каждое выражение при указанных степенях ρ, получим систему условий (15). Условия (15), (16) являются необходимыми и достаточными условиями 2π-периодичности отражающей функции уравнения (14).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для дифференциального уравнения (14) выполнены условия (15) и (16). Тогда все решения уравнения (14), продолжимые на* $[0{,}2\pi]$, *являются* 2π*-периодическими, а автономная система (13) имеет в точке (0,0) центр.*

Доказательство. Согласно теореме 2 уравнение (13) имеет дробно-линейную отражающую функцию, с 2π-периодическими по φ коэффициентами. Поэтому продолжимые на $[0{,}2\pi]$ решения этого уравнения являются 2π-периодическими. А по теореме 1 этого достаточно для того, чтобы автономная система (13) имела центр в начале координат.

Теорема доказана.

Запишем теперь условия (15), (16) через коэффициенты системы (13). Разложим полученные выражения в тригонометрические ряды Фурье. Эти выражения обращаются в нуль, когда коэффициенты при каждом тригонометрическом слагаемом обращаются в нуль. Т. о. получим 103 выражения, которые при некоторых условиях обратятся в тождества. Как было отмечено выше, эти условия являются достаточными условиями центра системы (13). Для отыскания этих условий воспользуемся понятием базиса Грёбнера [4, 5].

Теорема 4. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2, \\ \dot{y} = -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2. \end{cases} \tag{17}$$

имеет центр в начале координат, если коэффициенты системы (17) удовлетворяют следующим соотношениям.

$$b_1b_2 = 0,\ a_1b_1 = 0,\ -2a_1^3 + 3a_1^2b_2 - a_1b_2^2 = 0,\ -2a_1a_2b_2 + a_2b_2^2 = 0,\ 4a_1^2a_2 - a_2b_2^2 = 0,$$
$$-2a_1a_2^2 + a_2^2b_2 = 0,\ 2a_1a_2 - a_3b_1 - a_2b_2 = 0,\ a_1b_2^4 - a_3b_2^4 - b_2^5 = 0,\ -a_1a_2 - a_2a_3 = 0,$$
$$16a_1^2a_3 + 8a_1^2b_2 - 16a_1a_3b_2 - 11a_1b_2^2 + 3a_3b_2^2 + 3b_2^3 = 0, -a_1^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1b_2^3 + a_3b_2^3 = 0,$$
$$-2a_1^2b_2^2 + 2a_1a_3b_2^2 + 3a_1b_2^3 - a_3b_2^3 - b_2^4 = 0, -16a_3^3 - 24a_3^2b_2 + a_1b_2^2 - 9a_3b_2^2 - b_2^3 = 0,$$
$$-8a_1a_3^2 - 8a_1a_3b_2 + 4a_3^2b_2 - a_1b_2^2 + 5a_3b_2^2 + b_2^3 = 0.$$

При этом отражающая функция этой системы имеет вид

$$F(\varphi,\rho) = \frac{3\rho}{3 - \rho\sin\varphi\,(5a_1 + a_3 + b_2 + (a_1 - a_3 - b_2)\cos 2\varphi)}.$$

Пример 1. Рассмотрим следующие системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_2 xy, \\ \dot{y} = -x + b_1 x^2 + b_3 y^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y - b_2 y^2, \\ \dot{y} = -x + b_2 xy + b_3 y^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y + \dfrac{1}{2} b_2 x^2 + a_2 xy - \dfrac{1}{2} b_2 y^2, \\ \dot{y} = -x + b_2 xy. \end{cases}$$

Не трудно убедиться, что коэффициенты каждой из этих систем удовлетворяют условиям теоремы 4, т. е. указанные системы имеют центр в начале координат.

Теорема 5. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3 + \\ \quad + a_8 x^4 + a_9 x^3 y + a_{10} x^2 y^2 + a_{11} xy^3 + a_{12} y^4, \\ \dot{y} = -x + b_4 x^3 + b_5 x^2 y + b_6 xy^2 + b_7 y^3 + \\ \quad + b_8 x^4 + b_9 x^3 y + b_{10} x^2 y^2 + b_{11} xy^3 + b_{12} y^4 \end{cases} \tag{18}$$

имеет центр в начале координат, если коэффициенты системы (18) удовлетворяют следующим соотношениям.

$b_7 = 0,\ a_4 = 0,\ -a_6 a_7 - a_6 b_6 = 0,\ a_6 + b_5 = 0,\ -a_5 a_6 - a_6 b_4 = 0,$
$-a_7^2 b_9 - 2a_7 b_6 b_9 - b_6^2 b_9 = 0,\ a_5 a_7 b_9 + a_7 b_4 b_9 + a_5 b_6 b_9 + b_4 b_6 b_9 = 0,$
$a_5^2 b^9 + 2a_5 b_4 b_9 + b_4^2 b_9 = 0,\ a_5 b_9^2 + b_4 b_9^2 = 0,\ a_7 b_9^3 + b_6 b_9^3 = 0,$
$-a_7^2 b_{11} - 2a_7 b_{11} b_6 - b_{11} b_6^2 = 0,\ -a_5 a_7 b_{11} - a_7 b_{11} b_4 - a_5 b_{11} b_6 - b_{11} b_4 b_6 = 0,$
$a_5^2 b_{11} + 2a_5 b_{11} b_4 + b_{11} b_4^2 = 0,\ -2a_5 b_{11} b_9 - 2b_{11} b_4 b_9 - a_7 b_9^2 - b_6 b_9^2 = 0,$
$-a_7 b_{11} b_9^2 - b_{11} b_6 b_9^2 = 0,\ -a_7 b_{11}^2 - b_{11}^2 b_6 = 0,\ -a_7 b_{11} + a_6 b_{12} - b_{11} b_6 = 0,$
$-a_5 b_{11}^2 - b_{11}^2 b_4 - 2a_7 b_{11} b_9 - 2b_{11} b_6 b_9 = 0,\ a_7 b_{12} b_9 + b_{12} b_6 b_9 = 0,\ b_{12} b_9^3 = 0,$
$b_{11} b_{12} = 0,\ b_{12}^2 b_9 = 0,\ a_8 = 0,\ a_6 a_9 + a_6 b_8 - a_5 b_9 - b_4 b_9 = 0,\ -a_9 b_9 - b_8 b_9 = 0,$
$-a_7 a_9 b_{11} - a_9 b_{11} b_6 - a_7 b_{11} b_8 - b_{11} b_6 b_8 + a_5 b_{12} b_9 + b_{12} b_4 b_9 = 0,$
$a_5 a_9 b_{11} + a_9 b_{11} b_4 + a_5 b_{11} b_8 + b_{11} b_4 b_8 = 0,\ -a_9^2 b_{11} - 2a_9 b_{11} b_8 - b_{11} b_8^2 = 0,$
$a_{11} a_6 + a_6 b_{10} - a_5 b_{11} - b_{11} b_4 - a_7 b_9 - b_6 b_9 = 0,\ a_{11} b_{11} + b_{10} b_{11} + b_{12} b_9 = 0,$
$a_9 b_{11} + b_{11} b_8 + a_{11} b_9 + b_{10} b_9 = 0, a_9 b_{11}^2 + b_{11}^2 b_8 - b_{12} b_9^2 = 0,\ a_{10} + b_9 = 0,\ a_{12} + b_{11} = 0.$

Отражающая функция системы (18) в этом случае имеет вид $F(\varphi, \rho) = \rho$.

Пример 2. Система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_5 x^2 y + a_7 y^3 + a_9 x^3 y + a_{11} xy^3, \\ \dot{y} = -x + b_4 x^3 + b_6 xy^2 + b_8 x^4 + b_{10} x^2 y^2 + b_{12} y^4, \end{cases}$$

имеет центр в начале координат, т. к. для коэффициентов этой системы выполняются все условия теоремы 5.

Приведенные примеры доказывают эффективность использования метода отражающей функции для доказательства наличия центра некоторых двумерных дифференциальных систем.

Применение метода отражающей функции для решения проблемы «центра-фокуса» дало нам возможность сформулировать и доказать следующую теорему о достаточных условиях наличия центра системы (1).

Теорема 6. *Пусть имеем уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2\frac{B_0+B_1\rho+B_2\rho^2+B_3\rho^3+B_4\rho^4+B_5\rho^5}{A_0+A_1\rho+A_2\rho^2+A_3\rho^3+A_4\rho^4+A_5\rho^5+A_6\rho^6} \tag{19}$$

где A_0 *чётная функция,* $A_3=0$. *И пусть функции* $b=-\dfrac{A_4}{A_2}$ *и*

$$\begin{aligned}a=\Big(&-4A_0A_1B_0+2A_1^2B_0+4A_0A_2B_0+4A_0^2B_1-2A_0A_1B_1-4A_0^2B_2+7A_1^2\overline{B_0}-4A_0A_2\overline{B_0}-\\&-11\overline{A_1}^2\overline{B_0}+8A_0A_2B_0+4A_0^2b(\varphi)\left(B_0+\overline{B_0}\right)+4A_0^2\overline{B_1}-4A_0A_1\overline{B_1}-4A_0^2\overline{B_2}+\\&+\left(6A_0^2-4A_0^3\right)b'(\varphi)+2A_1(A_1B_0-A_0B_1+2(A_0-A_1)\overline{B_0}-2A_0\overline{B_1}+A_0^2b'(\varphi))\Big)/\\&/\Big(8A_0\Big(A_1B_0-A_0B_1+\overline{A_1}\overline{B_0}-A_0\overline{B_1}+A_0^2b'(\varphi)\Big)\Big)\end{aligned}$$

доопределяются до дифференцируемых на всем R функций. Тогда, если для этого уравнения выполнены условия: $A_6=-b^3A_0$, $B_5=b^2b'A_0$, $A_5=-b^2A_1$, *и функции* $a_1=A_1+2aA_0$, $a_0=A_2-A_1a+A_0b+A_0a^2$ – *чётные, а функции* $\alpha_0=B_2-A_2a'+a^2\left(B_0-A_0a'\right)-b\left(2B_0+A_0a'\right)-A_1b'+a\left(A_1a'+A_0b'-B_1\right)$, $\alpha_2=B_0-A_0a'$, $\alpha_1=B_1-2B_0a+3A_0a'a-A_1a'-A_0b'$ – *нечётные, то система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах сводится к уравнению (19), имеет центр в начале координат.*

Доказательство. Для функции $U=\dfrac{1}{\rho}+a+b\rho$ найдем полную производную

$$\frac{dU}{d\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\rho}R=\rho^2\frac{B_0+B_1\rho+B_2\rho^2+B_3\rho^3+B_4\rho^4+B_5\rho^5}{A_0+A_1\rho+A_2\rho^2+A_3\rho^3+A_4\rho^4+A_5\rho^5+A_6\rho^6}=\frac{\alpha_0+\alpha_1U+\alpha_2U^2}{a_0+a_1U+a_2U^2}.$$

Из этого соотношения, согласно [1, 65], следует, что $U(\varphi,\rho(\varphi))$ чётная функция для любого решения $\rho(\varphi)$ уравнения (18). Поэтому отражающая функция уравнения (19) удовлетворяет соотношению $U\left(-\varphi,F\right)\equiv U(\varphi,\rho(\varphi))$.

Из вышесказанного, в силу 2π-периодичности коэффициентов уравнения (18), следует 2π-периодичность отражающей функции F. Тогда по теореме 1 система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах записывается уравнением (19), будет иметь центр в начале координат.

Литература

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем : монография / В.И. Мироненко ; Мин. образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.
2. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и проблема различения «центра-фокуса» / В.И. Мироненко // «Еругинские чтения – XI» : тез. докладов Междунар. математической конф. ; Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2006. – С. 55.
4. Кокс, Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. – М. : Мир, 2000. – 688 с.
5. Аржанцев, И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений / И.В. Аржанцев. – М. : МЦЭНМО, 2003. – 68 с.

Е. А. Горбач, В. В. Шепелевич

ВЛИЯНИЕ ГИРОТРОПИИ ПРИ ЗАПИСИ И СЧИТЫВАНИИ ПРОПУСКАЮЩИХ ГОЛОГРАММ НА ДИФРАКЦИОННУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФАЗОВЫХ ГОЛОГРАММ

В качестве регистрирующих материалов для записи голограмм могут использоваться оптически активные среды. В работе [1] была рассмотрена задача о влиянии гиротропии при записи пропускающих фазовых голограмм в изотропном плоскопараллельном слое в случае, когда опорная и предметная волны линейно поляризованы перпендикулярно плоскости падения (азимут поляризации $\psi_0 = 90°$ и угол Брэгга фиксированный $\varphi_0 = 30°$). Показано, что «включение» гиротропии при записи приводит к заметному изменению значения дифракционной эффективности. В [2] изучалась зависимость дифракционной эффективности голограмм от толщины регистрирующего слоя при определенном угле Брэгга в случае, когда гиротропия учитывалась только при считывании. Показано, что «включение» гиротропии при считывании приводит к качественному изменению зависимости дифракционной эффективности от толщины. Однако в этих работах зависимость дифракционной эффективности от угла схождения опорной и предметной волн не исследовалась. Практически отсутствуют публикации по исследованию дифракционной эффективности голограмм в случае, когда влияние гиротропии учитывается как при записи, так и при считывании голограмм.

В рассматриваемой работе исследуется зависимость дифракционной эффективности голограммы от угла Брэгга и толщины слоя одновременно в случае, когда гиротропия «включена» и при записи, и при считывании.

Предположим, что в изотропной прозрачной естественно гиротропной среде записана пропускающая фазовая голографическая решетка. В этом случае уравнения связанных волн имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_\perp}{dz} &= \alpha_\varphi R_\parallel + i\kappa_1 S_\perp, \\
\frac{dR_\parallel}{dz} &= -\alpha_\varphi R_\perp + i\kappa_2 S_\parallel, \\
\frac{dS_\perp}{dz} &= i\kappa_1 R_\perp + \alpha_\varphi S_\parallel, \\
\frac{dS_\parallel}{dz} &= i\kappa_2 R_\parallel - \alpha_\varphi S_\perp,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где $R_\perp$, $R_\parallel$, $S_\perp$, $S_\parallel$ – комплексные проекции векторных амплитуд $\vec{R}$ и $\vec{S}$ световых волн, распространяющихся внутри гиротропного слоя на направление, перпендикулярное плоскости падения ($\perp$), и на направления $\vec{e}_R$ и $\vec{e}_S$, лежащие в плоскости падения ($\parallel$); $\alpha_\varphi = \dfrac{\alpha}{\cos\varphi_0}$, α – удельное вращение плоскости поляризации, φ_0 – угол Брэгга внутри слоя; $\kappa_1 = \dfrac{\kappa_0}{\cos\varphi_0}$, $\kappa_2 = \dfrac{\kappa_0 \cos 2\varphi_0}{\cos\varphi_0}$, $\kappa_0 = \dfrac{\pi\Delta n}{2\lambda\bar{n}} f(z)$, Δn – амплитуда пространственной модуляции показателя преломления, $\bar{n}$ – усредненный по пространству показатель преломления, λ – длина волны источника излучения, $f(z)$ – модулирующая функция.

Модулирующую функцию для произвольной поляризации можно представить в виде

$$f(z) = \sqrt{\left[(B+A)\cos u + (D+C)\cos v\right]^2 + \left[(B-A)\sin u + (D-C)\sin v\right]^2}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\tau_R+1)(\tau_S+1)}{a}\cos^2\frac{\varphi_R-\varphi_S}{2}, \\
B &= \frac{(\tau_R-1)(\tau_S-1)}{a}\cos^2\frac{\varphi_R-\varphi_S}{2}, \\
C &= \frac{(\tau_R+1)(\tau_S-1)}{a}\sin^2\frac{\varphi_R-\varphi_S}{2}, \\
D &= \frac{(\tau_R-1)(\tau_S+1)}{a}\sin^2\frac{\varphi_R-\varphi_S}{2}, \\
a &= 2\sqrt{(1+\tau_R^2)(1+\tau_S^2)},
\end{aligned}$$

$$u=\left(\frac{1}{\cos\varphi_R}-\frac{1}{\cos\varphi_S}\right)\alpha_\varphi d-\left(\psi_R-\psi_S\right),$$

$$v=\left(\frac{1}{\cos\varphi_R}+\frac{1}{\cos\varphi_S}\right)\alpha_\varphi d-\left(\psi_R+\psi_S\right),$$

τ_R, τ_S – эллиптичности опорной и предметной волн, ψ_R, ψ_S – азимуты поляризации этих волн, φ_R, φ_S – углы, образованные волновыми векторами опорной и предметной волн с нормалью к границе раздела двух сред [3].

Рассмотрим случай, когда опорная и предметная волны линейно поляризованы в плоскости падения ($\psi_R=\psi_S=\psi_0=0$, $\varphi_R=-\varphi_S=\varphi_0$, $\tau_R=\tau_S=0$), тогда $f(z)=\cos^2\varphi_0-\sin^2\varphi_0\cos\left(\frac{4\pi\alpha d}{\lambda\cos\varphi_0}\right)$ [4].

Учтем коэффициенты Френеля для преломленной волны. Они приводят к уменьшению значения дифракционной эффективности при увеличении угла Брэгга. Для границы воздух-среда коэффициенты Френеля имеют вид

$$T_{\perp 1}=\frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_0}{\sin\left(\varphi_0+\varphi_1\right)},\ T_{\parallel 1}=\frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_0}{\sin\left(\varphi_0+\varphi_1\right)\cos\left(\varphi_0-\varphi_1\right)},\qquad (3)$$

$$\varphi_1=\arcsin\left(\sin\frac{\varphi_0}{n}\right),$$

где φ_0 – угол падения,

φ_1 – угол преломления,

n – показатель преломления среды.

Для границы среда-воздух коэффициенты Френеля имеют вид

$$T_{\perp 2}=\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)},\ T_{\parallel 2}=\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)},\qquad (4)$$

$$\varphi_2=\arcsin\left(\sin\varphi_1 n\right),$$

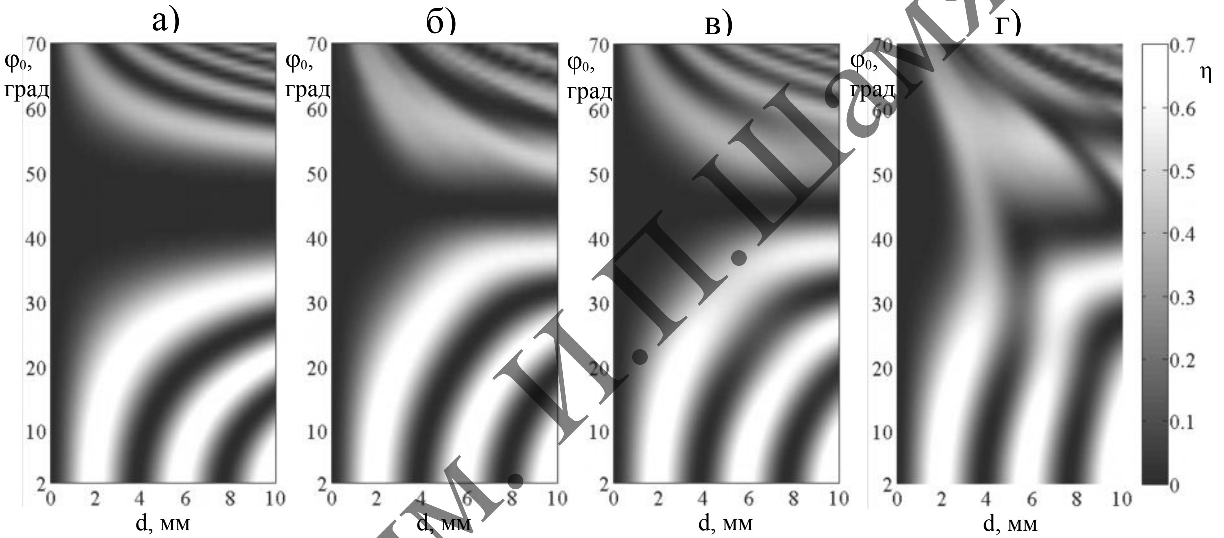
где φ_1 – угол падения,

φ_2 – угол преломления [5].

При моделировании принимаем значение удельного вращения плоскости поляризации $\alpha=0.2165\ \frac{\text{рад}}{\text{мм}}$, показатель преломления регистрирующей среды типа реоксан $n=1.5$ [6], длина волны $\lambda = 0.6328$ мкм.

Система дифференциальных уравнений (1) решалась методом Рунге-Кутта, а дифракционная эффективность вычислялась по известной формуле [7].

Из рисунка 1 видно, что при увеличении угла схождения от 2º до 40º максимумы дифракционной эффективности в случаях а), б) и в) смещаются в сторону увеличения толщины регистрирующего слоя d, а дифракционная эффективность в области $\varphi_0 = 45^{\circ}$ обращается в нуль. Это обусловлено тем, что при таком значении φ_0 угол между векторами $\vec{R}$ и $\vec{S}$ получается равным 90º, что приводит к отсутствию видности интерференционных полос при $\psi_0 = 0°$. К тому же область малой дифракционной эффективности при $\varphi_0 \approx 45^{\circ}$ в отсутствие гиротропии (а) шире соответствующих областей в случаях б) и в), а в диапазоне значений толщины регистрирующего слоя $2\ мм < d < 9\ мм$ в случае г) вообще отсутствует. Учет гиротропии при записи и считывании (г) приводит к значительным качественным изменениям графика зависимости дифракционной эффективности голограммы от угла φ_0 и толщины регистрирующего слоя d.

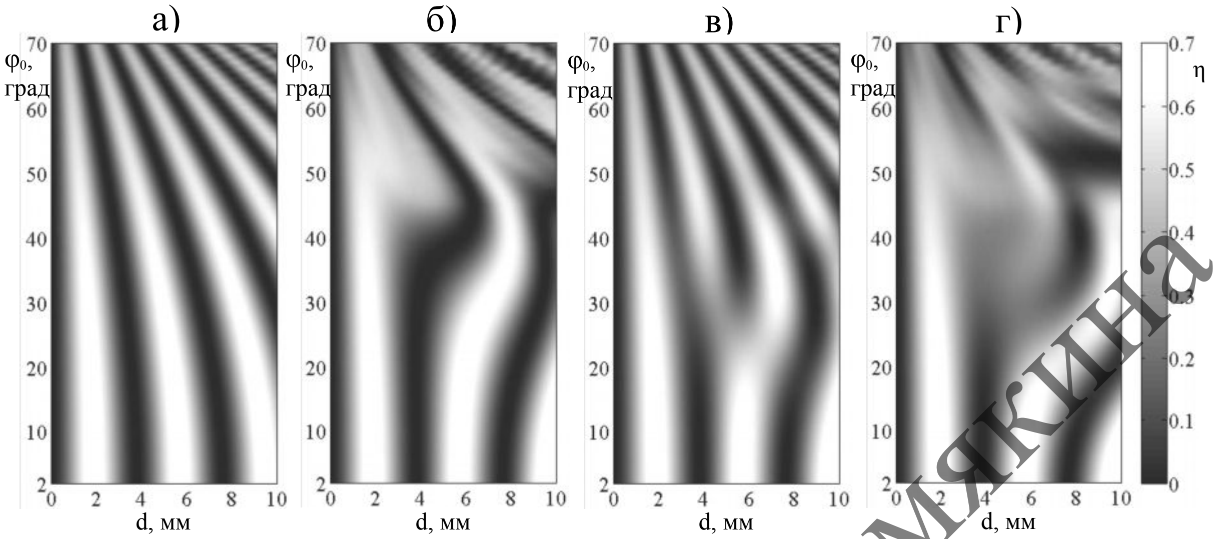


а) – гиротропия не учитывается, б) – гиротропия учитывается при записи, в) – гиротропия учитывается при считывании, г) – гиротропия учитывается при записи и считывании

Рисунок 1 – Зависимость дифракционной эффективности от угла Брэгга φ_0 и толщины слоя d ($\psi_0 = 0°$)

Рассмотрим случай, когда опорная и предметная волны линейно поляризованы в плоскости падения ($\psi_R = \psi_S = \psi_0 = 90°$, $\varphi_R = -\varphi_S = \varphi_0$, $\tau_R = \tau_S = 0$), тогда $f(z) = \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 \cos\left(\dfrac{4\pi\alpha d}{\lambda\cos\varphi_0}\right)$.

Из рисунка 2 видно, что при увеличении угла Брэгга φ_0 число максимумов дифракционной эффективности при $\varphi_0 = \mathrm{const}$ в случаях а) и в) возрастает. В случаях б) и г) в области $\varphi_0 \approx 45^{\circ}$ наблюдаются качественные изменения значения дифракционной эффективности, увеличивается диапазон толщин, при которых дифракционная эффективность принимает значения, близкие к максимальным. При малых углах φ_0 до 10º значительных изменений значений дифракционной эффективности не происходит как при наличии гиротропии, так и при ее отсутствии.



а) – гиротропия не учитывается, б) – гиротропия учитывается при записи, в) – гиротропия учитывается при считывании, г) – гиротропия учитывается при записи и считывании

Рисунок 2 – Зависимость дифракционной эффективности от угла Брэгга φ_0 и толщины слоя d ($\psi_0 = 90^o$)

Полученные результаты могут быть использованы для определения оптимальных толщин регистрирующих слоев и углов Брэгга при наличии гиротропии при записи и считывании голограмм.

Литература

1. Шепелевич, В.В. О голографических решетках в гиротропных средах / В.В. Шепелевич // Письма в ЖТФ. – 1981. – Т. 7, № 23. – С. 1380–1384.
2. Шепелевич, В.В. Дифракция света на объемных голографических решетках, считываемых при включенной гиротропии / В.В. Шепелевич // ЖТФ. – 1985. – Т. 55, № 6. – С. 1201–1203.
3. Шепелевич, В.В. Голографические решетки в плоскопараллельном гиротропном слое / В.В. Шепелевич // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. – Минск : ИФ АН БССР, 1991. – С. 78–82.
4. Шепелевич, В.В. К процессу формирования голографических решеток в плоскопараллельном гиротропном слое / В.В. Шепелевич // Опт. и спектр. – 1983. – Т. 54, № 5. – С. 1064–1071.
5. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф ; пер. с англ. – 2-е изд. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
6. Батомункуев, Ю.Ц. Расчет схемы записи цилиндрическими волнами объемного внеосевого голографического оптического элемента / Ю.Ц. Батомункуев, Н.А. Мещеряков // Автометрия. – 1999. – № 4. – С. 33–38.
7. Kogelnik, H. Coupled wave theory for thick hologram gratings / H. Kogelnik // Bell Syst. Techn. Journ. – 1969. – V. 48, № 9. – P. 2909–2947.

Н. В. Гуцко

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ *p*-НИЛЬПОТЕНТНЫХ И *p*-СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ПО СВОЙСТВАМ ИХ С-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Напомним, что подгруппа A группы G перестановочна с подгруппой B, если $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется перестановочной [1] или квазинормальной [2] в G, если она перестановочна со всеми подгруппами группы G.

Подгруппа H группы G называется c-нормальной в G, если существует нормальная подгруппа T из G такая, что $G = HT$ и $T \cap H$ – нормальная подгруппа в G. Понятие c-нормальности было введено в работе [3], где была построена содержательная теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации непростых подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп.

Определение 1. Пусть H – подгруппа группы G. Тогда будем говорить, что H c-квазинормальна в G, если в G имеется такая квазинормальная подгруппа T, что $G = HT$ и $T \cap H$ квазинормальна в G.

Основной целью данной работы является изучение строения группы при условии, что некоторые максимальные или минимальные подгруппы силовских подгрупп этой группы c-квазинормальны.

В наших доказательствах мы будем использовать следующие общие свойства c-квазинормальных подгрупп.

Лемма 2. *Пусть G – группа и* $H \le K \le G$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если H квазинормальна в G, то H c-квазинормальна в G.*

(2) *Если H c-квазинормальна в G, то H c-квазинормальна в K.*

(3) *Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда* K/H *– c-квазинормальная подгруппа в группе* G/H *тогда и только тогда, когда K – c-квазинормальная подгруппа в группе G.*

(4) *Пусть H – нормальная в G подгруппа. Тогда для всех c-квазинормальных в G подгрупп E таких, что* $(|H|, |E|) = 1$, HE/H *– c-квазинормальная подгруппа в группе* G/H.

(5) *Пусть H – p-группа, для некоторого простого числа p, и H – c-квазинормальная в G подгруппа, которая не квазинормальна в G. Тогда в группе G существует такая нормальная подгруппа M, что* $|G:M| = p$ *и* $G = HM$.

Лемма 3. (см. [2]). *Пусть* G *– группа и* $H \le G$. *Тогда если H квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

Лемма 4. (см. [4; II, следствие 7.7.2]). *Пусть G – группа и* $A \le G$. *Тогда*

(1) *Если A – субнормальная холлова подгруппа группы G, то A нормальна в группе G.*

(2) *Если A субнормальна в G и A – π-подгруппа группы G, то* $A \le O_{\pi}(G)$.

(3) *Если A – субнормальная разрешимая подгруппа группы G, то A содержится в некоторой разрешимой нормальной в G подгруппе.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [5, лемма A]).

Лемма 5. *Если H квазинормальна в G и H – p-группа для некоторого простого p, то* $O^{p}(G) \le N_{G}(H)$.

Напомним определения формации, насыщенной формации и приведем основные обозначения.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Таким образом, для формации выполняются требования:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и N нормальна в G, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

(2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. для нее выполняется требование: если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \le \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть p – простое число. Обозначим через $\mathfrak{U}_p$ – класс всех групп G таких, что каждый p-главный фактор группы G является циклическим (G – p-сверхразрешимая группа), и через $\mathfrak{U}$ обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Ясно, что $\mathfrak{U}_p$ и $\mathfrak{U}$ являются насыщенными формациями.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и пусть G – группа с разрешимым* $\mathfrak{F}$*-корадикалом* $P = G^{\mathfrak{F}}$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $P = G^{\mathfrak{F}}$ *– p-группа для некоторого простого числа p и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если* $p = 2$ *и P – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G, то* $|P/\Phi(P)| = p$.

Доказательство. Согласно [4, теорема 24.2], $P = G^{\mathfrak{F}}$ – p-группа для некоторого простого числа p и справедливы следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G;

(2) P имеет экспоненту p или экспоненту 4 (если $p = 2$ и P – неабелевая группа).

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G.

Пусть $\Phi = \Phi(P)$, X/Φ – подгруппа простого порядка в P/Φ, $x \in X/\Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$ и поэтому по условию либо L имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо подгруппа L c-квазинормальна в G. В первом случае мы можем предполагать, что $T \neq G$ и поэтому поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то

$$(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi.$$

Значит, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$ и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Таким образом, мы можем предполагать, что все подгруппы простого порядка группы P/Φ являются c-квазинормальными в G/Φ. В силу леммы и утверждения (1) это влечет $|P/\Phi(P)| = p$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G – группа с нормальной подгруппой N такой, что $G = QN$, для некоторой подгруппы Q в G. Если M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \leq M$, то $M \cap Q$ – максимальная подгруппа в Q.*

Доказательство. Поскольку $G/N \cong Q/(Q \cap N)$, то $(M \cap Q)/(Q \cap N)$ – максимальная подгруппа в $Q/(Q \cap N)$, и более того, $M \cap Q$ – максимальная подгруппа в Q. Лемма доказана.

Многими авторами изучалось строение групп, у которых максимальные подгруппы силовских подгрупп некоторых подгрупп основной группы c-квазинормальны. В данной работе мы прежде изучаем группу G, у которой каждая максимальная подгруппа силовской p-подгруппы c-квазинормальна.

Теорема 8. *Пусть p – наименьшее простое число, делящее порядок группы G, и P – силовская p-подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа в P является c-квазинормальной в G, то G – p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *Факторгруппа G/N p-нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы N из G.*

Применяя лемму 2 и лемму 7, видим, что условие теоремы наследуется факторгруппой G/N. Но $|G/N| < |G|$ и поэтому в силу выбора группы G имеем утверждение (1).

(2) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N и $N \not\subset \Phi(G)$.*

Это прямо вытекает из (1) и того факта, что класс всех p-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений (см. [4, с. 35]) и всегда из p-нильпотентности факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует p-нильпотентность самой группы G.

(3) *Подгруппа P не является циклической.*

Поскольку p является наименьшим простым делителем порядка группы G, то (3) следует из [6, теорема 10.1.9].

(4) $O_{p'}(G)=1$.

Действительно, предположим, что $O_{p'}(G)\neq 1$ и рассмотрим факторгруппу $G/O_p(G)$. Покажем, что $G/O_p(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. По условию теоремы, p делит порядок группы G, значит, p делит порядок группы $G/O_{p'}(G)$.

Пусть $P/O_p(G)$ – силовская p-подгруппа в $G/O_p(G)$ и $P_1/O_p(G)$ – произвольная максимальная в $P/O_{p'}(G)$подгруппа. Покажем, что подгруппа $P_1/O_p(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Если P_0 – силовская p-подгруппа в P, то $P=P_0O_{p'}(G)$ и P_0 является силовской p-подгруппой в G. Покажем, что $P_1\cap P_0$ – максимальная в P_0 подгруппа. Заметим, что $P_1\cap P_0\neq P_0$. Действительно, если $P_1\cap P_0=P_0$, то $P_0\subseteq P_1$, а, значит,

$$P_1/O_{p'}(G)=P_0O_{p'}(G)/O_{p'}(G)=P/O_{p'}(G),$$

что противоречит выбору подгруппы $P_1/O_{p'}(G)$. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $P_1\cap P_0\subset T\subset P_0$.Тогда

$$P_1=O_{p'}(G)(P_1\cap P_0)\subseteq TO_{p'}(G)\subseteq P_0O_{p'}(G)=P.$$

Но P_1 – максимальная в P подгруппа и поэтому

$$\text{либо } P_1=TO_{p'}(G), \text{ либо } TO_{p'}(G)=O_{p'}(G)P_0.$$

Если $P_1=TO_{p'}(G)$, то $T\subseteq P_1\cap P_0\subset T$, что невозможно. Итак, $TO_{p'}(G)=O_{p'}(G)P_0$ и поэтому

$$P_0=P_0\cap TO_{p'}(G)=T(P_0\cap O_{p'}(G))\subseteq T(P_1\cap P_0)=T.$$

Полученное противоречие показывает, что $P_1\cap P_0$ – максимальная в P_0 подгруппа. Согласно условию теоремы, $P_1\cap P_0$ – c-квазинормальная подгруппа в G. Тогда по лемме 2 (3) подгруппа $(P_1\cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Но $(P_1\cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)=P_1/O_{p'}(G)$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа $P_1/O_{p'}(G)$ из $P/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Итак, каждая максимальная подгруппа из $P/O_{p'}(G)$ c-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$.

Таким образом, $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. В силу минимальности G, мы видим, что $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна и поэтому G – p-нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G.

Пусть P_1 произвольная максимальная подгруппа в P. Тогда по условию теоремы G имеет такую квазинормальную подгруппу T, что $G=P_1T$ и $D=P_1\cap T$ – квазинормальная подгруппа в G.

(5) $D\neq 1$.

Пусть D = 1. Тогда T является p-нильпотентной подгруппой в G. Так как T – квазинормальная подгруппа в G, то по лемме 3 T субнормальна в G. Тогда $T_{p'}$ – субнормальная подгруппа в G. Но $T_{p'}=G_{p'}$ – холловская p'-подгруппа группы G и поэтому по лемме 4(1) эта подгруппа нормальна в группе G. Следовательно, G – p-нильпотентная группа. Это противоречит выбору группы G. Итак, $D\neq 1$.

Заключительное противоречие.

Так как $P_1\cap T$ – квазинормальная в G подгруппа, то по лемме 3 видим, что $P_1\cap T$ – субнормальная p-подгруппа в G. По лемме 4(2) имеем $P_1\cap T \leq O_p(G)$. Ввиду (2) существует максимальная подгруппа L из G такая, что $G=[N]L$ и $N\cap L=1$, причем $N=C_G(N)=O_p(G)$ (см. доказательство теоремы 3.1). Тогда либо $P_1\cap T=N$, либо $P_1\cap T<N$. Если $P_1\cap T=N$, то $N\leq P_1$ и поэтому $G=P_1L$, что приводит к противоречию (см. доказательство теоремы 3.1). Значит, $P_1\cap T<N$. Так как $P_1\cap T$ – квазинормальная подгруппа в G, то $(P_1\cap T)L=L(P_1\cap T)$ и поэтому $L(P_1\cap T)\leq G$. Но L – максимальная подгруппа в G, следовательно, $L(P_1\cap T) = G$. Тогда

$$N=N\cap L(P_1\cap T)=P_1\cap T.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Лемма 9. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и G_p – силовская p-подгруппа в G. Если подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4 являются c-квазинормальными в G, то G – p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть все подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4, если $p = 2$, являются квазинормальными в G. Так как G не является p-нильпотентной группой, то согласно [7, глава IV, теорема 5.4] G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. Ввиду условия теоремы H имеет экспоненту p или экспоненту 4, если $p = 2$. Значит, согласно лемме 6 имеет место $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что не возможно, поскольку p – наименьший простой делитель порядка группы G.

Значит, существует подгруппа L в G_p простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, не являющаяся квазинормальной в G. Тогда по лемме 2(5) существует максимальная нормальная подгруппа M в G такая, что $G = LM$ и $|G:M| = p$. Так как M является нормальной подгруппой в G, то $M_p=G_p\cap M$ – силовская p-подгруппа в M. По лемме 2(2) каждая подгруппа простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из M_p c-квазинормальна в M. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой M и $|M|<|G|$. Поэтому M – p-нильпотентная группа. Тогда $M = [M_{p'}]M_p$. Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в M, которая нормальна в G и, очевидно, $M_{p'}=G_{p'}$ – холловская p'-подгруппа в G, то G – p-нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 10. *Пусть p – простое число, и H – нормальная подгруппа группы G такая, что* $G/H \in \mathcal{A}_p$. Если подгруппы из H простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, c-квазинормальны в G, то $G \in \mathcal{A}_p$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример, для которого $|G|\,|H|$ минимально.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе X группы H (относительно X).*

Действительно, $X/X \in \mathcal{A}_p$ и по лемме 2(2) подгруппы из X простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, c-квазинормальны в X. Итак, условие теоремы выполняется для группы X (относительно X).

(2) *Условие теоремы выполняется для каждой факторгруппы G/X (относительно H/X), где X – нормальная холлова подгруппа группы H.*

Действительно, $(G/H)/(H/X) \cong G/H \in \mathcal{A}_p$ и ввиду леммы 2(3) условие теоремы выполняется для G/X (относительно H/X).

(3) *Если X – неединичная нормальная холлова подгруппа группы H, то* $X=H$.

Так как X – характеристическая подгруппа группы H, то она нормальна в G и поэтому ввиду (2), условие теоремы справедливо для G/X (относительно H/X). Значит, по выбору группы G и ее подгруппы H имеет место $G/X \in \mathcal{A}_p$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G (относительно X) и поэтому $X=H$.

(4) *Всякая подгруппа K простого порядка или порядка 4, если p = 2, из группы H квазинормальна в G.*

Пусть K – подгруппа простого порядка или порядка 4. Согласно условию теоремы, K c-квазинормальна в G. Допустим, что K не является квазинормальной в G подгруппой. Тогда ввиду леммы 2(5) G содержит такую нормальную подгруппу M, что $G = KM$ и $|G:M| = p$. Поскольку класс $\mathcal{A}_p$ является насыщенной формацией и замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/H \cap M \in \mathcal{A}_p$. Значит, по лемме 2(2) условие теоремы выполняется для G относительно подгруппы $H \cap M$. Но поскольку M является собственной подгруппой группы G и $G=KM$, то $|H \cap M|<|N|$ и поэтому $|G||H \cap M|<|G||H|$, что противоречит выбору группы G и ее нормальной подгруппы H. Следовательно, всякая подгруппа K простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из группы H квазинормальна в G.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую p-подгруппу H_p группы H, где p – наименьший простой делитель порядка группы H.

(5) $H=H_p$.

Согласно лемме 9, подгруппа H p-нильпотентна. Значит, H имеет нормальную холлову p'-подгруппу E. Согласно (3), имеет место $E = H$. Следовательно, p не делит порядок группы H. Полученное противоречие доказывает утверждение (5).

Заключительное противоречие

Пусть $L = G^{\mathsf{A}_p}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Понятно, что $L \leq H$ и поэтому условие теоремы верно для G относительно L, что в силу выбора группы G и подгруппы H влечет $L = H$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая подгруппу H. Тогда $G/H \cong M/M \cap H \in \mathsf{A}_p$ и поэтому, согласно лемме 6, имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.5, $G/\Phi \in \mathsf{A}_p$. Но тогда $L \leq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter : Berlin – New York, 1992.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O.Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
5. Schmid, P. Subgroups permutable witn all Sylow subgroups // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.
6. Robinson, D.J.S. A courser in the theory of group / D.J.S. Robinson. – New York and oth. : Springer-Verlag, 1982. – 484 p.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967. – 793 p.

Н. В. Гуцко

ПРИЗНАКИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ГРУПП НАСЫЩЕННОЙ ФОРМАЦИИ ПО СВОЙСТВАМ ИХ *Q*-ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУПП

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [1], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее Сринивазан доказал [2], что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имеется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов (см. в частности, [3–7]). В настоящей работе изучается строение конечных групп в данном направлении на основе вводимого ниже понятия Q-вложенной подгруппы.

В работе [8] Оре рассмотрел два обобщения нормальности, оба из которых вызывают неослабевающий интерес у исследователей и в наши дни. В работе [8] были впервые введены в математическую практику квазинормальные (или перестановочные, согласно [9]) подгруппы. Оказалось, что квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств [8–15] и что фактически они мало отличаются от нормальных подгрупп. Отметим, в частности, что согласно [14], для любой квазинормальной подгруппы H имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, а согласно [16, глава 2, теорема 2.1.3], квазинормальные подгруппы – это в точности те субнормальные подгруппы группы G, которые являются модулярными элементами в решетке всех подгрупп группы G.

Подгруппы, перестановочные с силовскими подгруппами, впервые изучались в работе С.А. Чунихина [17] (см. также монографию [18]). Позднее подгруппы такого типа были названы в работе Кегеля [19] π-квазинормальными.

Отметим следующее свойство s-перестановочных подгруппы, которое существенно отличает их от перестановочных подгрупп: *s-перестановочные подгруппы конечной группы G образуют подрешетку решетки $L(G)$ всех подгрупп из группы G.* Понятно, что если подгруппа H группы G нормальна в G, то в G всегда найдется такая подгруппа T, что выполнено следующее условие:

$G=HT$ и обе подгруппы T и $T\cap H$ нормальны в G. (*)

Таким образом, условие (*) является еще одним обобщением нормальности. Такая идея была впервые рассмотрена в работе [8], где, в частности, было доказано, что: *группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы удовлетворяют условию* (*) (в связи с этим см. также работу Бэра [20]). В дальнейшем, в работе [21] подгруппы, удовлетворяющие условию (*) были названы c-нормальными. В этой же работе была построена теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп.

Таким образом, проанализировав условия s-перестановочнсти и c-нормальности для подгрупп, мы, следуя идее Оре, введем следующее понятие.

Определение 2 [22, 23]. *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда мы говорим, что H Q-вложенная в G подгруппа, если существует такая перестановочная подгруппа T группы G, что $HT=G$ и $T\cap H\leq H_{sG}$.*

Рассмотрим следующие примеры, показывающие, что условие Q-вложенности обобщает условия s-перестановочности и c-нормальности.

Пример 3. *Пусть H – s-перестановочная подгруппа группы G. Тогда $H_{sG}=H$ и мы имеем $G=HG$ и $G\cap H=H\leq H_{sG}$.*

Пример 4. *Если H – с-нормальная подгруппа в G и T такая нормальна в G подгруппа, что $G=TH$ и $T\cap H\leq H_G$, то $H_G\leq H_{sG}$ и H является Q-вложенной подгруппой группы G.*

Следующий простой пример показывает, что в общем случае множество Q-вложенных подгрупп шире множества всех s-перестановочных подгрупп и множества всех c-нормальных подгрупп.

Пример 5. *Пусть $P=M_m(2)=< x,\ y|\ x^{2^{m-1}}=y^2=1,\ x^y=x^{1+2^{m-2}} >$, где $m > 3$. И пусть $A=<x>$, $B=<y>$. Тогда $P=[A]B$ и $|B|=2$. Ввиду* [24, с. 191], *$Z(P)$ – циклическая группа порядка 2^{m-2}. Ясно, что B – нормальная подгруппа в $Z(P)B$. Пусть Z_3 – группа простого порядка 3 и $G=Z_3\cong P=[K]P$, где K – база регулярного сплетения G. Тогда подгруппа A является Q-вложенной в G, но не s-перестановочной и не c-нормальной в группе G.*

Приведем основные свойства Q-вложенных подгрупп, а также необходимые результаты, которые используются в работе неоднократно.

Лемма 6 [25, с. 35]. *Класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией.*

Лемма 7. *Пусть G – группа и $A\leq G$. Тогда*

(*1*) *Если A субнормальна в G и A – π-подгруппа группы G, то $A\leq O_{\pi}(G)$* [26].

(*2*) *Если A s-перестановочна в G, то A субнормальна в G* [19].

(*3*) Предположим, что A – нормальная подгруппа в G. Тогда K/A субнормальна в G/A тогда и только тогда, когда K субнормальна в G [9, A, Lemma 14.1].

(*4*) *Если A и B являются подгруппами группы G, то $<A,\ B>$ – субнормальная подгруппа в G* [9, A, Lemma 14.4].

(*5*) *Пусть G – группа и $H\leq G$. Тогда если H перестановочна в G, то H субнормальна в G* [8].

Лемма 8 [15]. *Пусть H – p-группа для некоторого простого p. Тогда H – s-перестановочная подгруппа в G тогда и только тогда, когда $O^p(G)\leq N_G(H)$.*

Лемма 9 [27]. *Пусть G – группа с нормальной подгруппой N такой, что $G = QN$, для некоторой подгруппы Q в G. Если M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N\leq M$, то $M\cap Q$ – максимальная подгруппа в Q.*

Лемма 10 [22]. *Пусть G – группа и $H\leq K\leq G$. Тогда*

(*1*) *Предположим, что H нормальная в G. Тогда K/H Q-вложена в G/H тогда и только тогда, когда K Q-вложена в G.*

(2) *Если H Q-вложена в G, то H Q-вложена в K.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда подгруппа* HE/H *Q-вложена в G/H для каждой Q-вложенной в G подгруппы E такой, что* $(|H|,\ |E|)=1$.

(4) *Если H является s-перестановочной подгруппой в G, то H Q-вложена в G.*

(5) *Пусть H – p-подгруппа, для некоторого простого p. Предположим, что H Q-вложена, но не s-перестановочна в G. Тогда в G имеется такая нормальная подгруппа M, что* $|G:M|=p$ *и* $G=HM$.

Доказательство.

(1) ***Необходимость.*** Предположим, прежде всего, что K/H является Q-вложенной подгруппой в G/H и пусть T/H – перестановочная подгруппа в G/H такая, что

$$(K/H)(T/H)=G/H \text{ и } (T/H)\cap(K/H)\leq(K/H)_{s(G/H)}.$$

По лемме 7(2), T/H субнормальна в G/H. А по лемме 7(3), подгруппа T субнормальна в G. С другой стороны, мы имеем $KT=G$ и $T\cap K\leq K_{sG}$ [28]. Следовательно, K Q-вложена в G.

Достаточность. Теперь предположим, что для некоторой перестановочной подгруппы T из G мы имеем $KT=G$ и $T\cap K\leq K_{sG}$. Тогда по лемме 7(4), HT является субнормальной подгруппой в G, поэтому по лемме 7(3), HT/H субнормальна в G/H. С другой стороны, $(HT/H)(K/H)=G/H$ и

$$(HT/H)\cap(K/H)=(HT\cap K)/H=$$
$$=H(T\cap K)/H\leq HK_{sG}/H=K_{sG}/H=(K/H)_{s(G/H)}.$$

Таким образом, K/H Q-вложена в G/H.

(2) Пусть T – перестановочная подгруппа в G такая, что $HT=G$ и $T\cap H\leq H_{sG}$. Тогда $K=K\cap HT=H(K\cap T)$ и $K\cap T$ перестановочна в K. Тогда мы видим, что $(K\cap T)\cap H\leq H_{sG}\leq H_{sK}$ [28]. Следовательно, подгруппа H Q-вложена в K.

(3) Предположим, что E Q-вложена в G и пусть T – перестановочная подгруппа в G такая, что $ET=G$ и $T\cap E\leq E_{sG}$. Очевидно, $H\leq T$, значит $T\cap HE=H(T\cap E)\leq H(E_{sG})\leq(HE)_{sG}$. Следовательно, HE Q-вложена в G. Согласно (2), HE/H Q-вложена в G/H.

(4) Пусть H – s-перестановочная подгруппа группы G. Тогда $H_{sG}=H$ и мы имеем $G=HG$ и $G\cap H=H\leq H_{sG}$. Итак, подгруппа H Q-вложена в G.

(5) Согласно условию, в группе G имеется подгруппа T такая, что $HT=G$ и $T\cap H\leq H_{sG}$. По лемме 7(5) подгруппа T субнормальна в G и поэтому $T\leq K$, где K – некоторая собственная нормальная подгруппа группы G. Значит, G/K – p-группа и поэтому в G имеется нормальная максимальная подгруппа M такая, что $HM=G$. Лемма доказана.

На основе введенного понятия Q-вложенной подгруппы нами изучено влияние Q-вложенности некоторых силовских и максимальных подгрупп на строение группы. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 11. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и G_p – силовская p-подгруппа в G. Если подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4 являются Q-вложенными в G, то G – p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть все подгруппы из G_p с порядком p или порядком 4, если $p = 2$, являются s-перестановочными в G. Так как G не является p-нильпотентной группой, то согласно [24, глава IV, теорема 5.4] G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H=[H_p]H_q$. Ввиду условия теоремы, H имеет экспоненту p или экспоненту 4, если $p = 2$. Значит, согласно [28, лемма 2.12] имеет место $|H_p/\Phi(H_p)|=p$, что невозможно, поскольку p – наименьший простой делитель порядка группы G.

Значит, существует подгруппа L в G_p простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, не являющаяся s-перестановочной в G. Тогда по лемме 10(5), существует максимальная нормальная подгруппа M в G такая, что $G = LM$ и $|G:M|=p$. Так как M является нормальной подгруппой в G, то $M_p=G_p\cap M$ – силовская p-подгруппа в M. По лемме 10(2) каждая подгруппа простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из M_p Q-вложена в M. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой M и $|M|<|G|$. Поэтому M – p-нильпотентная группа. Тогда $M=[M_{p'}]M_p$. Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в M, которая нормальна в G и, очевидно, $M_{p'}=G_{p'}$ – холловская p'-подгруппа в G, то G – p-нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 12. *Пусть p – простое число, G – p-разрешимая группа и H – нормальная подгруппа группы G такая, что G/H принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп. Если каждая максимальная подгруппа силовской подгруппы из H Q-вложена в G, то G принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то G/N принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп.*

Действительно, $(G/N)/(H/N)\cong G/H\in \mathsf{A}_p$. Пусть H^*/N – силовская p-подгруппа в H/N и M/N – произвольная максимальная в H^*/N

подгруппа. Покажем, что подгруппа M/N Q-вложена в G/N. Если H_p – силовская p-подгруппа в H^*, то $H^*=H_pN$ и H_p является силовской p-подгруппой в G. Тогда

$$M=M\cap H^*=M\cap H_pN=N(M\cap H_p).$$

И, ввиду леммы 11, $M\cap H_p$ – максимальная подгруппа из H_p. Согласно условию теоремы, $M\cap H_p$ Q-вложена в G. По лемме 10(1), подгруппа $M\cap H_pN/N$ Q-вложена в G/N. Но $M\cap H_pN/N=M/N$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа M/N из H^*/N Q-вложена в G/N.

Итак, G/N удовлетворяет условию нашей теоремы. В силу минимальности G, мы видим, то G/N принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп.

(2) *N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H, и N – p-группа.*

Так как $\mathcal{A}_p$ – класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, согласно лемме 6, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H, и $\Phi(N)=1$. Так как G – p-разрешимая группа, то либо N – p-группа, либо N является p'-группой. Если N – p'-группа, то G принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп, что противоречит выбору группы G. Следовательно, N – p-группа.

Заключительное противоречие.

Если N содержится во всех максимальных подгруппах из G, то $N\le\Phi(G)$. Поскольку $\mathcal{U}_p$ является насыщенной формацией, по лемме 6, то $G\in\mathcal{A}_p$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, существует максимальная подгруппа M из G такая, что $G=NM$ и $N\cap M=1$. Таким образом,

$$H_p=H_p\cap NM=N(H_p\cap M),$$

где H_p – силовская p-подгруппа из H.

Пусть K – произвольная максимальная подгруппа из H_p, содержащаяся в $H_p\cap M$. По условию теоремы, подгруппа K Q-вложена в G. Значит, существует перестановочная подгруппа T в G такая, что $G=KT$ и $K\cap T\le K_{sG}$.

Заметим, что $K\cap T=1$. Действительно, пусть $K\cap T\ne1$. Так как $K\cap T$ – s-перестановочная p-подгруппа в G, то, по лемме 7(2), видим, что $K\cap T$ – субнормальная в G подгруппа. По лемме 6(1), имеем $K\cap T\le O_p(G)$.

Покажем, что $N=O_p(G)$. Действительно,

$$O_p(G)=O_p(G)\cap NL=N(O_p(G)\cap L).$$

Поскольку $O_p(G)\le F(G)\le C_G(N)$, то $O_p(G)\cap L$ нормальна в G и поэтому $O_p(G)\cap L=1$. Значит, $N=O_p(G)$.

Таким образом $T \cap K \leq N \cap K$. Допустим, что $N \leq T$. Тогда $T \cap K \leq N \cap K \leq T \cap K$ и поэтому $T \cap K = N \cap K$. Ясно, что $N \cap K$ – нормальная в P подгруппа и поэтому, согласно лемме 8, $T \cap K$ – неединичная нормальная в G подгруппа. Значит, $N \leq T \cap K \leq K$, противоречие. Следовательно, $N \not\subset T$ и $N = T$. Так как T субнормальна в G, то все силовские q-подгруппы группы G содержатся в T. Значит, G/T_{G} – p-группа. Следовательно, $G \cong G/N \cap T_{\mathrm{G}}$ – q-замкнутая группа. Таким образом, G является p-нильпотентной группой и, по лемме 6, группа G принадлежит классу всех p-сверхразрешимых групп, что противоречит выбору группы G. Значит, $T \cap K = 1$. Так как

$$H_{\mathrm{p}} = H_{\mathrm{p}} \cap KT = K(H_{\mathrm{p}} \cap T) \text{ и } K \leq H_{\mathrm{p}} = N(H_{\mathrm{p}} \cap L),$$

то

$$|H_{\mathrm{p}} \cap T| = |H_{\mathrm{p}} : K| = p = |N : N \cap K|.$$

Поскольку $G/T \cong K \in \mathsf{A}_p$ и $G/N \in \mathsf{A}_p$, то $G/(T \cap N) \in \mathsf{A}_p$. Значит, $N \leq T$, так как G не принадлежит A_p классу p-сверхразрешимых групп и N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно, $N \cap K \leq T \cap K = 1$. Значит, $p = |N{:}N \cap K| = |N|$. Следовательно, $G \in \mathsf{A}_p$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть $\mathfrak{I} = N\mathsf{A}$ – класс групп G, чьи коммутанты подгрупп нильпотентны, и где N – класс нильпотентных подгрупп и A – класс абелевых групп. Понятно, что $\mathfrak{I}$ является формацией. Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{I}$, то $(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G)$ является нильпотентным и, более того, подгруппа $G'\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда $G' \leq G'\Phi(G)$, что влечет нильпотентность G'. Таким образом, $\mathfrak{I}$ является насыщенной формацией и содержит класс A всех сверхразрешимых групп, поскольку коммутанты подгрупп сверхразрешимой группы нильпотентны. Итак, по теореме 12, мы имеем:

Следствие 13. Пусть $\mathfrak{I} = N\mathsf{A}$. Если H – нормальная подгруппа в G такая, что $G/H \in \mathrm{F}$ и максимальные подгруппы силовских подгрупп из H Q-вложены в G, то $G \in \mathfrak{I}$.

Следствие 14. (Wang). Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из G c-нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 15. Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G являются Q-вложенными в G, то G – сверхразрешимая группа.

Литература

1. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – XII. – P. 161–169.

2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S.Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 210–214.

3. Wang, Y. c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.

4. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193–2200.

5. Wei, H.On c-Normal Maximal and Minimal Subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, W. Yanming, Li Yangming // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807–4816.

6. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2002. – Vol. 80. – P. 113–118.

7. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X.Guo // Arch. Math. – 1999. – № 72. – P. 161–166.

8. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter : Berlin – New York, 1992. – 889 p.

10. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168–170.

11. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

12. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups / J.G. Thompson // Math. Z. – 1967. – Vol. 96, № 2. – P. 226–227.

13. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1–16.

14. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Z. Math. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.

15. Schmid, P. Subgroups permutable witn all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.

16. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups. Vol. 14 : De Gruyter Expositions in Mathematics / R. Schmidt // Walter de Gruyter–Berlin–New York, 1994.

17. Чунихин, С.А. Об условиях теорем типа Силова / С.А. Чунихин // ДАН СССР. – 1949. – Т. 69, № 6. – С. 735–737.

18. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

19. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

20. Baer, R. Classes of finite groups and their propeties / R. Baer // Illinois Math. Journal. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

21. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.

22. Hutsko, N.V. Finite groups with given nearly S -quasinormal subgroups / N.V. Hutsko, V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Asian-European journal of math. – 2008. – Vol. 1, № 3. – P. 369–382.

23. Hutsko, N.V. On well p-embedded subgroups of finite groups / N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2008. – № 2. – P. 50–64.

24. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York–Evanston–London: Harper and Row, 1968. – 527 p.

25. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

26. Wielandt H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt; Lectures given at the Ohio State University, Columbus : Ohio, 1971.

27. Ramadan, M. On c-normality of certain subgroups of prime power oder of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.

28. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

С. Н. Дегтяр

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Традиционно слово **«технология»** трактовалось как набор и последовательность операций, выполняемых с помощью техники в каждом данном определенном производственном процессе [1, с. 456]. **Информационные технологии** (ИТ) – это комплекс взаимосвязанных научных, технологических, инженерных дисциплин, изучающих методы эффективной организации труда людей, занятых обработкой и хранением информации, вычислительная техника и методы организации и взаимодействия с людьми и производственным оборудованием, их практические приложения, а также связанные со всем этим социальные, экономические и культурные проблемы.

ИТ, развиваемые в настоящее время, называют **новыми информационными технологиями** (НИТ), то есть технологиями, связанными с дальнейшим развитием как компьютеров, так и систем, построенных с их использованием. НИТ основываются на развитии и внедрении компьютерных сетей, систем мультимедиа и виртуальной реальности. Наиболее широко используются НИТ в медицине, управлении, образовании, финансах и системах электронных средств массовой информации. Составной частью ИТ являются компьютерные технологии, которые обеспечивают сбор, обработку, хранение и передачу информации с помощью электронных вычислительных машин.

Когда речь идет об **ИТ в образовательной сфере**, то используется следующее определение понятия: ИТ – это аппаратно-программные средства, электронные средства обучения, базирующиеся на использовании вычислительной техники, которые обеспечивают хранение и обработку образовательной информации, доставку ее обучаемому, интерактивное взаимодействие студента с преподавателем или педагогическим программным средством, а также тестирование знаний студента. Причем, если иметь в виду образовательное пространство, то зачастую речь идет о понятии «образовательная технология», которое рассматривается как «законосообразная педагогическая деятельность, реализующая научно-обоснованный проект дидактического процесса и обладающая более высокой степенью эффективности, надежности и гарантированности результата за данное время» [2, с. 14].

Образовательные средства ИТ можно классифицировать по ряду параметров:

По решаемым педагогическим задачам:

- средства, обеспечивающие базовую подготовку (электронные учебники, обучающие системы, системы контроля знаний);
- средства практической подготовки (задачники, практикумы, виртуальные конструкторы, программы имитационного моделирования, тренажеры);
- вспомогательные средства (энциклопедии, словари, хрестоматии, развивающие компьютерные игры, мультимедийные учебные занятия);
- комплексные средства (дистанционные учебные курсы).

По функциям в организации образовательного процесса:

- информационно-обучающие (электронные библиотеки, электронные книги, электронные периодические издания, словари, справочники, обучающие компьютерные программы, информационные системы);
- интерактивные (электронная почта, электронные телеконференции);
- поисковые (реализуются через каталоги, поисковые системы).

По типу информации: электронные и информационные ресурсы:

- с текстовой информацией (учебники, учебные пособия, задачники, тесты, словари, справочники, энциклопедии, периодические издания, числовые данные, программно- и учебно-методические материалы);
- с визуальной информацией (коллекции: фотографии, портреты, иллюстрации, видеофрагменты процессов и явлений, демонстрации опытов, видеоэкскурсии; статистические и динамические модели, интерактивные модели: предметные лабораторные практикумы, предметные виртуальные лаборатории; символьные объекты: схемы, диаграммы);
- с аудиоинформацией (звукозаписи выступлений, музыкальных произведений, звуков живой и неживой природы, синхронизированные аудиообъекты);
- с аудио- и видеоинформацией (аудио- видеообъекты живой и неживой природы, предметные экскурсии);
- с комбинированной информацией (учебники, учебные пособия, первоисточники, хрестоматии, задачники, энциклопедии, словари, периодические издания).

Современное состояние системы образования характеризуется ростом объема знаний, усложнением и расширением учебного материала.

Поэтому для достижения желаемого результата в обучении необходимо внедрять в учебный процесс современные педагогические технологии, прежде всего информационные.

Формы и место использования информационных технологий на занятии зависят от содержания дисциплины, цели, которую ставит преподаватель.

Сегодня мы успешно используем готовые диски с уроками, собственные презентации, применяем электронные учебно-методические материалы и лабораторные практикумы (пособия), активно используем сеть Интернет, которая позволяет создавать и использовать в процессе обучения все преимущества интерактивных электронных учебных курсов, учебников, пособий, проводим автоматизированный контроль знаний. Все перечисленное делает занятия яркими и запоминающимися.

Рассмотрим **формы использования ИКТ**. Это мультимедийные технологии (компьютерные презентации, видео- и аудиофрагменты), работа с интерактивной доской, использование сети Интернет, готовые программные продукты: учебные диски, лаборатории, электронные библиотеки, виртуальные экскурсии и др.

Мультимедийные технологии – это способ подготовки электронных документов, включающих визуальные и аудиоэффекты, мультипрограммирование различных ситуаций.

Применяя мультимедийные технологии, педагоги получают уникальную возможность наглядно сопровождать свой лекционный материал или использовать видео- и аудиопрезентацию в качестве дополнения. Несомненно, эффективность усвоения учебного материала обучаемыми увеличивается, если учитывать их особенности воспринимать и обрабатывать материал. Мультимедиа позволяет адаптировать лекционный материал под любой тип восприятия. Известно, что человек большую часть информации воспринимает органами зрения (80%) и органами слуха (15%). Мультимедиа технологии позволяют воздействовать одновременно на эти важнейшие органы чувств человека. Сопровождая динамический визуальный ряд (слайд-шоу, анимацию, видео) звуком, мы можем рассчитывать на большее внимание со стороны ученика.

Прежде всего, необходимо максимально использовать программы PowerPoint и Movie Maker, которые относятся к стандартным, и есть у каждого на домашнем компьютере. Программа PowerPoint, состоящая из последовательно предъявляемых слайдов, позволяет не только демонстрировать таблицы и графические изображения, но предоставляет возможность делать видеовставки и добавлять музыкальное сопровождение.

Видео- и аудиоматериал можно брать со специальных интернет-порталов, которые содержат разного вида информацию на любую тему. Другая стандартная программа Movie Maker позволяет создать видеопрезентацию в виде клипа в специальном видеоформате, который распознается любым современным DVD-плеером. Можно также воспользоваться так называемыми программами-конвертерами, которые изменяют формат презентации PowerPoint (.ppt), переводя его в видеоформат .avi, воспроизводимый большинством видеоплееров. Эти конвертеры находятся в свободном доступе. Перевод презентации с лекционным материалом из формата **.ppt** в формат **.avi** часто решает проблему недостатка мультимедийных аудиторий. Практически во всех учебных заведениях есть телевизоры и недорогие DVD-плееры, поэтому презентация, переведенная в вид видеоклипа или короткого фильма, позволяет обойтись имеющимися на данный момент техническими средствами. Обладая элементарной компьютерной грамотностью, можно создавать оригинальные учебные материалы, которые увлекают, мотивируют и нацеливают учащихся на успешные результаты. При использовании компьютерных презентаций желательно строить их только на тех фактах, которые могут заинтересовать всю аудиторию целиком, или на тех, без которых нельзя обойтись при объяснении (пусть и не интересных). С помощью презентации можно удобно, быстро, технологично и качественно подготовить наглядный материал к конкретному занятию, без усилий создать анимированный слайд, осуществить контроль знаний, обобщить основные этапы занятия. С помощью презентации можно быстро применить разнообразные формы обучения (фронтальные (при наличии мультимедийного проектора), групповые, индивидуальные), оказывающие огромное воздействие на эмоциональное восприятие обучаемых, способствующие более глубокому усвоению учебного материала.

Преимущества технологий мультимедиа заключаются в следующем:

- сочетании разнообразной текстовой аудио- и видеонаглядности;
- возможности использовать отдельные слайды в качестве раздаточного материала (опоры, таблицы, диаграммы, графики, схемы);
- активизации внимания всей аудитории;
- обеспечении эффективности восприятия и запоминания нового учебного материала;
- осуществлении контроля за усвоением новых знаний и систематизации изученного материала;
- сочетании аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы обучаемых;
- экономии учебного времени;
- формировании компьютерной мультимедийной компетентности как преподавателя, так и обучаемого, развитии их креативных способностей в организации учебной работы.

Практика применения интерактивной доски позволяет выделить следующие направления ее использования в учебном процессе:

1. ***Презентации, демонстрации и создание моделей***. Использование необходимого программного обеспечения и ресурсов в сочетании с интерактивной доской может улучшить понимание новых идей, так как интерактивная доска помогает учителям излагать новый материал очень живо и увлекательно. Она позволяет представить информацию с помощью различных мультимедийных ресурсов, упростить объяснение схем, помочь разобраться в сложной проблеме, изучить ее максимально подробно. На доске можно легко изменять информацию или передвигать объекты, создавая новые связи. Преподаватель может рассуждать вслух, комментируя свои действия, постепенно вовлекая обучаемых и побуждая их записывать идеи на доске, что обеспечивает взаимодействие учащихся с новым материалом.

Практически к каждому занятию преподаватель готовит презентации с помощью программы PowerPoint или NoteBook и использует их на разных этапах занятия. Использование программы NoteBook расширяет возможности подготовки презентаций, предоставляет достаточно большой многопрофильный иллюстрированный анимационный и звуковой материал, который можно использовать.

2. ***Активное вовлечение обучаемых***. Интерактивные доски, используя разнообразные динамичные ресурсы и улучшая мотивацию, делают занятия увлекательными и для преподавателей, и для учащихся. Работа с интерактивной доской может помочь преподавателю проверить знания учащихся, развить дискуссию для конкретизации изучаемого материала, что позволяет обучаемым лучше его понять. Управляя обсуждением, преподаватель может подтолкнуть обучаемых к работе в небольших группах. Интерактивная доска становится центром внимания для всей аудитории.

3. ***Улучшение темпа и течения занятия.*** Использование интерактивной доски может улучшить планирование, темп и течение занятия. Файлы или страницы можно подготовить заранее и привязать их к другим ресурсам, которые будут доступны на занятии. На интерактивной доске можно легко передвигать объекты и надписи, добавлять комментарии к текстам, рисункам и диаграммам, выделять ключевые области и добавлять цвета. К тому же тексты, рисунки или графики можно скрыть, а затем показать в ключевые моменты занятия. Заранее подготовленные тексты, таблицы, диаграммы, картинки, музыка, карты, тематические CD-ROMы, а также добавление гиперссылок к мультимедийным файлам и Интернет-ресурсам зададут занятию более интенсивный темп. Все материалы можно комментировать прямо на экране, используя инструмент Перо, и сохранять записи для будущих

занятий. Страницы можно разместить сбоку экрана в качестве эскизов. Преподаватель всегда имеет возможность вернуться к предыдущему этапу занятия и повторить его ключевые моменты. Файлы предыдущих занятий можно всегда открыть для повторения пройденного материала. Доску удобно использовать при проведении фронтальных самостоятельных работ, даже имея один вариант заданий. Подобные методики привлекают к активному участию в занятиях. Но важно понимать, что эффективность работы с доской во многом зависит от самого преподавателя, от того, как он применяет те или иные ее возможности.

Для реализации рассмотренных направлений в использовании интерактивных досок в программном обеспечении есть все необходимые ресурсы.

1. ***Разнообразие цветов***, доступных на интерактивной доске, позволяет выделять ключевые области, добавлять комментарии. Цвет рекомендуется использовать для акцентирования внимания учащихся на чем-то важном, обозначения связи между элементами схем, рисунков, формул, построения нескольких графиков в одной плоскости.

Например, учащимся могут быть предложены задания, при выполнении которых используются разные цвета маркеров: установить связь, используя различные цвета маркеров, выделить одним цветом название формулы и ее математическую запись, построить сечение какой-либо фигуры и т. д.

2. Удобна возможность делать ***письменные комментарии*** поверх изображения на экране. Заметки на экране могут применяться для того, чтобы сформулировать на экране какой-либо вопрос, проблему, причем рукописные записи на экране можно сохранять для дальнейшего просмотра, анализа, печати. Используя письменные комментарии поверх изображения, можно организовать самопроверку в форме тестирования, заранее подготовив презентацию с вопросами теста.

3. ***Аудио- и видеовложения*** значительно усиливают подачу материала: можно захватывать видеоизображения и отображать их статично, чтобы иметь возможность обсуждать и добавлять к ним записи.

4. ***Перемещение объектов*** дает возможность учащимся составлять логические цепочки, схемы, размещать информацию в сравнительных и обобщающих таблицах, диаграммах и многое другое. Это позволяет обучаемым группировать объекты по определенному признаку, определять сходства и различия, достоинства и недостатки. Например, учащиеся могут распределить высказывания в два столбика: простые и составные или истинные и ложные.

5. ***Функция затемнения нижней части экрана*** удобна в тех случаях, когда преподаватель планирует воспроизводить информацию на слайде поэтапно. Например, сначала дается условие задачи, а затем – ее решение. Тексты, рисунки или графики можно скрыть, а затем показать

их в ключевые моменты занятия. Эту функцию удобно использовать при проверке усвоения изученного материала, при обобщении и систематизации. Дополнительно инструмент «Прожектор» позволяет сфокусировать внимание на определенных участках экрана.

6**. *Выделение отдельных элементов*** на изображении целесообразно применять для акцентирования внимания обучаемых на нужной области. Этот прием уместен, если на слайде помещена объемная информация. При повторении формул с помощью трафарета есть возможность направить внимание обучаемых на ту или иную формулу, затемняя остальное поле слайда.

7. ***Вставка (вырезка) частей изображения*** наряду с отменой и повтором действия позволяют преподавателю создавать на занятии ситуацию успеха. Обучаемый знает, что всегда может исправить свои ошибки, и это придает ему уверенность в своих силах.

Можно выделить следующие основные преимущества работы с интерактивной доской:

- совместима с программами для всех лет обучения;
- усиливает подачу материала, позволяя преподавателям эффективно работать с веб-сайтами и другими ресурсами;
- предоставляет больше возможностей для взаимодействия и обсуждения в аудитории;
- делает занятия интересными и увлекательными для преподавателей и учащихся благодаря разнообразному и динамичному использованию ресурсов, развивает мотивацию.

Преимущества внедрения **Интернет-технологий** в процесс обучения в настоящее время не вызывают сомнений. Не подлежит сомнению также позитивное влияние различных форм синхронной и асинхронной Интернет-коммуникации (электронной почты, чата, форумов, веб-конференций) на формирование коммуникативной компетенции обучающихся.

Ресурсы сети являются бесценной базой для создания информационно-предметной среды, образования и самообразования людей, удовлетворения их личных и профессиональных интересов и потребностей. Однако само по себе наличие доступа к Интернет-ресурсам не является гарантом качественного образования.

Информационные ресурсы сети Интернет содержат текстовый, аудио- и визуальный материал по различной тематике на разных языках. **Учебные Интернет-ресурсы** создаются исключительно для учебных целей. Они должны быть направлены на комплексное формирование и развитие:

- коммуникативно-когнитивных умений осуществлять поиск и отбор, производить обобщение, классификацию, анализ и синтез полученной информации;

- коммуникативных умений представлять и обсуждать результаты работы с ресурсами сети Интернет;
- умений использовать ресурсы Интернета для самообразования;
- умений использовать ресурсы сети для удовлетворения своих информационных и образовательных интересов и потребностей.

Все виды деятельности обучаемых, являющихся пользователями Интернета, можно условно разделить на три группы:

1) поиск информации – работа с браузерами, базами данных, справочными системами и т. п.;

2) общение – электронная почта, чаты, списки рассылки, on-line-форумы, видеоконференции, ICQ и т. д.;

3) публикация в сети – создание веб-страниц, сайтов.

Одной из новых форм применения информационных технологий в учебном процессе являются **виртуальные, интерактивные экскурсии**.

Термин «виртуальный» происходит от английского слова virtual – «похожий, неотличимый». Первые виртуальные музеи стали появляться в Интернете в 1991 году. Они представляли собой небольшие сайты с информацией о самом музее, о его географическом положении и режиме работы. В дальнейшем на страницах виртуальных музеев стали появляться виртуальные экспозиции. Многие музеи создавали несколько виртуальных экспозиций и объединяли их в виртуальные экскурсии. В настоящее время количество и глубина изложенного материала, доступного через сеть Интернет, непрерывно растет.

На сегодняшний день существует достаточно большое количество виртуальных музеев, на сайтах которых представлена достаточно интересная информация. Так, например, музеи вычислительной техники:

– ***Европейский музей компьютерной науки и техники*** (http://www.icfcst.kiev.ua/MUSEUM/museum-map_r.html). В виртуальных залах музея представлено десять разделов. Одни из них посвящены первым вычислительным машинам, началу эпохи появления микроэлектроники и информатики. На других можно почерпнуть массу интересной информации, касающейся ЭВМ, например, устанавливаемых на подводных лодках и кораблях, а также на ракетах. Есть раздел об искусственном интеллекте. В фотогалерее собраны уникальные модели ПК, а также анонсируются книги по информационным технологиям. Надо сказать, что, несмотря на довольно простое оформление, на Web-узле приведены в большом объеме факты и сведения, относящиеся к отечественным разработкам, описания машин, рассказы создателей ЭВМ и различные редкие фотографии, в частности первых (1958 г.) электронно-вычислительных комплексов. Сайт выполнен на русском, английском и украинском языках.

– ***Музей истории вычислительной техники*** (http://www.museum.ru/m2744). На сайте представлена карта музея, организованы разделы «Отзывы», «Новости» и «О проекте». Разделы «Первые шаги» и «Герои нашего времени» включают статьи из компьютерных журналов, рассказывающие о появлении и распространении компьютеров, а также приведены краткие биографии и фотографии известных представителей компьютерного мира. Наиболее интересные разделы посвящены отечественной и зарубежной технике, а также различным техническим моментам и описанию информационных технологий. В разделе «От абака до компьютера» собраны сведения о развитии компьютеров и всевозможных вычислительных средств.

– ***Виртуальный музей информатики*** (http://schools.keldysh.ru/sch444/museum/). Наиболее примечательная особенность данного музея – подробная история компьютерной техники. Здесь присутствуют такие традиционные разделы, как «Поколения компьютеров» и «Галерея портретов», где представлены деятели, внесшие свой вклад в дело становления компьютерных технологий. Музей создавался специально для учебного курса «Информатика».

Исключительную роль в активизации деятельности обучаемых во время виртуальных экскурсий играет поисковый метод. Они не просто знакомятся с материалами экспозиций, но и занимаются активным поиском информации. Это достигается путем постановки проблемных вопросов либо получением определенных творческих заданий.

Таким образом, использование ИТ делает процесс обучения и преподавания более интересным, качественным, результативным. Но следует иметь в виду, что ИТ – это лишь средства, которые могут стать хорошим помощником. Использование ИТ требует серьезной длительной подготовки, навыков работы с компьютером и, безусловно, большего времени для подготовки преподавателя к занятию. Но в данном случае потраченные усилия и время обязательно приведут к желаемому результату.

Литература

1. Философский словарь / под ред. И.Т. Фролова. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Политиздат, 1991. – 560 с.
2. Сластенин, В.А. О современных подходах к подготовке учителя / В.А. Сластенин, Н.Г. Руденко // Педагог. – 1996. – № 1. – С. 14.

Л. В. Дорошева

ФИЗИКО-АСТРОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ МЫШЛЕНИЯ

Особую роль в совершенствовании системы вузовского образования занимает проблема подготовки учителя нового типа, учителя-профессионала, способного к творчеству, к быстрому и качественному решению возникающих перед ним педагогических задач [1]. Педагогическому вузу необходимо подготовить студентов к творческой педагогической деятельности, в которой приобретаемые профессиональные навыки будут средством развития личности ученика. Важнейшими компонентами такой подготовки являются развитое творческое воображение и способность к его саморазвитию. Реальность такова, что современному специалисту высокой квалификации приходится работать в сложных, быстро изменяющихся условиях научно-технического прогресса, что требует от него постоянного обновления знаний, высокой общей эрудиции, сочетающейся с глубокими специальными знаниями, навыками проведения научного исследования и творческим отношением к своей профессиональной деятельности. Современные молодые специалисты с высшим образованием должны быть подготовлены к решению новых профессиональных задач, поиску нестандартных творческих решений, и способны к творческому саморазвитию. И если платформой для подготовки нового поколения компетентных специалистов становятся углубленные знания, то трамплином, дающим им преимущество в повседневной трудовой деятельности, является креативность мышления. Поэтому в настоящий момент особую актуальность приобретает необходимость разработки технологии развития креативности студентов педагогического вуза. Креативность трактуется учёными с различных позиций [2]: как способность личности (Е. Торренс, Дж. Гилфорд, Д. В. Чернилевский, Д. Б. Богоявленская, В. Н. Дружинин и др.); черта личности (К. Тейлор, А. Маслоу, К. Роджерс); проявление одаренности (А. М. Матюшкин, Дж. Рензулли, В. М. Шадриков); творческая деятельность (А. В. Хуторской) и т. д. Перечисленные исследователи рассматривали проблему развития креативности различных представителей учебного процесса (учителей, преподавателей, учеников, ребенка и т. д.) в разнообразных педагогических условиях. Однако в литературе мало внимания уделяется проблеме развития креативности студентов как в процессе обучения вообще, так и в процессе изучения физических дисциплин, в частности. В то же время необходимо подчеркнуть, что физика и астрономия как учебные дисциплины имеют огромный потенциал в развитии креативности. Во-первых, это связано с многообразием разделов этих дисциплин, при изучении которых используются различные методы и приёмы, предоставляющие широкие возможности как преподавателю, так и студенту. Во-вторых, при изучении физики и астрономии возможны различные формы организации учебных занятий, которые позволяют развивать креативность [3]. Таким образом, возникает противоречие между необходимостью обучения и воспитания творчески мыслящих педагогов и отсутствием педагогической технологии развития креативности студентов при изучении дисциплин предметной подготовки.

Одним из средств развития креативности мышления при изучении физики и астрономии может служить анализ художественных произведений с астрономической точки зрения. Такое задание для самостоятельной работы студентов не только поможет закрепить изученный материал, но и заставит их по-новому взглянуть на известные и любимые художественные произведения [4]. В качестве примера рассмотрим астрономические задачи по сказочной повести Л. И. Лагина «Старик Хоттабыч» [5]. Приключения старого джинна и его юных друзей Вольки и Жени знакомы всем еще со школьных лет. Главный герой Волька Костыльков был большим любителем астрономии, действительным членом астрономического кружка при Московском планетарии. Вероятно, поэтому в повести можно встретить немало эпизодов, заставляющих задуматься каждого любителя астрономии.

Задача 1. Первым подарком Хоттабыча Вольке были наручные часы. Сначала – из цельного куска золота и без всякого механизма внутри. Они, разумеется, не показывали время. « - А разве там что-то должно быть, внутри? - забеспокоился старый джинн. Вместо ответа Волька молча отстегнул часы и вернул их Хоттабычу.

- Хорошо, - кротко согласился тот. - Я тебе подарю такие часы, которые не должны иметь ничего внутри.

Золотые часики снова оказались на Волькиной руке, но сейчас они стали тоненькими, плоскими. Стекло на них исчезло, а вместо минутной, секундной и часовой стрелок возник небольшой вертикальный золотой шпенечек в середине циферблата с великолепными, чистейшей воды изумрудами, расположенными там, где полагалось быть часовым отметкам.

- Никогда и ни у кого, даже у богатейших султанов вселенной, не было наручных солнечных часов! - снова расхвастался старик. - Были солнечные часы на городских площадях, были на рынках, в садах, во дворцах, и все они сооружались из камня. А вот такие я только что сам придумал. Правда, неплохо!

Действительно, оказаться первым и единственным во всем мире обладателем наручных солнечных часов было довольно заманчиво».

Итак, можно ли сделать наручные солнечные часы? Если да, то почему же таких часов не было даже у султанов?

Задача 2. « - Благословенный Волька, - сказал после завтрака Хоттабыч, блаженно греясь на солнышке, - все время я делаю тебе подарки, по моему разумению - ценные, и каждый раз они тебе оказываются не по сердцу. Может быть, сделаем так: ты мне сам скажешь, что тебе ... угодно было бы от меня получить в дар, и я почел бы за счастье... немедленно доставить желаемое.

- Подари мне, в таком случае, большой морской бинокль, - ответил Волька не задумываясь».

Почему Волька выбрал себе именно такой подарок?

Задача 3. Волька и Хоттабыч отправились на ковре-самолете выручать Женю из рабства: «Вечерняя темнота окутала город, а здесь, наверху, еще виден был багровый солнечный диск, медленно оседавший за горизонт.

- Интересно... – промолвил Волька задумчиво, – интересно, на какой мы сейчас высоте?

- Локтей шестьсот-семьсот, - отвечал Хоттабыч, продолжая что-то высчитывать на пальцах».

Правильно ли Хоттабыч определил высоту полета, если для наземного наблюдателя Солнце уже зашло, а с ковра-самолета оно было видно почти целиком? Напомним, что локоть составляет около полуметра.

Задача 4. Полет продолжался. «Стемнело. Теперь на ковре-самолете стало особенно неуютно, и Волька предложил Хоттабычу подняться локтей на пятьсот выше.

- Тогда мы снова увидим солнце.

Хоттабыч глубоко сомневался, можно ли до завтрашнего утра увидеть уже закатившееся дневное светило, но спорить с Волькой не стал.

Можете себе представить, как он удивился и насколько вырос в его глазах Волькин авторитет, когда, поднявшись повыше, они действительно снова увидели солнце, которое как ни в чем не бывало снова только-только касалось своим багровым краем черной линии далекого горизонта.

- Если бы, подчиняясь твоей скромности, о Волька, не дал я тебе обещания, ничто не удержало бы меня от того, чтобы назвать тебя величайшей в мире балдой! - восхищенно произнес Хоттабыч...».

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, вы без труда сможете сказать, верно ли Волька рассчитал необходимую высоту и действительно ли он достоин звания «величайшей в мире балды»? Если Солнце только что перестало быть видимым на высоте 600-700 локтей, то можно ли было целиком увидеть солнечный диск, поднявшись еще на 500 локтей? И, кстати, насколько далек был от путешественников горизонт?

Задача 5. Сварливый брат Хоттабыча Омар Юсуф решил слетать на Луну. Волька предупреждал его:

« - Ты должен вылететь с Земли со скоростью не меньше, чем одиннадцать километров в секунду. В противном случае ты, уверяю тебя, никогда не доберешься до Луны.

- С радостью и удовольствием! - Омар Юсуф поджал свои тонкие губы.

- А сколь велик километр? Скажите, ибо я не знаю такой меры длины.

- Ну, как тебе объяснить... - призадумался Волька. - Ну вот: километр - это примерно тысяча четыреста шагов.

- Твоих шагов? - спросил джинн. - Значит моих шагов в километре не больше тысячи двухсот, даже немного меньше.

Омар Юсуф был преувеличенного мнения о своем росте. Он был не выше Вольки».

Догадайтесь, с какой скоростью джинн вылетел с Земли и на какое расстояние от нее он смог удалиться? Если же он вышел на круговую орбиту, то каков был ее радиус?

Задача 6. Старик Хоттабыч, описывая Вольке свой полет в космос, сказал, что сначала он превратился в спутника Земли, чтобы встретиться на орбите со своим братом.

« - А потом, когда я увидел, что мне пора возвращаться на Землю, я ратился лицом в ее сторону и придал своему телу как раз такую скорость, какая требовалась для преодоления силы, которая вращала меня вокруг земного шара».

Описание этого космического маневра можно понять так: Хоттабыч двигался по круговой орбите, а затем сообщил себе добавочную скорость, равную первой космической и направленную к центру Земли. Мог ли Хоттабыч после такого маневра вернуться на Землю?

Задача 7. Находясь в высоких северных широтах, ледокольный пароход «Ладога», на котором путешествовал Хоттабыч со своими юными спутниками, сел на мель, наскочив на подводную банку - местное возвышение дна. Чтобы корабль мог продолжить плавание, Хоттабыч решил уничтожить мель. А дальше произошло вот что: «Ладога вдруг вздрогнула и быстро завертелась в глубоком водовороте, образовавшемся на месте провалившейся банки».

В каком направлении и почему закрутился водоворот? Могло ли такое явление произойти в районе экватора?

Задача 8. Собираясь подсказывать Вольке на экзамене по географии, джинн обещал: «Никто моей подсказки не заметит... То, что я буду иметь счастье тебе подсказывать, пойдет прямо из моих почтительных уст в твои высокочтимые уши».

Почему для направленной передачи звука нужны были магические способности Хоттабыча, тогда как направленную

передачу света может осуществить любой из нас, например, с помощью карманного фонарика?

Задача 9. Для колдовства Хоттабычу нужен был сухой волосок из бороды. И горе, если борода промокнет - она теряет свою волшебную силу. Как же сохранить бороду сухой во время всевозможных приключений? Друзья решили помочь джинну:

« - Придумал! - возбужденно вскочил на ноги Женя. - Ей-богу, придумал!.. Нужно смазать бороду каким-нибудь жиром.

- Ну и что тогда? - Пожал плечами старик.

- Тогда она не промокнет даже под водопадом, вот что тогда!..

- Я достаточно сведущ в науках, - обиделся Хоттабыч, - но не знаю, какая это наука учит смазкой предохранять от порчи волшебную бороду».

Объясните старому джинну, почему смазанная жиром борода не промокает.

Важными показателями профессиональной культуры учителя являются его творческая направленность и потребность в собственном самосовершенствовании. Развитие творческого потенциала возможно при гуманистической направленности обучения, соблюдении принципа личностно-ориентированного подхода, учёте эмоциональной, интеллектуальной и психологической готовности студента как субъекта педагогического процесса.

Станет ли деятельность молодого педагога творческой, зависит от того, сможет ли преподаватель эффективно раскрыть и реализовать в студенте креативный потенциал. Все это возможно, если обучение не будет сводиться лишь к усвоению готовых правил и определений, а станет процессом «добывания» знаний, где студент вместе с преподавателем будут в определенном смысле сотворцами тех событий, в которые они включены. Создание в учебном заведении творческой атмосферы позволяет включить механизмы общего и профессионального саморазвития личности студента.

Литература

1. Педагогические технологии: учеб. пособие для студентов педагогических специальностей / В.С. Кукушин [и др.]; под общ. ред. В.С. Кукушина. – Москва : ИКЦ «МарТ», 2004. – 333 с.

2. Туник, Е.Е. Диагностика креативности. Тест Е. Торренса / Е.Е. Туник. - Санкт-Петербург : ИМАТОН, 1998. – 169 с.

3. Селевко, Г.А. Современные образовательные технологии / Г.А. Селевко. - Москва: Народное образование, 1998. – 310 с.

4. Тихомирова, С.А. Гуманитаризация физического образования / С.А. Тихомирова // Физика в школе. - 1996. - № 6. - С. 39–46.

5. Лагин, Л.И. Старик Хоттабыч: повесть-сказка / Л.И. Лагин. – Москва : Детская литература, 1987. – 336 с.

И. А. Ефимчик

ЛИЧНОСТНО ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ

Что такое личностно ориентированная система обучения информатике? В чем инновационный подход к проектированию этой системы? Попытаемся в этом разобраться.

Всякое обучение по своей сути есть создание условий для развития личности, и, следовательно, оно является развивающим, личностно ориентированным. Проблема в другом: как понимать личность, где искать источники ее развития.

Нельзя сказать, что школа и, в частности, учителя не ставили перед собой цель развития личности. Наоборот, эта цель постоянно декларировалась как задача всестороннего, гармонического развития. Существовали модели этого развития, они описывались в виде социокультурных образцов, которыми требовалось овладеть. Личность понималась как носитель этих образцов, как выразитель их содержания. Последнее задавалось идеологией, господствующей в обществе.

В настоящее время существует иной подход к пониманию и организации личностно ориентированного обучения. В основе его лежит признание индивидуальности, самобытности, самоценности каждого человека, его развития не как «коллективного субъекта», но прежде всего как индивида, наделенного своим неповторимым субъектным опытом.

В педагогический лексикон прочно вошло понятие **педагогическая технология**. Можно предложить критерии, которые составляют сущность педагогической технологии:

- строгое определение целей обучения (почему и для чего);
- должно способствовать:
  - отбору и структуре содержания (что);
  - оптимальной организации учебного процесса (как);
  - методам, приёмам, средствам обучения (с помощью чего);
- а также учитывать:
  - необходимый реальный уровень квалификации учителя (кто);
  - объективные методы оценки результатов обучения (так ли это).

На сегодняшний день среди практиков является очень частым разделение педагогических технологий на «новые» и «неновые». Имеется в виду не временной аспект, а новые, как отличающиеся от привычных, традиционных педагогических технологий. В качестве примера рассмотрим личностно ориентированные технологии.

Личностно ориентированное обучение – способ организации обучения, в процессе которого обеспечивается учет возможностей и способностей обучаемых, и создаются необходимые условия для развития их индивидуальных способностей.

Цель такого обучения – создание условий для обеспечения собственной учебной деятельности обучающихся, учета и развития индивидуальных особенностей школьников.

Как же организовывается урок согласно личностно ориентированному обучению?

Личностно ориентированный урок – это не просто создание учителем благожелательной творческой атмосферы, а постоянное обращение к субъективному опыту школьников как опыту их собственной жизнедеятельности.

Основной замысел личностно ориентированного урока состоит в том, чтобы раскрыть содержание опыта учеников по рассматриваемой теме, и помочь ему в дальнейшем применить свои знания.

Учитель на уроке помогает ученику преодолеть ограниченность его опыта, существующего часто в виде разрозненных представлений, относящихся к различным областям знания, переводя этот опыт на научно значимые образцы. Готовясь к уроку, учитель должен продумать не только, какой материал он будет сообщать на уроке, но и какие содержательные характеристики по поводу этого материала возможны в опыте учащихся.

Важна при этом и форма обсуждения ученических «версий». Она не должна быть жесткой, в виде оценочных ситуаций («правильно-неправильно»). Задача учителя – выявить и обобщить «версии» учеников, выделить и поддержать те из них, которые наиболее адекватны научному содержанию, соответствуют теме урока, целям и задачам того или иного предмета.

Основной целью уроков такого типа является создание условий для проявления познавательной активности учеников. Можно выделить основные особенности данных уроков:

1. Использование разнообразных форм и методов организации учебной деятельности, позволяющих раскрыть субъективный опыт учащихся.
2. Создание атмосферы заинтересованности каждого ученика в работе класса.
3. Стимулирование учащихся к высказываниям, использованию различных способов выполнения заданий без боязни ошибиться, получить неправильный ответ и т. п.
4. Использование дидактического материала, позволяющего ученику выбирать наиболее значимые для него вид и форму учебного содержания.

5. Оценка деятельности ученика не только по конечному результату («правильно-неправильно»), но и по процессу его достижения.

6. Поощрение стремления ученика находить свой способ работы (решения задачи), анализировать способы работы других учеников в ходе урока, выбирать и осваивать наиболее рациональные;

7. Создание педагогических ситуаций общения на уроке, позволяющих каждому ученику проявлять инициативу, самостоятельность, избирательность в способах работы; предоставление возможности для естественного самовыражения ученика.

Что нужно для того, чтобы реализовать модель личностно ориентированного обучения на уроках информатики в школе?

Необходимо, **во-первых**, принять концепцию образовательного процесса информатики не как соединение обучения и воспитания, а как развитие индивидуальности, становление способностей, где обучение и воспитание органически сливаются.

Во-вторых, выявить характер взаимоотношений основных участников образовательного процесса: управленцев, учителей, учеников, родителей.

В-третьих, определить критерии эффективности образовательного процесса.

На уроках информатики использование личностно ориентированной технологии позволит намного лучше выполнить задачи, поставленные перед учителем в школе. Работая как можно больше индивидуально с каждым учеником, позволяя самостоятельно принимать версию решения проблемы, учитель раскрывает возможности ребят, повышает их уровень интеллекта.

Сценарий личностно ориентированного урока изменяет:

• тип взаимодействия учителя и ученика (от команды к сотрудничеству);

• ориентацию учителя в ходе урока на анализ не столько результативной, сколько процессуальной стороны учения;

• позицию ученика: от прилежного исполнителя к активному творцу, рефлексирующему свои интеллектуальные действия (включая пробные, ошибочные) при решении задач, а не только при выполнении стандартных заданий;

• характер складывающихся в процессе урока учебных ситуаций, которые должны гибко варьироваться учителем, выбираться им в зависимости от активности учеников.

Личностно ориентированный урок, реализуемый с учетом его ценностей, педагогических целей, отличается от традиционного урока.

В таблице представлено, чем цели традиционного урока отличаются от целей нетрадиционного, реализуемых в личностно ориентированном уроке.

Таблица – Сравнение целей деятельности учителя

Традиционный урок	Личностно ориентированный
Обучает всех детей установленным знаниям, умениям и навыкам.	Способствует эффективному накоплению каждым учеником своего собственного личного опыта.
Определяет учебные задания, форму работы учеников и демонстрирует образец правильного выполнения.	Предлагает на выбор различные учебные задания и формы работы, поощряет учеников за самостоятельные поиски решений.
Старается заинтересовать ребят в том учебном материале, который предлагает сам.	Стремится выявить реальные интересы ребят и согласовать с ними подбор и организацию учебного материала.
Проводит индивидуальные занятия с отстающими или наиболее подготовленными учениками.	Индивидуальная работа проводится с каждым учеником.
Планирует и направляет учебную деятельность.	Помогает самостоятельно спланировать свою учебную деятельность.
Оценивает результаты работы ребят, исправляя допущенные ошибки.	Поощряет ребят самостоятельно оценивать свои результаты и исправлять ошибки.
Разрешает возникающие конфликты.	Побуждает ребят обсуждать возникающие конфликтные ситуации и самостоятельно искать пути их решения.

Критериальная база для оценки работы учителя не может быть единой. Учитель должен сам составлять «режиссуру» урока в зависимости от его темы, уровня подготовленности класса, целевой установки, времени проведения урока и других важных факторах. Поэтому, в зависимости от типа урока должны существовать различные критерии эффективности его проведения. Единых критериев не может быть. Обозначим те, которые позволяют анализировать деятельность учителя на уроке с личностно ориентированной направленностью:

• наличие у учителя учебного плана проведения урока в зависимости от готовности класса;

• использование проблемных творческих заданий;

• применение заданий, позволяющих ученику самому выбирать тип, вид и форму материала (словесную, графическую, условно-символическую);

• создание положительного эмоционального настроя на работу всех учеников в ходе урока;

• сообщение в начале урока не только темы, но и организации учебной деятельности в ходе урока;

• обсуждение с детьми в конце урока не только того, что «мы узнали» (чем овладели), но и того, что понравилось (не понравилось) и почему; что бы хотелось выполнить еще раз, а что сделать по-другому;

• стимулирование учеников к выбору и самостоятельному использованию разных способов выполнения заданий;

• оценка (поощрение) при опросе на уроке не только правильного ответа ученика, но и анализ того, как ученик рассуждал, какой способ использовал, почему и в чем ошибся;

• отметка, выставляемая ученику в конце урока, должна аргументироваться по ряду параметров: правильности, самостоятельности, оригинальности;

• при задании на дом называется не только тема и объем задания, но подробно разъясняется, как следует рационально организовать свою учебную работу при выполнении домашнего задания.

Особенности личностно ориентированного урока определяют критерии эффективности труда учителя на уроке. К ним относим:

• умение учителя излагать не только содержание знаний, но и знакомить учеников с рациональными способами его усвоения;

• умение отбирать для совместного анализа в классе те способы, которые адекватны не только материалу данной темы, но могут обеспечить самостоятельную его организацию, т. е. быть «сквозными» при овладении материалом различного тематического содержания. Таковы, например, способы редактирования и преобразования текста, рисунка; способы анализа физических, биологических объектов; сравнения и оценки разных действий и событий; создания художественных образов и т. п.;

• умение учителя использовать в ходе урока диагностические процедуры, направленные на выявление познавательных стилей; опираться на них для построения обоснованного прогноза динамики развития каждого ученика в процессе овладения им учебным материалом.

Важное место при подготовке к уроку мы отводим разработке его гибкого плана. Он включает в себя:

• определение общей цели и ее конкретизации в зависимости от разных этапов урока;

• подбор и организацию дидактического материала, позволяющего ученику выбирать тип, вид и форму задания;

• планирование разных форм организации учебной деятельности (соотношение фронтальной, индивидуальной, самостоятельной работы);

• выявление требований к оценке продуктивности работы с учетом ее характера (дословный пересказ, краткое изложение своими словами, использование известных алгоритмов, решение проблемных, творческих задач и т. п.). Реализация гибкого плана урока возможна, если учитель не только располагает разнообразным дидактическим материалом, но и планирует характер общения, межличностных взаимодействий в процессе урока. Это предполагает:

• использование разных форм общения (монолог, диалог, полилог) с учетом конкретных целей урока;

• проектирование характера взаимодействий учеников с учетом их личностных особенностей, требований к межгрупповому взаимодействию (предоставление возможности работать индивидуально, в группе, парами);

• использование содержания субъектного опыта всех учеников в диалоге «ученик-учитель», «ученик-класс»;

• предвосхищение возможных изменений в организации коллективной работы класса, коррекция их по ходу урока. Планирование результативности урока предусматривает:

• обобщение полученных знаний и умений, оценку их усвоенности;

• анализ результатов групповой и индивидуальной работы;

• внимание к процессу работы ученика на уроке, а не только к конечному результату.

Говоря о требованиях к личностно ориентированному уроку, следует подчеркнуть, что их изменение, усложнение идут в основном за счет «психологизации» урока, т. е. более активного использования учителем индивидуальных предпочтений учеников. Ведь целью личностно ориентированного урока является не столько сообщение конкретных знаний (их усвоение, воспроизведение), сколько опора на сложившиеся у школьников способы учебной работы, обеспечивающие им самостоятельность в познании, т. е. умение учиться.

Личностно ориентированный урок предполагает индивидуальную работу с каждым учеником. В связи с этим он ставит учителя в новую, непривычную для него пока профессиональную позицию-быть одновременно и предметником, и психологом, умеющим осуществлять комплексное педагогическое наблюдение за каждым учеником в процессе урока.

Создание личностно ориентированной технологии обучения требует, конечно, особой методической базы, специальной подготовки учителя, критериев оценки эффективности урока, принятия обоснованных управленческих решений.

В чем же проявляется личностно ориентированный подход на уроке? Урок можно условно назвать личностно ориентированным, если в нем присутствуют такие важные факторы, как:

– учет потребностей, склонностей, возможностей обучающихся в определении цели урока. Т. е. каждый ученик воспринимает только ту информацию, которая ему близка по восприятию, способам представления. Учителю следует заранее спланировать свою деятельность так, чтобы каждый обучающийся мог воспользоваться тем способом изучения материала, который ему наиболее удобен;

– нужно четко сформулировать перед учащимися цели урока, то, что они будут знать и уметь при успешном усвоении материала. Учащиеся должны не только знать эти цели, но и чувствовать необходимость, заинтересованность в получении знаний, предложенных на уроке. Следовательно, учителю нужно объяснить, какую роль играет этот урок в дальнейшем изучении материала;

– проверку домашнего задания желательно проводить, учитывая форму (словесная, графическая, условно-символическая, практическая) и содержание отдельно для каждого обучающегося, это обусловлено тем, чтобы выявить как можно лучше усвоенный или не усвоенный материал. Если одного и того же обучающегося попросить разными способами ответить на поставленный вопрос, то результат будет различаться. Нужно выявлять, каким именно способом обучающийся легче ответит на вопрос, и в своей работе не только опираться на результат этого эксперимента, но и развивать умение отвечать другими способами. Это можно использовать и в ходе урока;

– объяснение, закрепление материала должно проводиться как можно более разнообразными способами. Нужно предоставить обучающемуся различные формы материала, чтобы он мог выбрать именно то, с помощью чего он легче усваивает новое. Естественно, эти материалы должны быть наглядны, легки к восприятию. В ходе объяснения нужно обязательно общаться с обучающимися, организовывать объяснение и закрепление нового материала не только в форме монолога. Задавая вопросы, не только закрепляешь урок, но и выявляешь его слабые стороны, которые можно исправить тут же. Общаясь, выявляешь жизненный опыт обучающегося, на который можно опереться в своей работе. Например: в ходе первого урока выяснилось, что один из мальчиков уже давно умеет составлять веб-странички. Также известно, что сверстники лучше могут найти общий язык, передача информации от знающего ее к незнающему ребенку проходит в более непринужденной обстановке, и следовательно усваивается лучше. Можно организовать работу так, чтобы знающий ученик «замещал» учителя. Этим самым мы решим некоторые проблемы в форме передачи информации от учителя к ученику, «сильный» ученик проверит и повторит свои знания, «ведя урок», выявит пробелы. А одноклассники будут более в непринужденной обстановке получать свои знания. Роль учителя – контролировать «заместителя», направлять в нужное русло;

– в домашней работе нужно учитывать задания не только на закрепление материала, но и на подготовку обучающихся к дальнейшему обучению. Обязательно надо провести разъяснительную работу по её выполнению. Сделать упор на вопросы, которые могут возникнуть в ходе выполнения домашней работы.

Приветствуются нетрадиционные способы выполнения задания. Самые интересные работы нужно представить классу (как повод для размышления), объяснив, почему выделили именно эту работу;

– подведение итогов нужно проводить в форме диалога, выявляя слабые стороны урока и еще раз вспоминая материал;

– выставление оценок-важная часть урока как для обучающихся, так и для учителя. Оценивать деятельность учащихся на уроке нужно учитывая личностные характеристики, степень усвоенности материала, активность, нетрадиционные ответы, правильность и многое другое. В аспекте личностно ориентированного обучения при оценке работы на уроке нужно ориентироваться прежде всего на индивидуальность учащегося.

В данной статье был предложен взгляд на проблему личностно ориентированного обучения с позиции педагога, с позиции тех инновационных процессов, которые происходят в общеобразовательных и других учебных заведениях. Можно сделать вывод, что стремление обеспечивать личностно ориентированное обучение на уроках информатики, создавать условия для развития индивидуальности ученика – это важная задача учителя, хотя она и не из разряда легких. Именно самобытность ученика, неповторимость его субъективного опыта являются основными ценностями личностно ориентированного обучения.

Литература

1. Якиманская, И. С. Технология личностно ориентированного образования / И. С. Якиманская. – М. : Сентябрь, 2000. – С. 110.

2. Ксензова, Г. Ю. Перспективные школьные технологии / Г. Ю. Ксензова. – М. : Пед. общ-во России, 2000. – С. 54.

А. Е. Загорский

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ СЕТИ INTERNET В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ»

В современном мире все чаще можно увидеть признаки рождения нового информационного общества. На смену веку электричества и атомной энергии приходит век информации. В нашей стране проявление упомянутых тенденций стало особенно хорошо заметно с 2005 года, когда был подписан декрет № 12 «О Парке высоких технологий». Парк был создан с целью формирования благоприятных условий для разработки в Республике Беларусь программного обеспечения, информационно-коммуникационных технологий, направленных на повышение конкурентоспособности национальной экономики, и год за годом доказывает правильность выбранного направления развития.

Логичным продолжением работы по информатизации страны стало постановление Совета Министров Республики Беларусь № 384 от 28 марта 2011 года, в котором была утверждена Национальная программа ускоренного развития услуг в сфере информационно-коммуникационных технологий на 2011–2015 годы. Программа предусматривает, что развитие информационного общества является одним из национальных приоритетов Республики Беларусь и рассматривается как общенациональная задача, требующая координации и объединения усилий государства, бизнеса и гражданского общества. При этом информационно-коммуникационным технологиям отводится роль необходимого инструмента социально-экономического прогресса, одного из ключевых факторов инновационного развития экономики [1].

В рамках упомянутой программы высшие учебные заведения рассматриваются как важнейший инструмент по подготовке и переподготовке ИТ-специалистов, которые позволят в полной мере реализовать планы по инновационному развитию нашей страны. Однако в настоящее время ведущие ИТ-компании Беларуси, работающие в ПВТ, отмечают нехватку как самих кадров (программистов, системных администраторов, аналитиков) так и преподавателей, способных должным образом подготовить и обучить таких специалистов.

Подготовка программистов или грамотных преподавателей требует серьезных временных затрат. Предпосылки к алгоритмическому мышлению, тяга к постоянному получению новых знаний, навыки работы с вычислительной техникой – все это закладывается в школе, в процессе работы учителя информатики со школьниками. Актуальным остается вопрос повышения качества и доступности образовательных услуг. В конкретной педагогической действительности научное и воспитательное содержание предмета преподавания может приобрести связь с организационно-управленческими, природно-социальными и иными условиями учебного бытия, которая учитывается в методике обучения. Значение методики в силу особой, специальной функции педагога, требующей владения не только предметом преподавания, но и грамотностью действий в самом сложном и к тому же повседневном межличностном общении, переоценить невозможно [2].

Для организации безбарьерной среды обучения, развития современных форм и методов самостоятельной работы студентов, внедрения навыков работы с информационными ресурсами глобальной среды Internet был разработан и в настоящее время активно внедряется в учебный процесс веб-сайт, расположенный по адресу http://tai.hostpo.net. Внешний вид главной страницы веб-сайта представлен на следующем рисунке.

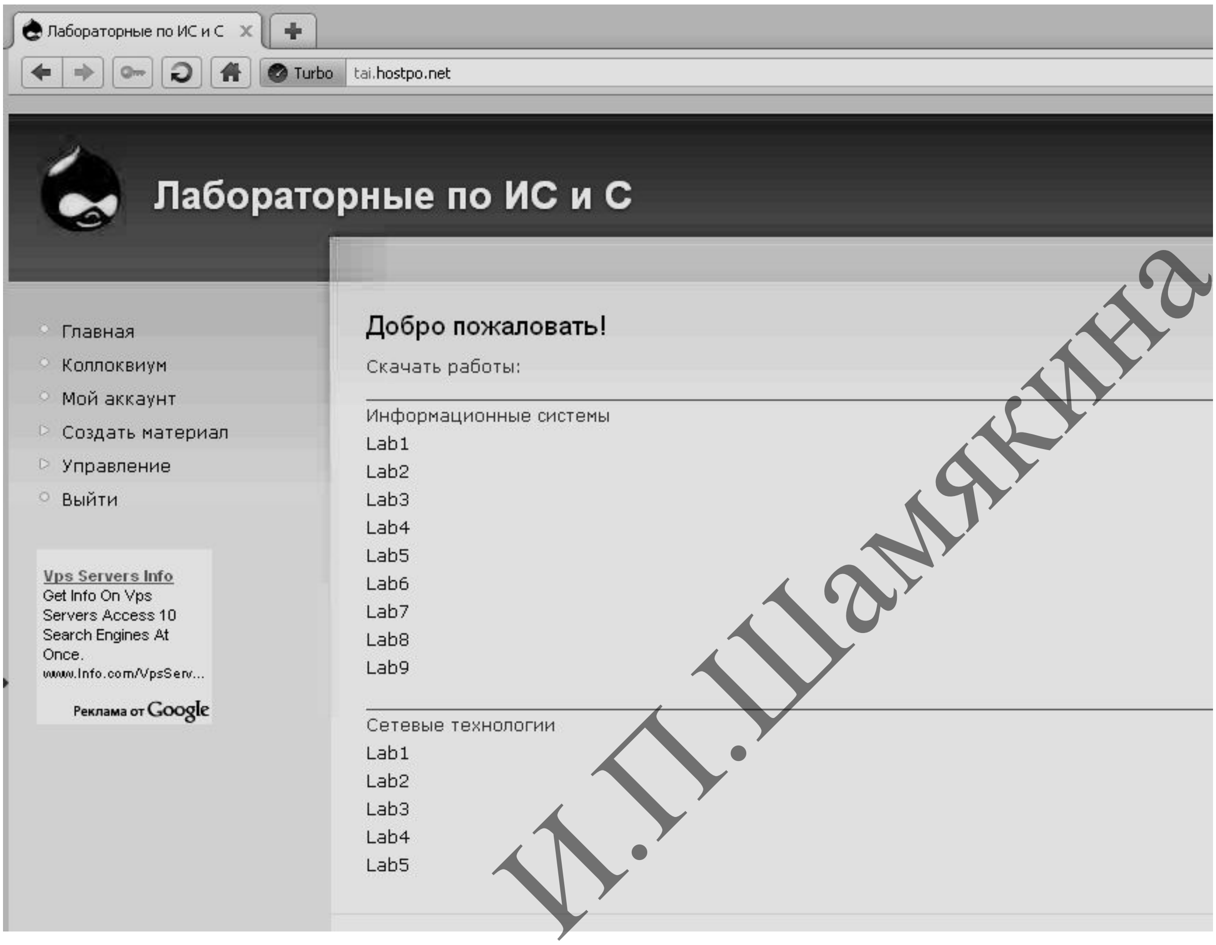


Рисунок – Главная страница учебного сайта

Сайт предоставляет студентам физико-математического факультета и факультета иностранных языков возможность ознакомиться с материалами лабораторных работ, запланированных к выполнению по учебной программе дисциплины «Информационные системы и сети». Наряду с заданиями, которые необходимо будет выполнить, обучающиеся могут при необходимости ознакомиться с теоретическим материалом, разъясняющим основные понятия и приемы действий к конкретной лабораторной работе. Несомненным преимуществом онлайн-работы с заданиями является постоянное наличие возможности кроме предоставленных кратких теоретических сведений обращаться к справочным системам глобальной среды Internet. Отметим, что на следующем этапе развития веб-сайта планируется возможность добавления элементов популярной в настоящее время идеологии Web 2.0, в рамках которой каждому пользователю предоставляется право генерировать контент (содержимое) сайта. В частности, говоря о предмете «Информационные системы и сети», логичным видится добавление раздела вопросов и ответов, формируемых в ходе решения базовых задач лабораторного практикума. Также дополнительный интерес студентов к изучаемому материалу может привлечь компьютерный форум, реализующий интерактивность и взаимодействие как между преподавателями и студентами, так и между самими обучаемыми.

Хотелось бы подчеркнуть, что выбранное направление развития сайта совпадает с общемировыми тенденциями в образовательной отрасли. Так, например, в 2011 году администрация Парка высоких технологий планирует в рамках образовательной среды создать портал, на который будут добавлены учебные материалы по профильным предметам (пилотный проект скорее всего будет по физике). Парк высоких технологий планирует идти не по пути создания электронных учебных средств обучения, а попытаться внедрить идеологию Web 2.0, когда контент создается самими преподавателями. Таким образом, при подготовке к занятиям все преподаватели смогут использовать общую базу материалов [3].

В ходе реализации веб-сайта автору пришлось решить достаточно большое количество технических, на первый взгляд мелких задач. Надеюсь, что практические сведения, изложенные ниже, пригодятся читателям, решившим также реализовать элементы интернет-обучения школьников, студентов или специалистов.

Для размещения веб-сайта необходимо было найти организацию, предоставляющую возможность бесплатного хостинга (размещение веб-сайта на сервере провайдера). К сожалению, в Беларуси таких организаций найти не удалось. Более того, даже цены на услуги платного хостинга в нашей стране и странах-соседях почему-то отличались в несколько раз не в пользу Беларуси. Это вызывает удивление, ведь компьютеры и цены на интернет-доступ везде практически одинаковые. В нашем случае было решено остановиться на хостинге в западноевропейской компании, которая бесплатно предоставляет домен третьего уровня вида tai.hostpo.net и более гигабайта дискового пространства для размещения сайта.

Следующим вопросом стал выбор системы управления контентом (CMS), на базе которой будет реализован учебный сайт. В связи с нулевым бюджетом было необходимо выбирать из бесплатных CMS. Выбор пал на систему Drupal, так как этот программный комплекс обладает русским интерфейсом, он хорошо документирован и, несмотря на бесплатность, предоставляет богатые возможности по созданию полнофункциональных веб-сайтов. С данной системой разработчик может выбрать внешний вид будущего сайта, необходимые пункты меню, отображаемые информационные блоки, настроить разрешения на доступ к информационным ресурсам различным группам пользователей [4]. Чаще всего уже через 10–15 минут после установки Drupal можно получить вполне функциональный сайт, позволяющий размещать и редактировать материалы, страницы, изображения и т. д.

При наполнении сайта учебным материалом на первое место ставилась его высокая функциональность направленная на получение теоретических знаний по курсу, приобретение практических навыков, организации самостоятельной работы, промежуточный и итоговый контроль знаний, подготовку к зачету и экзамену. Насколько поставленные цели удалось реализовать, можно будет судить после апробации, однако уже сейчас студенты проявляют интерес к сайту. Проект успешно проиндексирован глобальной поисковой системой Google, в каталоге образовательных ресурсов Liveinternet.ru сайт также поднимается в рейтинге.

Необходимо отметить, что наряду с универсальными программными разработками для создания сайтов на базе CMS (например Drupal, Joomla, WordPress и т. п.), для создания учебно-методических комплексов и систем электронного обучения в сети Internet активно используются специализированные системы электронного обучения. На предварительном этапе нами изучалась система Claroline – одна из популярных LMS (платформа электронного обучения) с богатыми возможностями по созданию онлайн-курсов и управлению процессом обучения [5]. Однако, несмотря на бесплатность данной LMS и декларируемую поддержку 35 языков, включая русский, тестирование показало, что при разработке учебно-методических онлайн-комплексов с использованием Claroline от разработчиков могут потребоваться достаточно большие усилия при развертывании системы и последующем ее сопровождении. В частности, многие модули Claroline необходимо переводить на русский язык вручную, некоторые элементы интерфейса сохраняют английские названия и т. п. В этом смысле Drupal выглядит более предпочтительно на начальном этапе разработки и создания сайта с учебно-методическими материалами.

Таким образом, в рамках данной статьи продемонстрирована возможность с помощью глобальной сети Internet практически реализовать современные подходы к преподаванию дисциплины «Информационные системы и сети». Рассмотрены вопросы, возникающие при размещении сайтов, содержащих учебно-методические материалы для их использования в учебном процессе, показаны возможности создания таких сайтов с использованием систем управления контентом. Возможно, изложенный материал будет полезен педагогическим специалистам при планировании и создании собственных учебно-методических разработок в глобальной сети Internet.

Литература

1. Утверждение Национальной программы ускоренного развития услуг в сфере информационно-коммуникационных технологий на 2011–2015 год [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: http://www.it-strana.by/154. – Дата доступа: 01.05.2011.
2. Орлов, В.И. Метод и педагогическая технология / В.И. Орлов // Адукацыя і выхаванне. – 2011. - № 3. – С. 3–9.
3. Кулінка, Н.А. ПВТ працаваў і будзе працаваць на будучыню / Н.А. Кулінка // Адукацыя і выхаванне. – 2011. - № 3. – С. 69–72.
4. Drupal в рунете [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: http://drupal.ru. – Дата доступа: 01.05.2011.
5. Claroline LMS – платформа электронного обучения [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: http://claroline-lms.ru. – Дата доступа: 01.05.2011.

Л. А. Иваненко, Е. Н. Повх

ОБОБЩЕНИЕ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Приведение знаний в стройную систему является одним из наиболее эффективных средств их закрепления. В настоящее время школьный курс математики далеко отстаёт от математики как науки по уровню обобщённости и систематизации знаний. Одними из основных причин такого отставания являются перегруженность программ и нехватка учебного времени.

Традиционно факультативные занятия были той формой учебной работы, которая позволяла учителю не только дополнительно работать со школьниками, проявляющими повышенный интерес и способности к математике, но обобщать и систематизировать их знания. Факультативные занятия были наиболее динамичной разновидностью дифференциации обучения. Они сыграли большую роль в совершенствовании школьного, в том числе математического образования.

Реформирование школы позволило внедрить профильную дифференциацию. Появились учебные заведения нового типа (лицеи, гимназии, колледжи). А в системе традиционного школьного образования открылись различные профильные классы. Таким образом, отпала необходимость в посещении учениками факультативных занятий. Факультативы практически прекратили своё существование во многих школах.

Однако сложившееся положение вызывало много нареканий со стороны общества. В связи с этим и в целях обеспечения для всех граждан равных возможностей получения общего среднего образования, отвечающего современным условиям социально-экономического развития республики, Президент Беларуси 17 июля 2008 г. издал Декрет № 15 «Об отдельных вопросах общего среднего образования». Одним из нововведений документа была отмена классов с углубленным изучением предметов. Вместо них в школах были введены факультативные занятия, призванные дать желающим возможность изучать предметы школьной программы на повышенном уровне.

Одна из основных целей учащихся старших классов – успешная сдача централизованного тестирования по предмету. При этом централизованное тестирование проверяет всю систему знаний, умений и навыков учащихся за курс средней школы. Однако школьная программа не предусматривает обобщения и систематизации учебного материала за весь курс средней школы. Это должно учитываться при разработке программы факультативных занятий. На официальных сайтах Министерства образования Республики Беларусь, Национального института образования, Государственного учреждения образования «Академия последипломного образования г. Минска» были размещены утвержденные Министерством образования Республики Беларусь программы отдельных факультативных курсов. Этими программами определяется тематика математических факультативов и фиксируется время, отведенное на рассмотрение той или иной темы. Тем самым определяется объем знаний и навыков, достигаемых учащимися при прохождении каждой темы.

Для формирования содержания факультативных занятий было рекомендовано также использовать учебные программы прошлых лет повышенного и углубленного уровней изучения математики. Методическим объединениям учителей математики было разрешено на их основе разработать соответствующие учебные программы факультативных занятий для утверждения директором общеобразовательного учреждения.

В настоящее время проведение факультативных занятий в средних общеобразовательных школах сопряжено с рядом сложностей. Об этом свидетельствуют результаты мониторинга, который проводился Мингорисполкомом по поручению Администрации президента в 2008/2009 учебном году в 20 столичных школах и гимназиях. Результатом нововведений стало то, что многие школьники изучали меньше предметов, чем обычно. Немногие выбрали факультативы общекультурного и общеразвивающего содержания, практически никто – профориентационного и технологического.

Эти сложности объясняются несоответствием резко возрастающих запросов учащихся на повышенный уровень образования готовности школы эти запросы удовлетворить. В систему школьного образования вернули старые формы факультативной работы. Однако современная система образования требует новых подходов.

Проанализировав состояние исследуемой проблемы, нами были определены следующие требования к организации факультативных занятий по математике:

1. Обеспечение взаимосвязи (по содержанию) уроков и факультативных занятий. Один из эффективных приемов – это показ новых идей и методов в действии, в применении к задачам, которые «программными» методами решаются гораздо сложнее.

2. Организация предварительной самостоятельной работы учащихся (вне занятий) по решению задач, а на факультативных занятиях вместе с ними определение наиболее рациональной методики поиска решения; установление границы применимости того или иного метода решения; предупреждение наиболее типичных ошибок в решении, в его записи и обосновании, в оформлении чертежа к задаче; нахождение эффективных приемов самоконтроля; сопоставление различных способов решения одной и той же математической задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

3. Активизация самостоятельной работы учащихся, использование таких видов самостоятельной работы, как доклады и их обсуждение, подготовка рефератов, изготовление наглядных пособий, чтение математической литературы.

4. Построение процесса обучения в виде совместной исследовательской деятельности. Исследовательская или проблемная структура изучения математики хорошо отвечает развивающим целям обучения при факультативной форме занятий. Без определенной подготовки включить учащихся в успешную многоэтапную творческую поисковую деятельность практически невозможно. Полезны специальные логические упражнения. Для усвоения методов научного познания учитель может дать задание на применение этих методов, не называя их, например, сравнить (сопоставить или противопоставить), сделать вывод по аналогии, обобщить, конкретизировать, провести классификацию и др. Благодаря таким упражнениям, представляющим собой логические задания на программном материале математики, учебная работа школьников превращается в школу логического мышления. При этом достигается цель углубления полученных знаний, интенсивнее формируется интерес учащихся к изучению школьного курса математики. Большой интерес учащихся вызывает исследование возможностей обобщения способов решения данной задачи, решение целого ряда родственных ей задач.

5. Использование историко-математического материала и элементов занимательности на факультативных занятиях. История науки позволяет учащимся увидеть ее движущие силы, наблюдать в действии взаимосвязь

и взаимообусловленность научного познания и практической деятельности человека. Это способствует формированию диалектико-материалистического мировоззрения и научного мышления учащихся. Имеется много возможностей использования историко-математического материала на факультативных занятиях. Элементы математической логики, приемы вычислительной математики и др., в общем, все разделы факультативного курса можно и полезно изучать с привлечением историко-математического материала.

Анализ существующих учебных программ и стандартов по математике для общеобразовательных школ позволил нам разработать учебную программу факультативных занятий для учащихся 10–11 классов общеобразовательных школ. Она рассчитана на 140 учебных часов (2 учебных часа в неделю) и предназначена для обобщения и систематизации учебного материала по школьному курсу математики. Приведем содержание программы.

Числовые системы.

Натуральные, дробные, рациональные числа. Десятичная система счисления. Признаки делимости. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель.

Тождественные преобразования целых выражений.

Формулы сокращенного умножения. Способы разложения многочленов на множители. Тождественные преобразования рациональных выражений. Наименьший общий знаменатель рациональных выражений.

Рациональные уравнения.

Равносильность уравнений. Рациональные уравнения, основные способы решения. Системы рациональных уравнений, основные способы решения.

Рациональные неравенства.

Тождественность преобразований. Метод интервалов. Другие способы решения неравенств. Область определения функций. Системы и совокупность неравенств.

Модуль числа и его свойства.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля. Основные методы решения: раскрытие модуля по определению, возведение обеих частей в квадрат, метод разбиения на промежутки, введение дополнительных условий, решения на основе свойств модуля.

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Основные методы решения: раскрытие модуля по определению, возведение обеих частей в квадрат, метод разбиения на промежутки, введение дополнительных условий.

Иррациональные числа.

Корень n-ой степени и его свойства. Тождественные преобразования иррациональных выражений.

Иррациональные уравнения.

Основные способы решения: возведение обеих частей в одну и ту же степень, метод введения новых переменных, искусственные приемы решения. Системы иррациональных уравнений.

Иррациональные неравенства.

Методы решения: возведение обеих частей в одну и ту же степень, метод интервалов.

Текстовые задачи.

Задачи на составление уравнений и систем уравнений: на числовые зависимости, на совместную работу, на проценты, на сплавы и смеси, на движение.

Числовые последовательности.
Арифметическая и геометрическая прогрессии. Задачи на прогрессии.
Показательная функция.
Её свойства и график. Показательные уравнения и неравенства, системы уравнений: основные виды и методы решения.
Логарифмическая функция.
Её свойства и график. Логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений: основные виды и методы решения. Показательно степенные уравнения и неравенства.
Тригонометрические функции.
Тригонометрические функции и их свойства. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.
Обратные тригонометрические функции.
Обратные тригонометрические функции и их свойства.
Тождественные преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.
Тригонометрические уравнения.
Простейшие тригонометрические уравнения. Основные виды тригонометрических уравнений и методы их решения.
Треугольник.
Треугольник, его медиана, биссектриса и высота. Средняя линия треугольника и её свойства. Прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольники. Соотношения между сторонами и углами произвольного и прямоугольного треугольника. Равенство треугольников. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника. Равносторонний треугольник. Площадь треугольника. Теорема Пифагора. Сумма углов треугольника. Теорема синусов. Теорема косинусов. Решение треугольников.
Подобие треугольников.
Подобие треугольников. Коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников.
Четырехугольники.
Параллелограмм. Основные соотношения элементов. Площадь параллелограмма. Прямоугольник. Основные соотношения элементов. Площадь прямоугольника. Ромб. Основные соотношения элементов. Площадь ромба. Трапеция. Основные соотношения элементов. Площадь трапеции. Средняя линия трапеции и её свойства.
Окружность.
Окружность. Основные соотношения элементов. Вписанные и описанные многоугольники.
Прямые и плоскости в пространстве.
Параллельные прямые на плоскости и в пространстве. Признаки параллельности прямых.
Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр и наклонная. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Прямая перпендикулярная плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.
Многогранники и их изображения.
Многогранники: призма, пирамида, куб, параллелепипед. Площадь поверхности и объем тел многогранников.
Тела вращения.
Цилиндр. Конус, шар. Площадь поверхности и объем тел вращения.
Задачи на комбинации многогранников и тел вращения.

Содержание факультативного курса не выходит за рамки учебной программы по математике, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь, и направлено на усвоение основных теоретических вопросов и отработку учебных умений, предусмотренных этой программой.

Проведенное исследование позволило разработать методику обобщения и систематизации знаний и умений учащихся старших классов по математике при проведении факультативных занятий, обеспечивающую взаимосвязь уроков и факультативных занятий, активизацию самостоятельной работы учащихся, совместную исследовательскую деятельность, систематичность контроля, направленность содержания обучения на требования образовательных стандартов. По разработанной методике на уроках математики учащиеся изучают теоретические сведения по учебной теме, а также рассматривают основные типы уравнений и неравенств, методы их решения. На факультативных занятиях повторяются основные теоретические сведения (самостоятельная подготовка учащихся к занятию), вспоминают основные типы заданий. При проведении факультативных занятий задача учителя сводится к обучению школьников определять наиболее рациональную методику поиска решения, устанавливать границы применимости того или иного метода решения; к предупреждению наиболее типичных ошибок в решении, в его записи и обосновании, в оформлении чертежа к задаче, к нахождению эффективных приемов самоконтроля, сопоставлению различных способов решения одной и той же математической задачи, оценив их достоинства и недостатки. В этом случае сознательное и глубокое усвоение содержания, идей, методов школьного курса является в то же время лучшей подготовкой к вступительным экзаменам в высшие и средние учебные заведения и ЦТ.

Л. А. Иваненко, Е. Н. Повх

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Программа по математике предполагает как классную так и внеклассную работу. Под внеклассной работой по математике понимаются необязательные систематические занятия учащихся с преподавателем во внеурочное время.

Различают два вида внеклассной работы по математике:

- работа с учащимися, отстающими от других в изучении программного материала (дополнительные внеклассные занятия);
- работа с учащимися, проявляющими к изучению математики

повышенный, по сравнению с другими, интерес и способности (внеклассная работа в традиционном понимании смысла этого термина).

Традиционная тематика внеклассных занятий обычно ограничивалась рассмотрением таких вопросов, которые выходили за рамки официальной программы, но имели много точек соприкосновения с рассматриваемыми в ней вопросами (признаки делимости на 4, на 11, на 25; геометрические построения при помощи одной линейки и т. д.).

Также традиционными для рассмотрения на внеклассных занятиях по математике были исторические экскурсы по той или иной теме, математические софизмы, задачи повышенной трудности и т. д.

Периодическое введение новых программ приводило к изменению содержания не только основного курса, но и внеклассных занятий.

Для рассмотрения вопросов, не предусмотренных школьной программой, Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 10 ноября 1966 г. «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» было предусмотрено введение в учебный план школы факультативных занятий по различным учебным предметам, в том числе и по математике. Факультативные занятия предполагалось проводить с учащимися, проявляющими к ее изучению повышенный интерес.

Программа основного курса математики вместе с программой факультативных занятий для средней школы составляют программу углубленного изучения предмета для учащихся определенного класса.

Постановление выдвинуло ряд требований:

- синхронизация факультативных занятий по математике с изучением основного курса в школе;
- наличие высококвалифицированных учителей или других специалистов, способных вести занятия на высоком научно-методическом уровне;
- не менее 15 учащихся, желающих изучать данный факультативный курс, и их добровольная запись;
- полная ответственность учителя за качество факультативных занятий;
- внесение факультативных занятий в расписание и оплата учителю их проведения.

Возможность 1–2 часа в неделю дополнительно работать со школьниками, проявляющими повышенный интерес и способности к математике, представляет собой одно из проявлений дифференцированного обучения математике.

Факультативные занятия стали наиболее динамичной разновидностью дифференциации обучения.

Сложились следующие формы работы на факультативных занятиях по математике: изложение узловых вопросов данного факультативного курса лекционным методом, семинары, собеседования (дискуссии), решение задач, рефераты учащихся как по теоретическим вопросам, так и по решению цикла задач, математические сочинения, доклады учащихся и т. д.

Другой формой ведения факультативных занятий по математике являлось разделение каждого занятия на две части. Первая часть посвящалась изучению нового материала и самостоятельной работе учащихся по заданиям теоретического и практического характера. По окончании этой части занятия учащимся предлагалось домашнее задание по изучению теории и ее приложений. Вторая часть каждого занятия была посвящена решению задач повышенной трудности и обсуждению решений особенно трудных или интересных задач. Эта форма проведения факультативных занятий способствовала успешному переходу от форм и методов обучения в школе к формам и методам обучения в высших учебных заведениях.

Факультативные курсы математики позволили расширить и углубить изучение программного материала, ознакомить учащихся с некоторыми современными математическими идеями, раскрыть приложения математики в практике. Кроме того, на факультативных занятиях рассматривалось решение разнообразных математических задач, в том числе нестандартных, а также задач, предлагаемых на конкурсных экзаменах в вузы.

Основной заслугой факультативных занятий явилось улучшение подготовки учащихся к вступительным экзаменам в высшие и средние специальные учебные заведения.

Факультативные занятия сыграли большую роль в совершенствовании школьного, в том числе математического образования. Они позволяли осуществлять поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых методов обучения, в широких пределах варьировать уровень сложности изучаемого материала. Затем выверенное содержание факультатива могло войти в общеобразовательные программы.

Практика показала, что установка на повсеместное ведение факультативов по единой программе была несостоятельной. Учителя, как правило, вели факультативные занятия по собственной программе. Для определения общих подходов к содержанию факультативных занятий в 1987 году вышел в свет сборник нормативных документов МП СССР «Математика в школе», в котором были опубликованы примерные программы факультативных курсов. Эти программы являлись ориентировочными, учитель мог по своему усмотрению менять содержание факультативных занятий, порядок изучения тем, перераспределять учебное время, придерживаясь при этом основного принципа: содержание факультатива в первую очередь должно углублять и дополнять основной курс.

Примечательной особенностью факультативного курса являлось то, что программа для каждого класса была составлена из ряда основных тем (независимых друг от друга), содержание которых непосредственно примыкало к общему курсу математики.

При выборе методов и приемов обучения на факультативных занятиях учитывалось содержание курса, уровень развития и подготовленности учащихся, их интерес к тем или иным разделам программы. Одно из важнейших требований к методам заключалось в активизации мышления учащихся, развитии самостоятельности в различных формах ее проявления.

Как показывает опыт преподавания, применение лекционно-семинарской системы при изучении ряда тем курса позволяло учителю излагать учебный материал крупными порциями и на этой основе высвобождать время для повторения вопросов теории и решения задач. Кроме того, такая организация занятий обеспечивала усиление практической и прикладной направленности преподавания, приобщение учащихся к активной работе с учебной литературой, повышение уровня их подготовки.

Как правило, за одну-две лекции излагался весь теоретический материал изучаемого раздела. Основным видом практических занятий являлась самостоятельная работа учащихся по закреплению и углублению теоретического материала, изложенного на лекции, целенаправленная работа по выработке у учащихся умений и навыков решения основных типов задач.

Наибольшее распространение у учителей математики получили семинары, посвященные повторению, углублению и обобщению пройденного материала. По своим дидактическим целям они служили также приобретению новых знаний, обучению самостоятельному применению знаний в нестандартных ситуациях и др.

Однако практика показала ряд недостатков факультативных курсов. Одна из задач, возложенных на факультативные курсы, – улучшение подготовки учащихся к вступительным экзаменам в высшие и средние специальные учебные заведения. Но если эта задача становится главной, то занятия сводятся к прямому натаскиванию (в форме решения многочисленных задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в различные вузы.) Это дискредитирует саму идею факультативных курсов, занятия к тому же малоэффективны.

При проведении факультативных занятий должны учитываться возрастные особенности учеников. В VI–VIII классах ещё не сформировался интерес к математике, поэтому занятия факультатива целесообразно проводить в четыре этапа.

Первый этап – исторический экскурс, т. е. знакомство учащихся с историей математики. Используются разнообразные формы работы: написание докладов и рефератов, устный журнал, беседа самого учителя. Тематика докладов и рефератов может быть различна, например: «О Диофанте и диофантовых уравнениях», «Теория отношений и расширение понятия числа в странах Ближнего и Среднего Востока» и др. При написании докладов и рефератов школьникам приходится работать с дополнительной литературой, научными статьями, журналами. Это самостоятельный и кропотливый труд. Написание рефератов и докладов учит школьников самостоятельно работать с литературой, находить и решать сложные задачи. Все это способствует развитию интереса к математике.

Второй этап – решение одной или двух задач, в зависимости от их сложности и отведенного времени. Задачи подбираются занимательного характера: математические эссе, софизмы, головоломки.

Третий этап – изучение нового материала, знакомство учащихся с элементами теории вероятностей, композиции движений и др., т. е. работа по программе факультативных курсов, призванная углублять знания учеников и развивать интерес к предмету. Темы факультатива независимы друг от друга, что дает возможность начинать изучение курса с любой из них, т. е. и в середине учебного года, если ученик проявит интерес к математике.

Четвертый этап – это решение задач повышенной трудности по каждой теме основного курса. Целесообразно предлагать учащимся решение задач несколькими способами, отдавая предпочтение наиболее оригинальным, при этом регулярно и систематически анализируя ошибки и неудачи.

Интересной формой проведения факультативных занятий является научно-практическая конференция.

На факультативных занятиях в IX–XI классах продолжается работа над формированием познавательных интересов. С этой целью предлагаются более серьезные темы. Преподавание математики строится как углубленное изучение ряда вопросов. Занятия при этом должны в равной степени способствовать повышению гуманитарной и технической подготовки учащихся, развитию потенциальных творческих способностей, повышению уровня математической подготовки. Каждое занятие можно разделить на три этапа.

Первый этап – ознакомление с темами по углубленному изучению математики. Учащиеся обычных средних школ не должны чувствовать себя менее подготовленными по сравнению со сверстниками, имеющими возможность учиться в профильных классах, лицеях, гимназиях.

Второй этап – решение нестандартных задач и задач повышенной сложности. Особое внимание необходимо обращать на задачи, которые формируют умение анализировать, сравнивать, обобщать, выделять главное.

Третий этап – повторение и систематизация знаний, самостоятельная работа, подготовка учащихся к вступительным экзаменам в вузы. На этом этапе рассматриваются те же темы, что и в основном курсе. Каждая тема факультативного курса имеет свои особенности.

Опыт проведения факультатива показал, что необходима разработка системы организации факультативных курсов, которая предполагала бы, во-первых, органическое единство теоретических знаний с их практическим закреплением, во-вторых, последовательное усложнение теоретического материала и увеличение роли самостоятельной работы учащихся с различными теоретическими источниками, в-третьих, реализацию дифференцированного подхода с учетом уровня подготовленности и возрастных особенностей учеников. Для учета индивидуальных особенностей учащихся в школьной системе образования использовалась уровневая дифференциация. Проводимое реформирование школы позволило внедрить профильную дифференциацию. Появились лицеи, гимназии и колледжи, а в системе традиционного школьного образования – различные профильные классы. Обучаясь по различным профилям, учащиеся усваивали учебный материал на углубленном и повышенном уровнях по тем предметам, по каким предполагалась сдача вступительных экзаменов (позже – ЦТ). Таким образом, отпала необходимость в посещении учениками факультативных занятий. Во многих школах факультативы практически прекратили своё существование.

Анализируя систему школьного образования, Президент РБ Александр Григорьевич Лукашенко констатировал, что школьные нагрузки и сроки обучения только возрастают, а в целом качество образования не улучшается. По словам Президента, все это вызывает обоснованное недовольство в обществе.

«Школьников параллельно учат по разным программам: базовой, повышенной, углубленной. Быть просто хорошей школой стало не престижно. Надо обязательно стать лицеем, гимназией или ввести углубленное изучение самых разных предметов, вплоть до медицины, права или архитектуры», – заметил глава государства.

«Образование – серьезнее экономики. Без этого не может быть ни экономики, ни государства в целом. Необходимо принять решение раз и навсегда. Люди должны четко понимать, какой у нас будет школа», – подчеркнул президент. – «Современная школа должна сохранить все лучшее, что сделано за последние годы, и в то же время избавиться от ненужных наслоений, которые только усложняют процесс получения знаний и не влияют на качество образования».

Ликвидировать излишнюю усложненность и громоздкость программ обучения было предложено за счет упорядочения учебных предметов, укрупнения предметных областей и разгрузки программ от второстепенного материала.

В связи с этим и в целях обеспечения для всех граждан равных возможностей получения общего среднего образования, отвечающего современным условиям социально-экономического развития республики, Президент Беларуси 17 июля 2008 г. издал Декрет № 15 «Об отдельных вопросах общего среднего образования».

Декрет установил 11-летний срок получения общего среднего образования и шестидневную школьную неделю, в которой пять дней являются учебными, а шестой предназначается для организации физкультурно-оздоровительной и спортивно-массовой работы, трудового обучения и воспитательных мероприятий. Одним из нововведений документа, как известно, была отмена классов с углубленным изучением предметов. Вместо них в школах были введены факультативные занятия, призванные дать желающим возможность изучать предметы школьной программы на повышенном уровне.

В декрете было указано, что изучение учебных предметов во всех общеобразовательных учреждениях будет осуществляться на базовом уровне по единым программам. Для учащихся, проявивших особый интерес к отдельным дисциплинам, предусмотрена возможность их изучения на повышенном уровне в рамках факультативных занятий по выбору самих школьников и их родителей. Факультативные занятия организуются на бесплатной основе без выставления отметок. Факультативные занятия проводятся до начала или после завершения уроков по отдельному расписанию с учетом перерыва на обед и отдых с целью устранения перегрузки учащихся.

В целях обеспечения качества разрабатываемых программ факультативных занятий и на основании решения Президиума Научно-методического совета при Министерстве образования Республики Беларусь по дошкольному, общему среднему и специальному образованию (протокол от 30.06.2009 № 7) Министерство образования рекомендовало направлять для рассмотрения в установленном порядке и присвоения соответствующего грифа программы факультативных занятий.

На официальных сайтах Министерства образования Республики Беларусь, Национального института образования, Государственного учреждения образования «Академия последипломного образования г. Минска» были размещены утвержденные Министерством образования Республики Беларусь программы следующих факультативных курсов:

- Теория и практика решения алгебраических нестандартных задач.
- Арифметические и логические головоломки.
- Геометрические построения на плоскости: теория и практика.
- Школьный курс геометрии и эстетика.
- Методы решения стандартных и нестандартных задач, содержащих знак модуля (с использованием программного обеспечения).
- Занимательные свойства геометрических фигур.
- Занимательные задания геометрического содержания.
- Итоговое повторение школьного курса математики.
- Математика в практико ориентированных занимательных заданиях.
- Математика после уроков.
- Множества и операции над ними.
- Начала математического моделирования.
- Формирование основ культуры занятий математикой.
- Прикладные приложения популярных разделов математики.
- Рациональные уравнения, неравенства и их системы. Задачи с параметром.
- Решаем без ошибок.
- Решение задач повышенной сложности.
- Решение нестандартных задач на делимость чисел.
- Решение нестандартных текстовых задач.
- Система типичных тестовых заданий и задач по математике.
- Алгебра учит рассуждать.
- Повторяем математику.
- Избранные темы школьного курса математики.

Этими программами определяется тематика математических факультативов и время, отведенное на рассмотрение той или иной темы. Тем самым определяется объем знаний и навыков, достигаемых учащимися при прохождении каждой темы.

Вместе с тем, учитель может выбрать для факультативных занятий любой из рекомендованных Министерством образования курсов. Программы предусматривают различные вариации содержания факультативных курсов. Поэтому каждый учитель может в определенной степени варьировать содержание курса, не выходя за рамки программы факультатива. Сказанное выше в еще большей степени относится к специальным курсам по математике, которые вообще предполагают последовательное изучение определенной тематики в течение длительного времени.

Методическим объединениям учителей было разрешено на основе учебных программ повышенного и углубленного уровней изучения математики прошлых лет разработать соответствующие учебные программы факультативных занятий для утверждения директором общеобразовательного учреждения.

В настоящее время проведение факультативных занятий в средних общеобразовательных школах сопряжено с рядом сложностей. Об этом свидетельствуют результаты мониторинга, который проводился Мингорисполкомом по поручению Администрации президента в 2008/2009 учебном году в 20 столичных школах и гимназиях.

Специалисты изучали, насколько эффективно ведется работа по реализации декрета президента № 15 от 17 июля 2008 года «Об отдельных вопросах общего среднего образования».

Результатом нововведений стало то, что многие школьники изучали меньше предметов, чем обычно. Многие учителя избегали браться за ведение факультативов, несмотря на оказываемую им организационную поддержку. В результате наполняемость факультативных групп была небольшой, а иногда такие группы и вовсе распускались в середине года. Кроме того, факультативные занятия порой не отличались высоким качеством. Эти сложности объясняются несоответствием резко возрастающих запросов учащихся на повышенный уровень образования готовности школы эти запросы удовлетворить. В систему школьного образования вернули старые формы факультативной работы. Однако современная система образования требует новых подходов.

В организации факультативных курсов существуют нерешённые проблемы, связанные с содержанием и методикой проведения занятий. Поэтому необходимо обосновывать целесообразность внесения тех или иных вопросов в программу факультативного курса, определить объём учебного материала, выбрать доступные варианты изложения, разработать системы упражнений.

Из вышеизложенного следует, что

1) факультативные занятия не являются новой формой учебной работы. Их программа традиционно была составлена так, что все ее вопросы изучались параллельно с изучением основного курса математики в школе. Главная цель факультативных занятий – углубление и расширение знаний, развитие интереса учащихся к предмету, развитие математических способностей учащихся, привитие школьникам интереса к самостоятельным занятиям математикой, воспитание и развитие их инициативы и творчества;

2) в настоящее время цели и задачи факультативных занятий расширены. Математические факультативы стали одной из ведущих форм осуществления профильной дифференциации в общеобразовательной школе;

3) приведение знаний в стройную систему является одним из наиболее эффективных средств их закрепления. Систематизация знаний неотделима от их обобщения: чем шире обобщения, тем больше отражено между ними связей и отношений, тем более широкий круг знаний объединяется в систему. На наш взгляд, систематизацию и обобщение

знаний, умений учащихся старших классов можно проводить на факультативных занятиях. При этом мы не предлагаем переложить данный вид учебной работы только на внеклассную форму обучения.

На протяжении всего срока обучения математике учащиеся изучают новый учебный материал. По окончании обучения они должны продемонстрировать знание учебного материала в полном объеме. Факультативные занятия должны помочь учащимся привести в систему полученные знания, ликвидировать возможные пробелы. При этом, связывая полученные по теме знания в систему, учитель помогает учащимся выйти на новый, более высокий уровень понимания.

Таким образом, факультативные занятия в старших классах можно эффективно использовать для обобщения и систематизации знаний и умений учащихся по математике, что поможет более качественно подготовиться как к выпускным экзаменам, так и к централизованному тестированию.

Существует мнение, что факультативные занятия не должны готовить к централизованному тестированию. В системе образования есть другие формы подготовки к нему. Например, курсы при различных вузах, лицеях, заочные курсы. В республике функционируют лицеи, гимназии. Однако не все дети учатся в этих учреждениях образования или имеют возможность посещать подготовительные курсы. Большая часть учащихся получает математическое образование, в том числе готовится к централизованному тестированию, на уроках. Но результаты ЦТ не показывают качественных знаний учащихся. В 2008 году по математике, с одной стороны, более 50% тестируемых набрали менее 20 баллов, а с другой стороны, небывало большое число абитуриентов (55) – получили стопроцентный результат. В 2009 году математика оказалась самым популярным предметом централизованного тестирования. На неё зарегистрировалось почти 116 тысяч абитуриентов, приняли участие 113 тысяч человек. Для сравнения – в 2008 году математику сдавали 110 тысяч человек. Популярность математики понятна, в технический вуз без неё не поступишь, а именно техническое образование является наиболее востребованным и престижным. Но абитуриенты показали относительно низкие результаты на испытаниях по физике, где 70,3% абитуриентов набрали 20 баллов и ниже, и математике, по которой 58,1% абитуриентов показали аналогичный физике результат в 20 баллов и ниже. Выше 50 баллов набрали 12,3% испытуемых. В 2010 году тестирование по математике с максимальным количеством (100 балов) написал 21 абитуриент. На 90 и выше баллов написали 243 человека. На 80 и выше – 1148 абитуриентов. А вот на 20 и ниже баллов этот предмет знают 72148 поступающих, из них на 10 баллов и ниже – 26705 человек. Знания поступающих по математике сильно удручают. На 20 и ниже баллов этот предмет написали более 85% абитуриентов. Средний балл всех испытуемых составил 21,76. Средний балл абитуриента, который претендует на дневное бюджетное отделение, находится в районе 55,08 балла.

Некоторые статистические данные отражены в диаграммах (рисунки 1, 2).

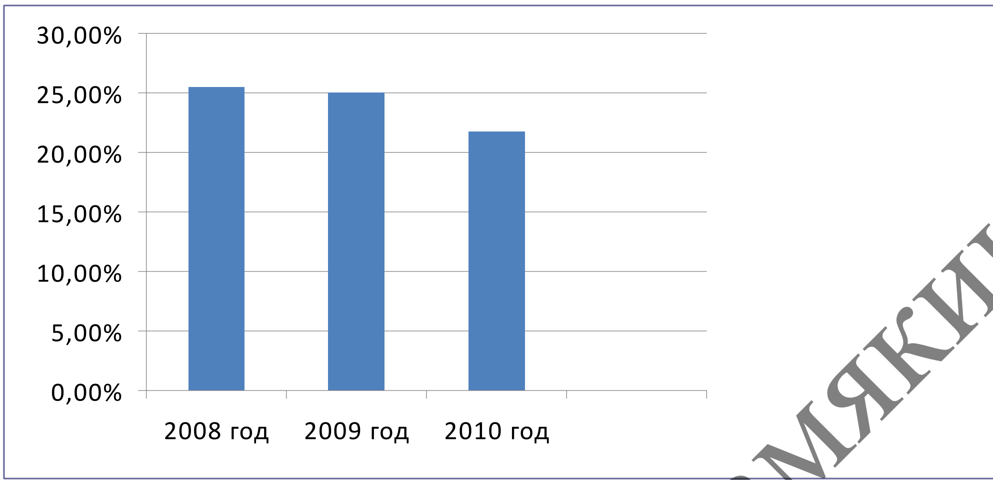


Рисунок 1 – Средний балл ЦТ по математике

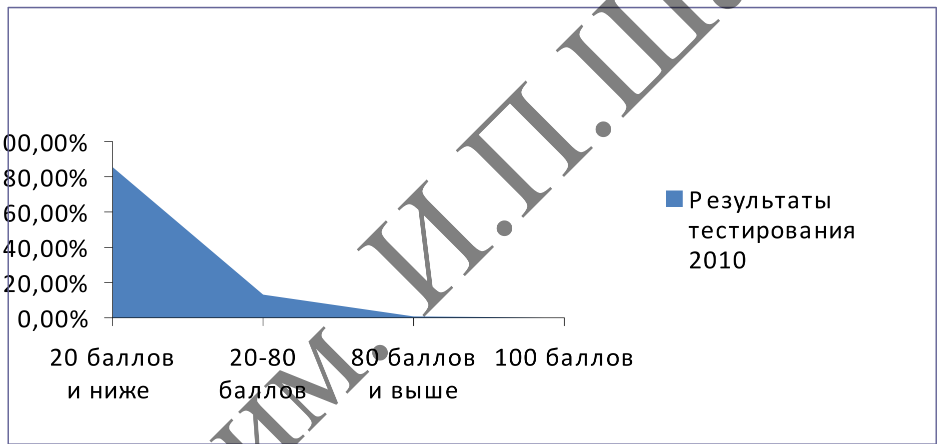


Рисунок 2 – Результаты ЦТ по математике в 2010 году

Для 11-х классов целесообразно было бы разработать единую программу факультатива, обеспечивающую формирование у учащихся устойчивого познавательного интереса и повышение уровня их математического развития. Кроме того, нужно учесть интересы и цели учеников 11-х классов и ориентировать факультативные занятия на подготовку к вступительным испытаниям. Это повысит математический потенциал учащихся – будущих студентов высших учебных заведений. В свою очередь это улучшит качество подготовки специалистов.

Таким образом, проанализировав состояние исследуемой проблемы, нами были определены следующие требования к организации факультативных занятий по математике.

1. Обеспечение взаимосвязи (по содержанию) уроков и факультативных занятий. Один из эффективных приемов – это показ

новых идей и методов в действии, в применении к задачам, которые «программными» методами решаются гораздо сложнее.

2. Организация предварительной самостоятельной работы учащихся (вне занятий) по решению задач, а на факультативных занятиях вместе с ними определение наиболее рациональной методики поиска решения; установление границы применимости того или иного метода решения; предупреждение наиболее типичных ошибок в решении, в его записи и обосновании, в оформлении чертежа к задаче; нахождение эффективных приемов самоконтроля; сопоставление различных способов решения одной и той же математической задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

3. Активизация самостоятельной работы учащихся, использование таких видов самостоятельной работы, как доклады учащихся и их обсуждение, подготовка рефератов, изготовление наглядных пособий, чтение математической литературы.

4. Построение процесса обучения в виде совместной исследовательской деятельности. Исследовательская или проблемная структура изучения математики хорошо отвечает развивающим целям обучения при факультативной форме занятий. Без определенной подготовки включить учащихся в успешную многоэтапную творческую поисковую деятельностьпрактически невозможно. Полезны специальные логические упражнения. Для усвоения методов научного познания учитель может дать задание на применение этих методов, не называя их, например, сравнить (сопоставить или противопоставить), сделать вывод по аналогии, обобщить, конкретизировать, провести классификацию и др. Благодаря таким упражнениям, представляющим собой логические задания на программном материале математики, учебная работа школьников превращается в школу логического мышления. При этом достигается цель углубления полученных знаний, интенсивнее формируется интерес учащихся к изучению школьного курса математики. Большой интерес учащихся вызывает исследование возможностей обобщения способов решения данной задачи, решение целого ряда родственных ей задач.

5. Использование историко-математического материала и элементов занимательности на факультативных занятиях. История науки позволяет учащимся увидеть ее движущие силы, наблюдать в действии взаимосвязь и взаимообусловленность научного познания и практической деятельности человека. Это способствует формированию диалектико-материалистического мировоззрения и научного мышления учащихся. Имеется много возможностей использования историко-математического материала на факультативных занятиях. Элементы математической логики, приемы вычислительной математики и др., в общем, все разделы факультативного курса можно и полезно изучать с привлечением историко-математического материала.

Т. Ф. Ивашко

МОДАЛЬНОСТЬ ВОСПРИЯТИЯ ИНФОРМАЦИИ КАК ФАКТОР ЭФФЕКТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННЫХ УМЕНИЙ У УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ

Физика образует прочный фундамент всего естествознания, методы физической науки обеспечили мощный прогресс в развитии таких наук, как биология, химия, астрономия, геология и др. Поэтому важным звеном обучения физике является формирование у учащихся учебно-информационных умений (умений самостоятельно получать информацию из различных источников).

Данная проблема привлекала внимание ряда исследователей. Труды А.В. Усовой, В.К. Буряка, А.А. Боброва и др. посвящены работе с учебниками физики в сочетании с использованием дидактических средств. Работы В.И. Богдана, Д.И. Кульбицкого, А.А. Луцевича, И.И. Цыркуна посвящены формированию практических и экспериментальных умений при обучении физике. Однако не все аспекты проблемы исследованы должным образом. Слабая теоретическая разработка целенаправленного и планомерного формирования учебно-информационных умений у учащихся не позволяет учителю практически использовать их в процессе обучения физике в средней школе. Для успешного формирования учебно-информационных умений при обучении физике необходимо исходить: во-первых, из учета модальности восприятия информации, во-вторых, из анализа основных источников учебной информации современного школьника. Любая информация, идущая через нервную систему школьника, должна предварительно транслироваться в ведущую модальность памяти и понимания. С точки зрения нейролингвистического программирования (НЛП-подход), у человека существует несколько репрезентативных систем (репсистем). Репсистема – это совокупность элементов, позволяющих представлять (репрезентировать) в психике человека необходимую информацию. Согласно исследованиям психологов Бетти Лу Ливер, Н.И. Шевандрина, репсистемы по характеру доминирующей модальности представления информации делятся на: 1) визуальную (доминирует зрение); 2) аудиальную (доминирует слух); 3) кинестетическую (доминируют ощущения); 4) полимодальную (преобладают обобщенные представления, мыслительные процессы). Классифицировать источники информации можно по виду источника и по информативности содержания (схема). Основными источниками знаний для учащихся являются рассказ учителя и текст учебника, а в последнее время – экраны компьютера. При помощи слуха учащиеся усваивают большую часть информации в классе. Сложность этого вида деятельности состоит в следующем. При восприятии речи школьник сам организует процесс ее усвоения. И учитель, наблюдая за учащимися, может лишь предполагать уровень их восприятия. В этом состоит первая трудность восприятия речи.

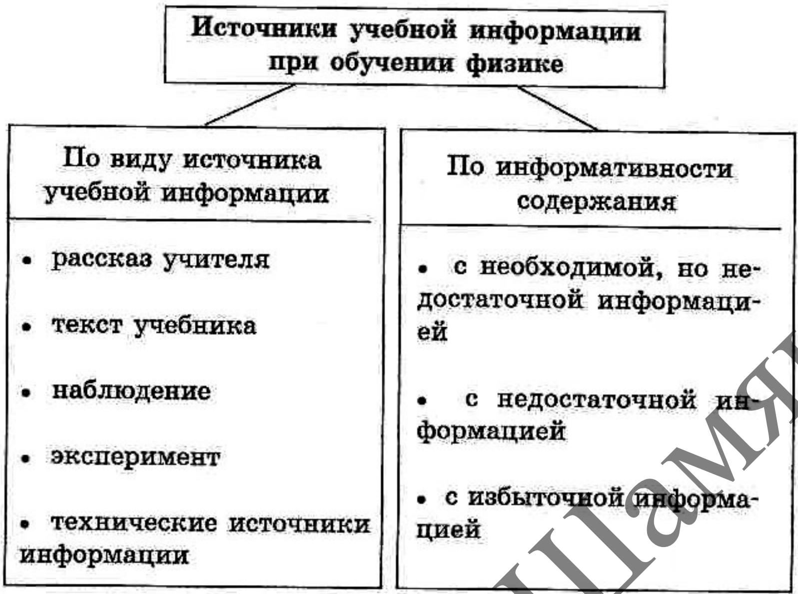


Рисунок – Классификация источников информации при обучении физике

Вторая трудность заключается в том, что при слушании задан принудительный темп. Учитывая эти трудности, учитель должен помогать учащимся организовать активную познавательную деятельность при восприятии материала на слух, т. е. формировать у учащихся следующие приемы работы: внимательно слушать учителя и вести записи за ним, самостоятельно работать с текстом учебного кинофильма, магнитозаписи.

Однако для учащихся с аудиальной репсистемой рассказ учителя является наиболее приемлемым видом подачи учебного материала, так как ведущий сенсорный канал у них аудиальный (т. е. слуховой). Учащиеся-аудиалы легче и быстрее воспринимают и запоминают учебную информацию, если она подается с помощью звуковых сигналов (рассказ учителя, магнитозапись, учебный кинофильм). Но класс состоит не только из аудиалов, в нем присутствуют и учащиеся с другими ведущими репсистемами (визуалы, кинестетики, полимодалы). Поэтому при подаче учебного материала учитель должен «транслировать» информацию по различным сенсорным каналам, т. е. использовать другие источники информации на уроке. К ним можно отнести: текст учебника, демонстрационный эксперимент для визуалов; фронтальные и домашние лабораторные работы для кинестетиков; объяснение наблюдаемого явления, мозговой штурм при решении проблемной ситуации или задачи для полимодалов и т. п. Технические источники информации (диафильмы, кинофильмы, компьютеры, учебное телевидение) охватывают весь спектр сенсорного восприятия информации. Таким образом, использование их при обучении физике дает возможность подавать учебную информацию по различным сенсорным каналам, что максимально индивидуализирует подачу материала.

Процесс индивидуализации здесь, на наш взгляд, связан с тем, что, используя различные источники информации при обучении физике, мы, согласно репсистеме, учитываем индивидуальные особенности каждого ученика. Особое внимание необходимо обратить на то, что большое использование технических источников информации в процессе обучения физике является особенностью данного предмета, а не искусственным нововведением.

Как видно из вышесказанного, учащиеся при обучении физике могут получать информацию согласно своей ведущей модальности. Однако встает вопрос об овладении учащимися комплексом учебных умений, направленных на самостоятельный поиск, получение и переработку учебной информации. Так, при наблюдениях и экспериментальных работах от учащихся требуется владение такими приемами, как, например, объяснить наблюдаемое физическое явление, сформулировать выводы из данного наблюдения, рационально использовать физические приборы, самостоятельно собрать несложную физическую экспериментальную установку. При работе с техническими источниками информации учащиеся должны владеть следующими приемами: вести записи при работе с экраном, описывать кадры из диафильма или кинофильма с использованием физических терминов, выделять главные детали физического явления при просмотре диафильмов, кинофильмов, учебных передач по ТВ, работать с компьютером в системе «Интернет».

Опираясь на исследования отечественных и западных психологов (Бетти Лу Ливер, Майкл Гриндер, Н.И. Шевандрин и др.) и учитывая специфику предмета физики, мы выделяем приоритетные виды деятельности для учащихся с различными репсистемами (таблица). Согласно данным, приведенным в таблице, индивидуализация самостоятельной работы учащихся должна учитывать репсистему школьников, что позволит активизировать их познавательную деятельность.

Таблица – Влияние репсистемы на виды деятельности при обучении физике

Репсистема	**Адекватные виды деятельности**	**Приоритетные виды деятельности в процессе обучения физике**
1	*2*	*3*
Визуальная	Работа с бумагой и ручкой	Чтение с доски, с книги, с журналов. Задачи в письменном виде

Продолжение таблицы

1	2	3
Аудиальная	Ролевые игры	Просмотр кинофильмов, рассказ учителя, учебные телепередачи, задачи
Кинестетическая	Элементы соревнования	Проведение эксперимента. Решение задач с использованием физических приборов, действующих моделей
Полимодальная	Индивидуальная работа с текстовыми источниками информации	«Мозговой штурм», проблемные вопросы. Доказательства теории, предсказание результатов физического эксперимента

Учащиеся с различными ведущими модальностями восприятия предпочитают деятельность, наиболее близкую их репсистеме; визуалы – чтение с доски, задачи в письменном виде; аудиалы – рассказ учителя, задачи в устной форме; кинестетики – решение задач экспериментального характера; полимодалы – решение проблемных задач. Следует заметить, что все сказанное не означает того, что учащиеся должны заниматься только данными видами деятельности. Приоритетные виды деятельности для них наиболее предпочтительны, так как информация, получаемая по данным сенсорным каналам, усваивается в более полном объеме. Однако в процессе обучения физике необходимо развивать и поддерживать у школьников самостоятельную деятельность, направленную на работу с другими сенсорными каналами. Но в практике работы школ формирование учебно-информационных умений с различными источниками учебной информации происходит не целенаправленно и зачастую разрывается по отдельным годам обучения. Такой временной разрыв нам представляется нецелесообразным, рациональнее параллельное формирование комплекса учебно-информационных умений. Одновременное вооружение школьников всем комплексом умений обеспечит осознание каждого из формируемых приемов, позволит более свободно использовать их в процессе обучения физике в дальнейшем.

Не менее остро встает вопрос и о том, на какой ступени обучения целесообразно специально формировать данные учебно-информационные умения. В методической литературе большая часть исследований посвящена вооружению учащихся учебно-познавательными умениями в старших классах. Однако в старших классах приходится ломать стихийно сложившийся и часто нерациональный стиль учебной работы школьника. Поэтому намного целесообразнее формировать учебно-информационные умения в среднем звене, что соответствует первой ступени обучения физике. Учитывая вышесказанное, мы предлагаем комплекс учебно-информационных умений, который позволяет учащимся получать, обрабатывать, использовать и применять учебную информацию из различных источников в соответствии с их ведущей репсистемой (таблица).

Моделью основания построения комплекса учебно-информационных умений выступали следующие составляющие: доминирующей является тип репсистемы и ее влияние на качество усвоенной учебной информации; вспомогательной – понятие «информации» как научной категории, конкретизированной применительно к физическому процессу познания.

Можно проследить определенную взаимосвязь между физическим познанием и модальностью восприятия учебной информации школьниками. Ученик-полимодал, у которого преобладает креативное мышление, легче усваивает учебную информацию, решая самостоятельно проблемные задачи, участвуя в «мозговом штурме» и т. д. Ученик-визуал наиболее эффективно запоминает информацию при чтении учебника, дополнительной литературы, просмотре диафильмов и т. д. Для того чтобы учебная информация быстрее усвоилась, ученику-кинестетику необходимо работать с физическими приборами, действующими моделями и т. д. Рассказ учителя, ответы учащихся, учебные кинофильмы – все это необходимо ученику-аудиалу для успешного усвоения физических знаний и умений.

Однако необходимо помнить, что все вышеперечисленные репсистемы несколько условны. Восприятие мира неоднородно, но целостно. Точнее, у школьника присутствуют все четыре модальности. Но, как правило, он предпочитает получать информацию посредством одной основной, характерной для него модальности. Это не значит, что он не может пользоваться другими репсистемами. Но в этом случае ему потребуется приложить дополнительные усилия, которые замедляют процесс усвоения учебной информации. В процессе обучения это может привести к пробелам в знаниях и умениях, что еще раз подчеркивает важность и значимость соответствия модальности восприятия при обучении физике.

Литература

1. Ливер Бетти Лу. Обучение всего класса / Ливер Бетти Лу. – М. : Новая школа, 1996. – 179 с.
2. Шевандрин, Н.И. Социальная психология в образовании / Н.И. Шевандрин. – М. : Владос, 1995. – 544 с.
3. Цыркун, И.И. Методическая инноватика / И.И. Цыркун. – Минск : БГПУ им. М. Танка, 1996. – 151 с.

С. В. Игнатович

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ТРУДНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ В ВУЗАХ

Одной из основных целей преподавания математических дисциплин в высших учебных заведениях является воспитание умения будущих специалистов различных отраслей народного хозяйства математически исследовать явления окружающего нас мира. Следовательно, необходимо научить студентов составлять математические модели изучаемых объектов, а для этого они должны овладеть языком математики, позволяющим описывать указанные модели.

Для математических исследований действительности важными в силу их широкого использования в описаниях различных процессов является следующие понятия математического анализа: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности, предел функции в точке. При изучении тем, касающихся указанных понятий, как в разделе математического анализа «Введение в анализ», так и в курсе высшей математики, у многих студентов возникают разнообразные затруднения, и при усвоении теоретического материала, и при нахождении пределов на практике. К основным методическим трудностям изучения пределов мы относим недостаточное знание студентами школьного курса математики, а также формальные знания студентов теоретического материала элементов математического анализа. Это подтверждается результатами эксперимента, проводимого нами в УО МГПУ имени И.П. Шамякина среди студентов физико-математического факультета, факультета технологии и ИПФ в рамках исследования проблемы предупреждения математических ошибок студентов.

Анкетирования, тестирования, самостоятельные и контрольные работы, индивидуальные семестровые задания, коллоквиумы, результаты зачетов и экзаменов показали, что в процессе вычисления пределов студентами допускается масса ошибок из-за незнания ключевых понятий, формул и правил. Очень многие ошибки допускаются также из-за неумения студентов самостоятельно применять известные им формулы и правила к вычислениям пределов, из-за неточного использования алгоритмов решения поставленной задачи. Зачастую студенты пренебрегают проверкой наличия в данном пределе той или иной неопределенности, формально используют замены эквивалентных бесконечно малых функций между собой. Также большое число ошибок допускается из-за невнимательности и поспешности выбора метода решения данной задачи (см. таблица, примеры 9, 10, 15). Особенно эти проблемы актуальны для студентов первого курса.

Среди наиболее распространенных ошибок, причинами которых является недостаточное знание школьного курса математики, слабый уровень математических умений и навыков студентов, следует отметить ошибки в тождественных преобразованиях. Наиболее типичными из них являются следующие ошибки:

1.Ошибки, допускаемые при действиях с многочленами:

– ошибки, допускаемые при раскрытии скобок, в случае, если перед скобками стоит знак «минус» (см. таблица, примеры 4, 12);

– ошибки при разложении многочленов на множители (см. таблица, примеры 1, 2);

– ошибки в применении формул сокращенного умножения (см. таблица, примеры 5–8, 13).

2.Ошибки, допускаемые в действиях с алгебраическими дробями:

– ошибки при сокращении дробей, самая распространенная среди которых – это сокращение на слагаемое (см. таблица, пример 3);

– ошибки при сложении алгебраических дробей (см. таблица, примеры 4, 12).

К типичным ошибкам, которые допускаются по причине слабых знаний высшей математики, относятся следующие:

1) неверный выбор метода избавления от неопределенности (см. таблица, примеры 9, 10, 13);

2) неправильное использование замечательных пределов (см. таблица, примеры 11, 12);

3) неграмотное использование замен эквивалентных бесконечно малых функций, т. е. использование этих замен без предварительной проверки того, являются ли функции бесконечно малыми в данном примере и возможно ли вообще осуществление такой замены (см. таблица, пример 14);

4) нарушение алгоритма вычисления пределов (см. таблица, примеры 11, 12).

Таблица – Наиболее часто встречающиеся ошибки студентов
при решении пределов, а также причины этих ошибок

Пример 1	
Найти	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-x^2)(x-1)}{(x^3+x^2)(x-1)}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений разлагать на множители многочлены способом группировки

Продолжение таблицы

Пример 2	
Найти	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)}$
Причина ошибки	Неверное разложение квадратного трехчлена на множители, т. е. неправильно использована формула $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Пример 3	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{5x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{5x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+3}{5-1}$
Причина ошибки	Низкий уровень умений выполнять действия с дробями, в частности, неумение сокращать дроби
Пример 4	
Найти	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{6}{x-3}\right)$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{6}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{6(x+3)}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-6x+18}{(x-3)(x+3)}$
Причина ошибки	1. Низкий уровень умений выполнять арифметические действия с дробями, в частности, неверное сложение дробей. 2. Низкий уровень умений выполнять раскрытие скобок в математических выражениях, если перед скобками стоит знак «минус»
Пример 5	
Найти	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(x-10)(x^2-10x+100)}{x(x^2-20x+100)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Продолжение таблицы

Пример 6	
Найти	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{x(x-3)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 7	
Найти	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 8	
Найти	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{x(x-5)}$
Причина ошибки	Неверное применение формулы сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Пример 9	
Найти	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$
Пример 10	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8-12}-3}{4+5x^4}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8-12}-3}{4+5x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^8-12}-3\right)\left(\sqrt{x^8-12}+3\right)}{\left(4+5x^4\right)\left(\sqrt{x^8-12}+3\right)}$
Причина ошибки	Неверно выбран метод избавления от неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Продолжение таблицы

Пример 11	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^x$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+x-2}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^x$
Причина ошибки	Использование второго замечательного предела без проверки наличия неопределенности вида 1^∞
Пример 12	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{9x+2}\right)^{x^2}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{9x+2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x+2-6x-3}{9x+2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6x-3}{9x+2}\right)^{x^2}$
Причина ошибки	1. Использование второго замечательного предела без предварительной проверки наличия неопределенности вида 1^∞ 2. Низкий уровень умений выполнять действия с дробями
Пример 13	
Найти	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x+4-4}=\lim\limits_{x\to 0}x$
Причина ошибки	1. Возведение числителя и знаменателя в квадрат 2. Неверное применение формулы сокращенного умножения $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$
Пример 14	
Найти	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x-\cos x}{\pi-4x}$
Причина ошибки	1. Отсутствие предварительной проверки того факта, являются ли функции x и $\sin x$ бесконечно малыми при $x\to\frac{\pi}{4}$ 2. Неправильное использование замены эквивалентных бесконечно малых функций

Окончание таблицы

Пример 15	
Найти	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$
Ошибки	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\infty+\infty=\infty$
Причина ошибки	Невнимательность при проверке наличия неопределенности

Накопленный педагогический опыт и результаты вышеуказанного эксперимента показывают, что преодоление многих методических трудностей усвоения математических знаний студентами основывается на систематическом учете преподавателем следующих условий в процессе обучения.

1. Глубокое и прочное усвоение математической теории.

Знание и точное понимание определений, понятий, аксиом, теорем, алгоритмов решений задач и доказательств – непременное условие высокого качества профессиональной подготовки будущих специалистов, так как без этого невозможно полноценное формирование умения студентов математически исследовать те или иные объекты, процессы и явления, подлежащие изучению.

Следует отметить, что, к сожалению, многие студенты заучивают определения как предела числовой последовательности, так и пределов функции на бесконечности и в точке формально. Чаще всего это происходит в силу того, что эти понятия изучаются на первом курсе и большинству студентов в силу их возрастных особенностей, а также, зачастую, недостаточной математической культуры это просто не по силам. Подлинное понимание студентами этих понятий приходит обычно на старших курсах. Ведь даже, как известно, в истории математики формирование понятия предела шло с большим трудом. Пределами пользовались на наглядно-интуитивном уровне за много веков до введения определения, предложенного Огюстом Коши в начале XIX века, и это не является случайностью. Ведь в привычном «ε – δ-определении» предела того, что число b является пределом функции y = f(x) при x → a, уже заложено внутренне противоречие: на статическом языке (на языке неравенств) описана динамическая ситуация (процесс приближения к предельному значению).

2. Наличие четкой методики контроля и учета знаний.

Качество обучения в значительной степени зависит от того, насколько активно студенты участвуют в приобретении знаний, в процессе формирования умений и навыков. Многое в этом плане зависит от методики учета и контроля знаний, используемой преподавателем. Это обусловленно тем, что хорошо поставленный контроль мобилизует студентов на систематическую работу, как самостоятельную, так и под руководством преподавателя, направленную на приобретение знаний, умений и навыков.

3. Тесная связь теории с практикой.

В деле предупреждения многих методических трудностей изучения математики связь полученных теоретических знаний с практикой невозможно переоценить. Так, например, грамотное применение законов арифметических действий, тождественных преобразований, действий с дробями к решению задач позволяет рационализировать вычисления и проверять правильность их выполнения, что в свою очередь дает возможность предупредить появление ошибок. Ведь, как отмечено выше, многие неверные решения студентов обусловлены, например, неумением применить на практике правила раскрытия скобок, разложения многочленов на множители, формул сокращенного умножения и выполнения действий с дробями.

4. Периодическое повторение и закрепление ранее пройденного учебного материала при изучении новых тем.

Любое повторение ранее пройденного учебного материала имеет своей целью, прежде всего, привести в систему имеющиеся знания, приобретенные умения и навыки студентов. При этом оказывается возможным сделать некоторые обобщения, определенные факты рассмотреть как частные случаи других, более общих. Также бывает целесообразно более глубоко подчеркнуть ту или иную идею, либо тот или другой метод решения задачи или доказательства; еще раз указать на узловые вопросы изученной темы, подлежащие запоминанию, и на вопросы, которые можно не запоминать, так как они достаточно просто могут быть получены из узловых.

Например, после изучения пределов полезно повторить со студентами основные виды неопределенностей и методы избавления от них, как теоретически (на практическом занятии), так и практически (в виде обобщающего домашнего задания). После проведения такой работы, как показывают результаты самостоятельных и контрольных работ студентов по данной теме, число неудовлетворительных оценок значительно снижается.

5. Владение математической речью.

Умение логически мыслить, правильно рассуждать находится в тесной связи с умением полно и ясно излагать свои мысли, правильно строить предложения, употреблять только нужные слова в процессе подачи той или иной информации. Это положение обязывает преподавателей всех дисциплин, изучаемых в вузе, обратить самое серьезное внимание на усвоение студентами правильной устной и письменной речи. В решении этой задачи особенно полезны устные ответы в течение семестра на практических, семинарских и лабораторных занятиях, а также на зачетах и экзаменах, написание курсовых работ, выступление с докладами.

6. Аккуратность в записях.

Небрежные записи студентов служат источником многих математических ошибок. Например, часто неряшливо написанные буквы «б», «в» в своих же дальнейших записях студенты воспринимает как 8 или 6; букву «а» – как 0. Довольно распространенными являются ошибки из-за того, что у одного и того же студента некоторые цифры имеют одинаковые начертания: 5 и 6, 1, 4 и 7, 6 и 8, и др. Очень часто не соблюдаются студентами требования того, что черта, разделяющая числитель и знаменатель дроби, должна быть написана против знака равенства или знака арифметического действия. Из-за этого в дальнейшем своем решении студенты автоматически оперируют не теми числителем и знаменателем, что были изначально и это неизбежно ведет к грубейшим ошибкам.

7. Уверенность в знаниях.

Легко «сбить с толку» студента, если у него нет уверенности в своих знаниях и умениях. Зачастую мы сталкиваемся в процессе работы с такой ситуацией, когда кто-либо из студентов с места выразит сомнение в правильности написанного на доске, или же преподаватель задаст вопрос с целью уточнения ответа. При этом отвечающий тут же стирает все свои записи с доски и начинает нагромождать одну ошибку на другую. Это говорит о том, что у студента, работающего у доски нет, должной уверенности в своих силах. Причин этому может быть масса, но самой, пожалуй, неприятной причиной этому может служить неправильное поведение преподавателя во время ответов его студентов.

Встречаются преподаватели, имеющие вредную привычку слишком часто подбадривать своих студентов во время их ответов. Одобряющие слова преподавателя (например, такие как «так-так», «верно», «продолжаете», «хорошо» и др.), превращаются для студента в своего рода сигналы, подтверждающие правильность его ответа для него самого. Если прекращается подача этих «сигналов», то студент тут же начинает паниковать и в результате теряется. Он начинает сомневаться в правильности выбранного метода решения поставленной задачи. Студент теряет уверенность в себе, если, конечно же, до этого она была в какой-то мере сформирована. Это ведет к увеличению числа ошибок в его как устных, так и письменных ответах, к возникновению новых трудностей в приобретении знаний, умений и навыков в дальнейшем.

8. Предупреждение студентов о наиболее часто встречающихся ошибках.

В научных трудах психологов и педагогов достаточно глубоко проанализированы математические ошибки школьников, а также причины этих ошибок, способы и методы их предупреждения (Ж. Адамар [1], А. К. Артемов [2], В. П. Беспалько [3], Ю. М. Колягин [4], В. А. Крутецкий [5], О. Н. Пирютко [6], А. Д. Семушин [7], О. И. Терещенко [8], Г. Штейнгауз [9] и др.). Многие диссертационные исследования также посвящены этой проблеме (Д. С. Ангелов [10], Р. А. Асанов [11], Г. В. Григорян [12], Л. С. Иванова [13], И. М. Кирилецкий [14], А. Т. Муханов [15], М. Н. Чукотаев [16] и др.). Однако при этом исследования проблемы математических ошибок студентов, причин этих ошибок и способов их предупреждения в дальнейшем, на наш взгляд, являются недостаточными.

Деятельность преподавателя, направленная на получение прогноза методических трудностей при изучении математических дисциплин в вузе и предупреждение этих трудностей в дальнейшем, имеет в настоящее время, когда перед всеми отраслями науки и производства нашего государства стоит задача внедрения инновационной экономической модели, огромное значение. Это обусловлено, в первую очередь, тем, что перед национальной системой образования в современных условиях стоит задача подготовить специалистов, способных к точной разработке, своевременному внедрению и качественному применению на практике инновационных идей. Предвидение преподавателем затруднений усвоения студентами учебного материала, в том числе математических ошибок, допускаемых студентами, дает большие возможности в выборе эффективных методов сообщения новых знаний, в разработке приемов и форм подачи информации, способствующих полноценному формированию умений и навыков, необходимых будущим специалистам для их качественной профессиональной деятельности, отвечающей запросам стремительно развивающегося государства.

Литература

1. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изображения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Советское радио, 1970. – 152 с.

2. Артемов, А.К. Об одной причине ошибок школьников по геометрии / А.К. Артемов // Математика в школе. – 1963. – № 6. – С. 23–25.

3. Беспалько, В.П. Основы теории педагогических систем / В.П. Беспалько. – Воронеж : Изд. ВГУ, 1977. – 198 с.

4. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю.М. Колягин. – М. : Просвещение, 1975. – 462 с.

5. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1969. – 432 с.

6. Пирютко, О.Н. Математика: типичные ошибки на централизованном тестировании и экзамене / О.Н. Пирютко. – 2-е изд. – Минск : Аверсэв, 2006. – 192 с.

7. Семушин, А.Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики / А.Д. Семушин. – М. : Просвещение, 1978. – 64 с.

8. Терещенко, О.И. Об ошибках абитуриентов при решении иррациональных уравнений / О.И. Терещенко, С.В. Игнатович, В.И. Богданович // Сборник научных трудов преподавателей физико-математического факультета : сб. науч. тр. / Моз. гос. пед. инст. ; под ред. И.Н. Кралевич. – Мозырь, 2001. – С. 134–142.

9. Штейнгауз, Г. Сто задач / Г. Штейнгауз ; пер. с пол. Г.Ф. Боярской, Б.В. Боярского. – 4-е изд. – М. : Наука, 1986. – 144 с.

10. Ангелов, Д.С. Анализ ошибок по алгебре в знаниях учащихся и пути их устранения : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Д.С. Ангелов. – М., 1980. – 15 с.

11. Асанов, Р.А. Работа над ошибками в курсе математики средней школы как путь повышения качества знаний учащихся : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Р.А. Асанов. – Ташкент, 1975. – 23 с.

12. Григорян, Г.В. Исследование причин возникновения и методика предупреждения ошибок учащихся (на геометрическом материале 4–5 классов) : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Г.В. Григорян. – Баку, 1981. – 20 с.

13. Иванова, Л.С. Методика предупреждения типичных математических ошибок учащихся начальных классов : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Л.С. Иванова. – Киев, 1987. – 172 л.

14. Кирилецкий, И.М. Анализ и предупреждение типичных ошибок учащихся при изучении алгебры и начал анализа : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / И.М. Кирилецкий ; НИИ педагогики УССР. – Киев, 1986. – 19 с.

15. Муханов, А.Т. Пути предупреждения устойчивых ошибок в математической подготовке выпускников средней школы : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / А.Т. Муханов. – Ташкент, 1975. – 27 с.

16. Чукотаев, М. Н. Устойчивые ошибки учащихся по алгебре и началам анализа и способы их устранения : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / М.Н. Чукотаев ; Мос. пед. гос. ун-т им. В.И. Ленина – М., 1992. – 15 с.

И. Н. Ковальчук, О. И. Андреенко

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК УСЛОВИЕ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

Сегодня каждому учителю очевидна целесообразность применения информационных технологий при обучении на всех ступенях среднего образования. Богатейшие возможности представления информации на компьютере позволяют изменять и неограниченно обогащать содержание образования, повышать интенсивность урока, индивидуализировать процесс обучения. Использование информационных технологий в образовательном процессе направлено на повышение эффективности и качества обучения учащихся.

Информационные технологии можно использовать на всех типах уроков математики:

- изучения новых знаний и формирования новых умений;
- практического применения знаний;
- обобщения и систематизации изученного;
- контроля и коррекции знаний, умений;
- комбинированные уроки.

Дидактические достоинства уроков с использованием информационных технологий:

– обеспечение более наглядной, эффективной и динамичной подачи материала;

– сокращение времени обучения и обеспечение хорошего темпа урока;

– достижение оптимального темпа работы ученика, так как каждый ученик выполняет индивидуальное задание, работая в своем темпе;

– повышение мотивации учебной деятельности, поддержка интереса у ребенка, его активности на протяжении всего урока;

– наличие больших возможностей для участия в коллективной, групповой и индивидуальной работе;

– возможности для уровневой дифференциации обучения.

Посредством таких уроков активизируются психические процессы учащихся: восприятие, внимание, память, мышление; гораздо активнее и быстрее происходит возбуждение познавательного интереса. Человек по своей природе больше доверяет глазам, и более 80% информации воспринимается и запоминается им через зрительный анализатор.

Достоинства уроков с использованием информационных технологий для учителей математики:

– обеспечение многократного использования педагогами разработанных электронных дидактических материалов;

– возможность обмена материалами друг с другом;

– использование различных стилей обучения;

– экономия времени при проверке работ;

– стимулирование профессионального роста педагогов, побуждение их на поиск новых подходов к обучению.

Использование информационных технологий возможно на любом этапе изучения темы и на любом этапе урока.

На этапе усвоения новых знаний информационные технологии могут быть использованы:

- для исторического обзора открытия того или иного математического факта (видеофильм, презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, электронный учебник и др.);

- при изложении теоретического блока материала (видеофильм, презентации в среде Power Point или Macromedia Flash);
- для демонстрации наглядных схем и графиков функций и уравнений, алгоритмов решения уравнений и неравенств, изображений пространственных фигур, для демонстрации образцов решения ключевых задач (презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, MathCad, ABCPascal и др.);
- для построения графиков функций и уравнений, сечений многогранников (в среде Power Point или Macromedia Flash, MathCad, Microsoft Exel, 3DMax и др);
- для демонстрации применения математических фактов в различных сферах деятельности (в среде Power Point или Macromedia Flash, Microsoft Exel, 3DMax и др).

Использование информационных технологий при объяснении нового материала позволяет рассматривать вопросы математической теории в движении, способствует увеличению наглядности и выразительности излагаемого материала.

Например, при объяснении алгоритма решения задач на движение можно воспользоваться традиционным изложением: схематически нарисовать движущиеся объекты на бумаге (навстречу друг другу, в противоположных направлениях, вдогонку, с отставанием). Но в этих рисунках не будет хватать одного, но самого главного – движения. Времени на создание «бумажного» наглядного материала рисунка уходит много, а «продукт» получается одноразовый. При использовании информационных технологий эффект более впечатляющий и результативный.

Разработанные нами с помощью Microsoft PowerPoint мультимедийные презентации по теме «Дроби» («История дробей», «Понятие дроби», «Основное свойство дроби», «Сокращение дроби», «Сравнение дробей», «Сложение и вычитание обыкновенных дробей») могут быть использованы на уроках математики по усвоению новых знаний в 5 классе общеобразовательной школы. За счет применения в презентациях анимации учащимся наглядно показывается основное свойство дроби, сравнение дробей и т. д. Процесс организации обучения с использованием презентаций на этом этапе позволяет создать положительное эмоциональное отношение к учебной информации и повысить степень наглядности. Применение нового для учащихся варианта подачи учебного материала, безусловно, способствует развитию их интереса к математике.

Визуальное представление определений, формул, теорем и их доказательств, качественных чертежей к геометрическим задачам, предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения научными фактами обеспечивают эффективное усвоение учащимися новых знаний и умений. Например, в 9 классе можно провести урок математики с использованием презентации по темам «Функция $y = \sqrt{x}$», «Центральные и вписанные углы. Радиан». Построение графика функции $y = \sqrt{x}$, представление свойств функции, наличие решений примеров на построение графиков функций (решить графически уравнение, систему уравнений, найти наибольшее и наименьшее значение графика функции на отрезке) позволяют существенно сэкономить время и получить ощутимый эффект от такой подачи материала. Разработанная презентация по «Центральные и вписанные углы. Радиан» позволяет наглядно представить свойства центральных и вписанных углов, теорему «Свойство пересекающихся хорд» и её доказательство. За счет применения в презентации анимации учащимся становятся более понятны этапы геометрических построений, то есть увеличивается скорость подачи качественного материала в рамках одного урока.

При организации контроля знаний, умений и навыков учащихся можно использовать тестирование с помощью компьютера. Тестовый контроль с помощью компьютера предполагает возможность быстрее и объективнее, чем при традиционном способе, выявить знание и незнание обучающихся. Этот способ организации учебного процесса удобен и прост для оценивания в современной системе обработке информации.

Возможны две формы организации тестов, которые условно можно назвать «выбери ответ из предлагаемых вариантов» и «напиши правильный ответ».

Организация теста по принципу «выбери ответ из предлагаемых вариантов» обеспечивает быстроту прохождения теста, так как не требует от учащегося особых навыков работы на компьютере. Для выдачи ответа достаточно нажать клавишу правильного ответа, выбрав его среди предложенных.

Организация теста по принципу «напиши правильный ответ» предполагает хорошую начальную подготовку учащегося как пользователя персонального компьютера. Выдача ответа осуществляется его набором и требует хорошего знания клавиатуры, в том числе «переключения на английский язык» и умения набирать формулы с помощью специальных программ.

Такой вид контроля позволяет за довольно короткое время урока проверить уровень знаний, умений и навыков поочередно у группы учащихся класса, когда остальные ученики выполняют другой вид работы. На следующих уроках тестирование проходят другие учащиеся, так что к заключительному уроку по теме пройти тестирование успевают все.

На этапе проверки понимания и закрепления знаний информационные технологии могут быть использованы:

1) при организации математических диктантов (презентации в среде Power Point, электронный учебник);

2) при осуществлении тестирования учащихся в индивидуальном режиме (тестирующая программа выполненная в среде Power Point, электронный учебник);

3) при осуществлении тестирования учащихся в групповом режиме (презентации, электронный учебник);

4) обучающие программы.

При организации итогового контроля знаний, умений и навыков учащихся информационные технологии могут быть использованы:

1) для тестирования в индивидуальном режиме (тестирующая программа);

2) для контроля в групповом режиме (презентация в среде Power Point).

При организации итогового контроля знаний, умений и навыков учащихся информационные технологии могут быть использованы:

- для тестирования в индивидуальном режиме (тестирующая программа, «тренажеры», презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, при использовании тестовых оболочек «Краб», «Тестер» и др.);

- для контроля в групповом режиме (тестирующая программа, «тренажеры», презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, при использовании тестовых оболочек «Краб», «Тестер» и др.).

На этапе обобщения и систематизации знаний, умений и навыков учащихся информационные технологии могут быть использованы:

- для демонстрации обобщенных схем и алгоритмов решения уравнений и неравенств, графиков функций и уравнений (презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, ABCPascal, Microsoft Exel и др.);

- для организации проектной деятельности учащихся (презентации в среде Power Point или Macromedia Flash, ABCPascal, Microsoft Exel и др.).

С помощью информационных технологий можно разнообразить домашнее задание. Например: составить презентацию по решению тематических задач по геометрии или по алгебре. Ученику необходимо не только решить задачу, но и составить презентацию, а это способствует более глубокому погружению в материал. Подобные работы способствуют воспитанию у школьников чувства ответственности, взаимопомощи, самоорганизации.

Таким образом, использование информационных технологий обеспечивает информационную и эмоциональную насыщенность обучения математике, способствует формированию у школьников умений работать с различной информацией, развивает логическое мышление, повышает интерес учащихся к предмету, обеспечивает связь учебного материала с окружающей жизнью.

Литература

1. Желдаков, М.И. Внедрение информационных технологий в учебный процесс / М.И. Желдаков. – Минск : Новое знание, 2003. – 152 с.
2. Мануйлов, В.Г. Мультимедийные компоненты презентаций Power Point / В.Г. Мануйлов // Информатика и образование. – 2005. – № 5. – 128 с.
3. Никифорова, М.А. Преподавание математики и новые информационные технологии // Математика в школе. – 2005. – № 6.
4. Никифорова, М.А. Преподавание математики и новые информационные технологии // Математика в школе. – 2005. – № 7.
5. Полат, Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат. – М. : Омега-Л, 2004. – 215 с.
6. Советов, Б.Я. Информационные технологии в образовании и обществе XXI века / Б.Я. Советов // Информатика и информационные технологии в образовании. – 2004. – № 5. – 95 с.
7. Якушина, Л.С. Использование экранно-звуковых средств на уроках математики / Л.С. Якушина. – Мн.: Новое знание, 2005. – 204 с.

Ж. В. Колядко, В. В. Шепелевич

ОПТИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ

В последнее десятилетие возросло потенциальное применение *оптических сингулярных пучков* (*вихрей*) для решения ряда задач современной технологии, например, оптической обработки информации.

Основным свойством оптических вихрей является наличие на волновом фронте фазовых сингулярностей – точек, где фаза волны не определена и амплитуда волны обращается в нуль [1]. Волновой фронт вихревых световых пучков выглядит как семейство непересекающихся поверхностей и имеет винтовую структуру. Расстояние между соседними поверхностями равно длине волны. При математическом описании такой особенности принято говорить о наличии сингулярности, что и стало причиной появления термина «сингулярная оптика» [2].

Отличительная черта винтовой дислокации состоит в том, что при обходе вокруг нее по поверхности волнового фронта фаза изменяется ровно на 2π. В зависимости от направления закрутки, винтовые дислокации подразделяются на левые (отрицательные) и правые (положительные). В связи с тем, что направление распространения световой энергии задаётся вектором, перпендикулярным в каждой точке поверхности волнового фронта, в окрестности винтовой дислокации происходит завихрение энергетического потока [2].

Оптические вихри имеют много аналогий в природе: ураганы, торнадо, водовороты. Размер ядра вихря вычисляется и может быть использован как индикатор силы данной системы. Действительно, подступающий ураган или тайфун с малым ядром являются предвестниками плохой погоды [3].

В работе Дж.Ф. Ная и М. Берри [4] впервые были описаны фазовые сингулярности. Следует отметить, что ещё более ранние научные сведения о фазовых сингулярностях были получены в 1830-х Веведлем [4]. Он изучал приливы океана и волны, проходящие фазовые сингулярности и поворачивающие течение вокруг сингулярной точки, назвал вихрями.

Привлекает внимание динамика распространения оптических вихрей как в линейных, так и в нелинейных средах (самодефокусирующаяся керровская среда [5], фоторефрактивная среда [6]). В дефокусирующей среде такой пучок может распространяться как вихревой солитон благодаря балансу между дифракцией, которая расширяет профиль тёмного ядра, и рефракцией, которая сужает его.

Вихревые пучки формируются при прохождении света через спиральные оптические элементы (спиральная фазовая пластинка [7]), пространственные световые модуляторы, специальным образом изготовленные голограммы, также возможно возбуждение вихревых полей непосредственно в лазерах.

Тёмное ядро оптического вихря может быть использовано в качестве фильтра для ослабления пучка света. Оптические вихри создаются при прохождении пучка света через дифракционные оптические элементы, которые представляют собой пластинку из стекла со спиральным узором. Оптическая вихревая коронография может быть построена путем размещения в области спиральности дифракционного оптического элемента вблизи плоскости изображения телескопа [8]. Внесолнечные планеты были обнаружены совсем недавно благодаря созданию оптических вихревых коронографов.

Оптические вихри, используемые в оптических пинцетах, могут манипулировать микронными частицами. Такие частицы могут вращаться по орбитам вокруг оси светового пучка. Если пучок света взаимодействует с частицей, спин заставляет частицу вращаться вокруг её оси, но если с частицей взаимодействует вихревой пучок, орбитальный момент вихря заставляет частицу вращаться вокруг центра вихря (который находится в центра пучка) [9].

Одним из решений волнового уравнения является цилиндрическое решение, которое определяет вихрь и характеризуется фазовым множителем $\exp(im\theta)$, где θ – азимутальная координата и m – целое число, называемое топологическим зарядом [10].

Распространение вихревого светового пучка вдоль z направления можно описать в параксиальном приближении, используя скалярное волновое уравнение. Используя цилиндрические координаты, поле вихря можно представить в виде

$$E(r,\theta,z) = E_0 G_{bg}(r,z)\exp[i\Phi(r,z)]A(r,z)\exp(im\theta)\exp(-ikz) =$$
$$= E_0 u(r,\theta,z)\exp(-ikz), \quad (1)$$

где E_0 – характерная амплитуда; $\Phi(r,z)$ – изменение фазы при распространении пучка; $A(r,z)$ – профиль амплитуды ядра вихря; $G_{bg}(r,z)$ – амплитуда фонового пучка; $u(r,\theta,z)$ – нормализованная медленно изменяющаяся комплексная функция, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число и λ – длина волны.

Предполагается, что фоновым полем является профиль гауссова пучка:

$$G_{bg}(r,z) = \exp[-\frac{r^2}{w^2(z)}],$$

где $w(z)$ – характерный размер пучка.

Рассмотрим две различные функции ядра вихря: *tanh vortex*

$$A(r,z=0) = \tanh(\frac{r}{w_v}), \quad (2)$$

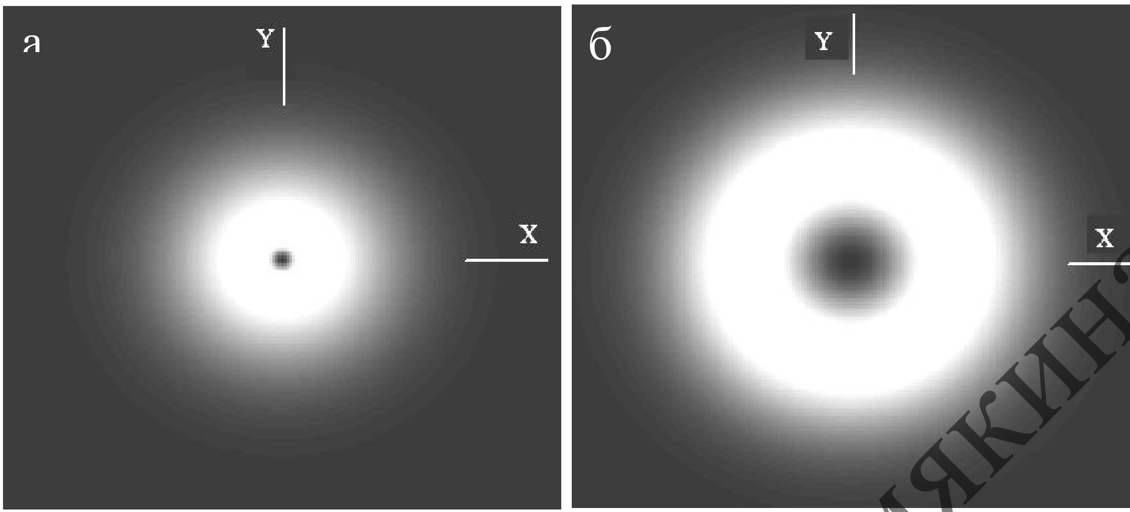
и *r vortex*:

$$A(r,z=0) = (\frac{r}{w_r})^m, \quad (3)$$

где w_v – размер ядра *tanh vortex*, w_r – размер ядра *r vortex*.

На рисунках 1,а и 1,б показаны профили интенсивностей для *tanh vortex* и *r vortex* соответственно, построенные, используя одинаковый фоновый гауссовый пучок. На рисунке 2 показаны профили интенсивности *tanh vortex* (кривая 1) и *r vortex* (кривая 2) ($I_{отн.} = I/I_{max}$, $x_{отн.} = x/w_0, w_0$ –характерный размер фонового Гауссова пучка). Как видно, при одних и тех же условиях относительная интенсивность *tanh vortex* значительно выше, чем *r vortex.*

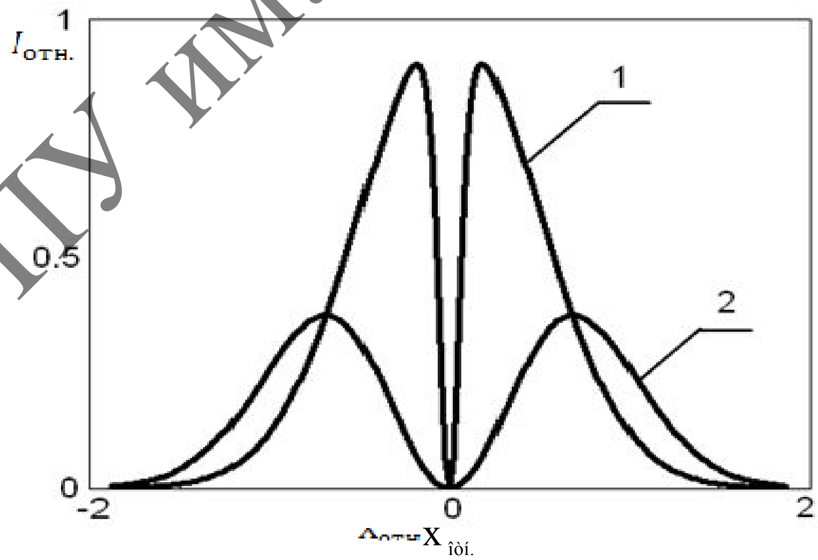
Следует отметить, что для формирования оптических вихревых солитонов обычно используется *tanh vortex* [10]. Ширина ядра *r vortex* зависит от ширины фонового пучка в отличие от ширины ядра *tanh vortex,* которая является независимым параметром [11].



а – *tanh vortex;* б – *r vortex*

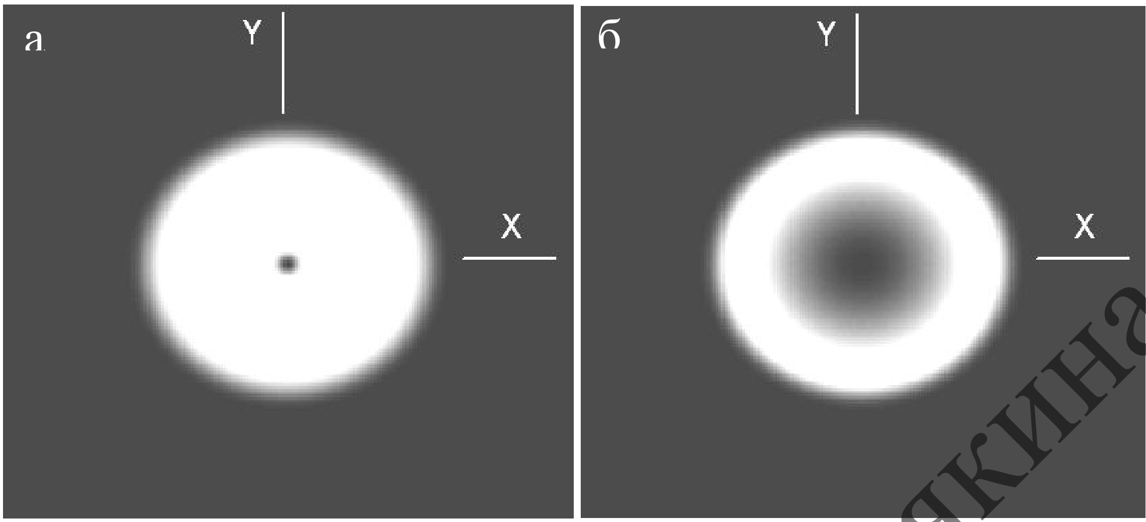
Рисунок 1 – Профили интенсивностей вихревого пучка, наложенного на гауссов фоновый пучок (вид сверху)

Для сравнения покажем вихревые пучки, вложенные в супергауссов пучок 4-го порядка. На рисунке 3,а и 3,б показаны профили интенсивностей для *tanh vortex* и *r vortex* соответственно, построенные, используя одинаковый фоновый супергауссов пучок.



1 – *tanh vortex;* 2 – *r vortex*

Рисунок 2 – Распределение относительной интенсивности вихревого светового пучка



а – *tanh vortex;* б – *r vortex*

Рисунок 3 – Профили интенсивностей вихревого пучка, наложенного на супергауссовый фоновый пучок

Таким образом, возросший интерес к оптическим вихрям связан с их необычными особенностями и потенциальным применением в оптических приборах. В настоящее время накопился большой объём теоретического и экспериментального материала в ходе исследований оптических вихрей, что даёт возможность их практического использования и дальнейшего изучения.

Литература

1. Nye, J.F. Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // Proc. R. Soc. London Ser. – 1974. – A 336. – P. 165–190.

2. Короленко, П.В. Оптические вихри / П.В. Короленко // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 6. – С. 94–99.

3. Trillo, S. Spatial solitons / S. Trillo, W. Torruellas. – Berlin : Springer Series in Optical Scienas Vol. 82, 2001. – 454 p.

4. Dezyatnikov, A.S. Optical vortices and Vortex Solitons / A.S. Dezyatnikov, L. Torner, Y.S. Kivshar // Progres in Optics. – 2005. – Vol. 47. – P. 291–391.

5. Multiple-charged optical vortex solitons in bulk Kerr media / I. Velchev [atc.] // Optics Communications. – 1997. – № 140. – P. 77–82.

6. Mamaev, A.V. Decay of high order optical vortices in anisotropic nonlinear optical media / A.V. Mamaev, M. Saffman, A.A. Zozulya // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78, № 11. – P. 2108–2111.

7. Ковалёв, А.А. Непараксиальная векторная дифракция Гауссового пучка на спиральной фазовой пластинке / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 37, № 4. – С. 19–22.

8. Foo, G. Optical vortex coronagraph / G. Foo, D.M. Palacios, A. Swartzlander, Jr. // Opt. Lett. – 2005. – Vol. 30, № 24. – P. 3308–3310.

9. Gahagan, K.T. Optical vortex trapping of particles / K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Jr. // Opt. Lett. – 1996. – Vol. 21, № 11. – P. 827–829.

10. Rozas, D. Propagation dynamics of optical vortices / D. Rozas, C.T. Law, G.A. Swartzlander, Jr. // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 11. – P. 3054–3065.

11. Kim, G. Propagation dynamics of optical vortices with anisotropic phase profiles / G. Kim, H.J. Lee, J. Kim, H. Suk // J. Opt. Soc. Am. B. – 2003. – Vol. 20, № 2. – P. 351–359.

Ф. Д. Коршков

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Приведем несколько цитат из книги Д. Пойа «Математическое открытие» [1]:

1. «Если хотите научиться решать задачи, то решайте их».
2. «Одна самостоятельно решенная задача дает больше двадцати других, решение которых вы узнали от друзей или прочитали в книге».
3. «Решение, найденное в результате собственных усилий, может превратиться в метод, которому с успехом можно следовать при решении других задач».
4. «То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы можете снова воспользоваться, когда в этом возникнет необходимость» (Г. Лихтенберг, «Афоризмы» [2]).
5. «Эта книга не научит вас решать все задачи. Нужно найти средства для развития способностей, возбудить любопытство».
6. «Не старайтесь удовлетворить свое тщеславие, обучая их слишком многому. Возбудите только любопытство. Откройте своим слушателям глаза, но не перегружайте их мозг. Достаточно зародить в них искру» (А. Франс).
7. «Однако решение нестандартных математических задач также, бесспорно относится к творческой деятельности».

Многие математики признавали, что в школьные годы самостоятельно решенная нестандартная, интересная задача возбудила у них любопытство и желание заниматься математикой.

Колмогоров решал задачу: «Имеется пуговица с четырьмя отверстиями. Сколькими способами можно пришить эту пуговицу?»

Пуассон решал задачу: «Имеется 3 бака емкостью 10, 7 и 5 литров. Как жидкость из бака в 10 литров разделить по 5 литров, используя для переливания все баки?»

Многие математики решали подробно нестандартные школьные задачи. Вот некоторые из этих задач (разной трудности и для разного школьного возраста):

1. У фермера имеются куры и кролики. Всего у этих кур и кроликов 50 голов и 140 ног. Сколько кур и кроликов имеет фермер?

2. Имеется 9 монет. Одна из них фальшивая и легче других. Найти фальшивую монету путем двух взвешиваний на чашечных весах без гирь.

3. 12 быков съели траву на 10/3 акрах пастбища за 4 недели, а 21 бык съел траву на 10 акрах такого же пастбища за 9 недель; требуется узнать, сколько быков съедят траву на 24 акрах за 12 недель? (Ньютон).

4. Даны площадь и периметр прямоугольного треугольника. Найти гипотенузу (Ньютон).

5. Мул и осёл несли груз. Осёл сказал: «Мне нужно 100 единиц твоей ноши, чтобы моя ноша стала вдвое тяжелей твоей». Мул ответил: «Мне нужно 100 единиц твоей ноши, чтобы моя ноша стала втрое больше твоей» (Эйлер).

6. Встретились два друга. Первый спрашивает: сколько у тебя детей и сколько лет каждому? Второй отвечает: детей трое, произведение лет 36, а сумма лет, сколько окон в доме напротив. Первый говорит, что не знает, сколько лет каждому. Второй говорит, что старший сын у него рыжий. Первый сказал, сколько лет каждому.

Ученики любят решать такие задачи. Если учитель предложит ученикам нестандартную задачу и хотя бы один ученик из десяти решит такую задачу, то цель учителя будет достигнута.

Декарт (1596–1650) и Лейбниц (1646–1716) размышляли об универсальном методе, пригодном для решения любых задач. Декарт даже создал алгебраический метод для решения геометрических задач: геометрическая задача сводится к алгебраической задаче. Алгебраическая задача сводится к решению алгебраического уравнения.

Но не существует метода для решения любых задач. Методов решения бесконечно много (школьник может убедиться в этом, даже решая системы алгебраических уравнений). Поэтому всех методов не изучить и только самостоятельно решенные задачи позволят найти метод решения новой нестандартной задачи.

Декарт пишет: «Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач» [3, 274]. «Если я открыл некоторые новые истины в науках, то я могу утверждать, что все они либо являются прямыми следствиями пяти или шести главных задач, которые мне удалось решить, либо зависят от них» [3, 309].

Умение применить известный метод к новой задаче – это уже искусство (например, школьник может знать теорему синусов, но не видеть, что эту теорему нужно применить для решения данной конкретной задачи).

Если задача решена, то нужно её обдумать, попытаться упростить решение, найти новый метод решения, изменить некоторые данные в условии, обобщить задачу.

Отсюда вытекают требования к подготовке учителя для работы в школе. Учитель должен не только научить решать стандартные задачи (для большинства школьников этого достаточно), но пробудить у некоторых школьников интерес к решению нестандартных, интересных задач (в любом классе есть такие школьники). Учитель должен с интересом решать нестандартные задачи.

Выводы:

1. Только полностью самостоятельно решенная задача может вызвать у школьника восторг и радость открытия.

2. Учитель должен иметь набор нестандартных задач (разной сложности для разных классов) и давать ученикам для самостоятельного решения.

Литература

1. Пойа, Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – М. : Наука, 1976. – 448 с.
2. Лихтенберг, Г. Афоризмы / Г. Лихтенберг. – М. : Наука, 1965. – 344 с.
3. Декарт, Р. Рассуждение о методе / Р. Декарт // Избранные произведения / Р. Декарт. – М. : Госполитиздат, 1950. – 712 с.

И. Н. Кралевич, В. В. Пакштайте

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Непреходящей дидактической задачей, стоящей перед обучением математике в общеобразовательной школе, является активизация познавательной деятельности учащихся, развитие их самостоятельности, формирование творческого отношения к овладению учебным материалом. Известно, что формирование активности школьника в учебной деятельности одновременно служит важнейшим средством формирования его личности. Подлинная активность ученика предполагает включение его самого в процесс приобретения новых знаний, его личное участие в их поиске и открытии. Необходимым условием активности школьника в процессе обучения является положительное отношение его к учебной деятельности. Хотя урочные занятия проводятся коллективно, учебно-познавательная деятельность и усвоение знаний учащимися несут на себе отпечаток индивидуальных особенностей их мышления, памяти, сообразительности, способностей. Всё это приводит к необходимости реализации дидактического принципа индивидуального подхода к учащимся при коллективных формах обучения. Одним из способов осуществления принципа индивидуального подхода к учащимся является дифференциация. Выделяют следующие цели дифференцированного обучения:

1) с психолого-педагогической точки зрения – индивидуализация обучения, основанная на создании оптимальных условий для выявления задатков, развития интересов и способностей каждого школьника;
2) с социологической точки зрения – целенаправленное воздействие на формирование творческого, интеллектуального, профессионального потенциала общества в целях рационального использования возможностей каждого члена общества в его взаимоотношениях с социумом;
3) с дидактической точки зрения – решение назревших проблем школы путем создания новой методической системы дифференцированного обучения учащихся, основанной на принципиально новой мотивационной основе.

Идеи дифференцированного обучения исследовали в общедидактическом аспекте Р. Б. Вендровская, Б. П. Есипов, М. С. Клевченя, Н. Г. Огурцов, А. В. Перевозный, И. Э. Унт, И. М. Чередов, Н. М. Шахмаев и др., в методико-математическом направлении – Д. К. Алейникова, К. О. Ананченко, А. Б. Василевский, В. А. Гусев, Ю. В. Гуревич, С. А. Гуцанович, Г. Ф. Дорофеев, Ю. М. Колягин, К. А. Рыбников, Е. Е. Семенов и др. В публикациях рассматриваются два основных вида дифференциации: уровневая (внутренняя) и профильная (внешняя). Уровневая дифференциация предполагает такую организацию обучения, при которой, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники могут усваивать материал на различных уровнях, но не ниже уровня обязательных требований. Профильная дифференциация предполагает обучение разных групп школьников по программам, отличающимся глубиной изложения материала, объемом сведений и даже содержанием. В каждом из профилей основное внимание уделяется группе профилирующих предметов, на которые отводится существенная доля учебной нагрузки.

Математика объективно является одним из самых сложных предметов в школе. В современных условиях, когда объём необходимых знаний для человека резко и быстро возрастает, уже невозможно делать ставку на усвоение определённой суммы фактов. Важно прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке информации, отбирать для себя самое необходимое, самое важное. Процесс получения знаний должен быть заинтересованным. Дифференциация обучения является составной частью и необходимым условием этого процесса. В соответствии с концепцией учебного предмета «Математика», утвержденной приказом № 675 Министерства образования РБ от 29.05.2009 года, внешняя дифференциация при обучении учащихся математике реализуется посредством проведения факультативных занятий, увеличения количества учебных часов на изучение математики в VII–IX классах гимназий (гимназий-колледжей), создания классов физико-математического направления на III ступени общего среднего образования в гимназиях (гимназиях-колледжах) и лицеях. Внутренняя дифференциация реализуется посредством использования соответствующих технологий, вариативности уровня изложения программного материала, сложности математических задач.

Многие исследователи отмечают, что оба вида дифференциации взаимно дополняют друг друга на всех ступенях школьного математического образования. Отмечается, что дифференцированное обучение включает в себя: разноуровневое содержание; приемы, дифференцированные по разным основаниям; формы учебной работы, способствующие оптимальному взаимодействию учащихся и учителя; средства обучения, облегчающие осуществление учебного процесса.

В основу дифференциации положена теория Л. С. Выготского о зоне ближайшего развития. В процессе исследования мы оперировали следующими наиболее существенными понятиями теории дифференцированного обучения:

<u>индивидуализация обучения</u> – это учёт в процессе обучения индивидуальных особенностей учащихся во всех его формах и методах;

<u>дифференцированный подход в учебном процессе</u> – это особый подход учителя к различным группам учеников, заключающийся в организации различной по содержанию, объёму, сложности, методам и приёмам учебной работы;

<u>дифференцированное обучение</u> – это процесс обучения, который предполагает изучение индивидуальных особенностей учащихся, их классификацию по типологическим группам, а также организацию работы этих групп. Дифференцированный подход является конкретным воплощением идей дифференцированного обучения.

Индивидуализация и дифференциация непосредственно связаны. При реализации учёта индивидуальных различий учащихся дифференциация обучения играет роль средства. Бесспорно, что в реальном процессе обучения знания усваиваются индивидуально каждым учеником. Однако процесс усвоения знаний может быть одинаков, совпадать у детей данной группы, класса. Можно выявить общее в индивидуальном развитии детей в процессе обучения. Общее может характеризовать уровень развития детей, сходство в мотивах деятельности и поведении. Обычно таким общим уровнем обладают дети одинакового возраста. Поэтому знание общих психологических особенностей детей данной группы, данного возраста обеспечивает в обучении возможность понимания учебного материала каждым учеником.

Основными способами изучения индивидуальных особенностей школьников являются планомерные систематические наблюдения за учеником, индивидуальные и групповые беседы на намеченную тему. Главное заключается в том, чтобы всесторонне изучить ребёнка и опираться на его индивидуальные качества.

В дидактике и предметных методиках предлагается более двадцати критериев деления учащихся на группы. Одни учёные предлагают объединить учащихся по успеваемости, устойчивости интереса и уровню познавательной самостоятельности; другие исходят из устойчивости восприятия, уровня развития памяти, типа мышления, уровня выполнения мыслительных операций, темперамента; третьи называют следующие признаки: успеваемость по предмету, темп работы, информированность по предмету, способности.

Дифференциация обучения классифицируется по различным признакам: по возрастному составу (школьные классы, возрастные параллели, разновозрастные группы); по полу (мужские, женские, смешанные классы); по области интересов (гуманитарные, физико-математические, биолого-химические и др. группы, направления, отделения, школы); по уровню умственного развития (способные, одаренные); по уровню достижений (отличники, успевающие, неуспевающие); по личностно-психологическим типам (типу мышления, темпераменту и др.).

В любой системе обучения в той или иной мере присутствует дифференцированный подход и осуществляется более или менее разветвленная дифференциация. Смысл дифференцированного обучения состоит в том, чтобы, зная индивидуальные особенности каждого ученика (уровень подготовки, развития, особенность мышления, познавательный интерес к предмету), определить для него наиболее целесообразный и эффективный вид деятельности, формы работы и типы заданий на уроке.

При внедрении дифференцированного обучения на уроках необходимо создать условия его осуществления. К ним относятся:

- глубокое изучение индивидуальных и типологических особенностей учащихся и групп учащихся;
- умение анализировать учебный материал, выделять возможные трудности, с которыми встретятся разные группы учащихся;
- составление технологической карты, включая вопросы разным группам и отдельным учащимся;
- умение «спрограммировать» обучение разных групп учащихся (в идеале – каждого ученика);
- организация учебного процесса, предоставляющая ученику возможность выбирать его содержание, вид, форму при выполнении заданий, решении задач;

- осуществление оперативной обратной связи, создание такой атмосферы на уроке, которая расковывает учащихся;
- создание мотивации успешности учения;
- активное стимулирование ученика к образовательной деятельности, содержание и формы которой должны обеспечивать ученику возможность самообразования, саморазвития, самовыражения в ходе овладения знаниями.

Обеспечение повышенного уровня изучения математики (в гимназиях (гимназиях-колледжах), лицеях, на факультативных занятиях) требует более высокого профессионального уровня учителя. Очевидно, что реформирование национальной системы среднего образования Республики Беларусь требует внести соответствующие изменения и дополнения в подготовку студентов математических факультетов педагогических вузов. Выпускникам этих факультетов предстоит работать как в классах базового уровня математического образования, так и в лицеях и гимназиях.

На каждом уровне и в каждом звене системы дифференцированного образования необходим выбор форм, методов и средств обучения, адекватных его целям и содержанию. Формы учебной работы в условиях дифференциации должны создавать возможности для оптимального взаимодействия учителя и учащихся в целях полноценного усвоения школьниками содержания образования. Выпускник педагогического вуза должен быть готов к решению задач дифференциации школьного образования.

Подготовка специалиста для общеобразовательной школы должна быть достаточной для того, чтобы он мог вести преподавание в условиях обновляющегося образования. Дифференциация образования предусматривает существенное преобразование учебного процесса за счёт использования более совершенных технологий преподавания, обеспечивающих наиболее полное удовлетворение познавательных потребностей школьников, всесторонний учёт их интересов, склонностей, способностей. Для осуществления дифференциации обучения учащихся учителю математики необходимо уметь изучать индивидуальные особенности школьников и на этой основе разрабатывать соответствующее содержание образования, методы и формы обучения.

Нами выделены основные специальные умения учителя математики, необходимые для проведения дифференцированного обучения школьников, к которым отнесены следующие:

- умение осуществлять диагностику и определять уровни усвоения материала учащимися;
- оценивать сложность учебного материала;
- излагать теоретический материал на различных уровнях строгости;

- разрабатывать и использовать в учебном процессе разноуровневые дидактические материалы;
- решать задачи повышенного, углубленного и олимпиадного уровней.

Для формирования указанных выше умений выделены следующие основные условия:

- ориентация процесса обучения специальным математическим дисциплинам на будущую работу в школах, гимназиях или лицеях;
- создание равных возможностей для обучаемых в процессе изучения предмета;
- осуществление индивидуального и дифференцированного подходов к студентам;
- сочетание различных форм аудиторной и внеаудиторной работы;
- включение студентов в разнообразные формы самостоятельной работы.

В процессе исследования определены основные направления работы по подготовке студентов к дифференцированному обучению школьников:

1. Выделение лектором в курсе специальных дисциплин материала, либо непосредственно входящего в школьные учебники, либо тесно с ним связанного.
2. Рациональный подбор задач при проведении практических занятий по специальным дисциплинам (использование задач школьных учебников при закреплении теоретического материала, решение некоторых школьных задач методами высшей математики).
3. Разработка системы разноуровневых творческих заданий вычислительного, графического характера по материалам школьных учебников, сборников дидактических материалов, сборников экзаменационных материалов за курс базовой и средней школы, а также заданий различного уровня сложности по всем разделам вузовского курса математики.
4. Изучение в курсах педагогики и методики преподавания математики различных моделей дифференцированного обучения, реализуемых в школах Республики Беларусь, опыта работы учителей математики в этом направлении, показ методических особенностей изложения отдельных тем на повышенном уровне.
5. Отражение вопросов дифференцированного обучения школьников в курсовых и дипломных работах, участие студентов в научно-исследовательской работе, проводимой на соответствующих кафедрах.
6. Ознакомление будущих учителей с практической реализацией задач дифференциации обучения математике в период педагогических практик в общеобразовательных школах.

Г. В. Кулак, Т. В. Николаенко, А. Е. Анисимова

ВЛИЯНИЕ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В работах [1, 2] экспериментально обнаружен эффект увеличения дифракционной эффективности, имеющий место при возрастании интенсивности падающего света, дифрагированного на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [110] кристалла парателлурита. Геометрия АО взаимодействия выбрана так, что УЗ волна распространяется вдоль оси $X \parallel [110]$, вектор смещения УЗ волны $\vec{U} \parallel [1\bar{1}0]$, а направление распространения мощной световой волны составляет малый угол $\varphi_Б$ с осью *OZ*, параллельной оптической оси кристалла [3].

Ультразвуковая волна с вектором смещения $\vec{U} = \vec{U}_0 \exp[i(Kx - \Omega t)]$, где $\Omega = \pm\upsilon_s K$ индуцирует периодическое в пространстве и времени изменение диэлектрической проницаемости среды $\Delta\hat{\varepsilon}$. Знак плюс в выражении для циклической частоты Ω соответствует стоксовой дифракции с понижением частоты дифрагированной волны, минус – антистоксовой дифракции с увеличением частоты, υ_s – фазовая скорость ультразвука)

Для среды со слабой оптической анизотропией возмущение диэлектрической проницаемости $\Delta\hat{\varepsilon}^{nl}$, обусловленное кубической нелинейностью, может быть представлено в виде [4, 5]:

$$\Delta\varepsilon_{ik}^{nl} = 4\pi(\theta_1 E^*{}_i E_k + \frac{1}{2}\theta_2 E_i E_k^*), \qquad (1)$$

где $\theta_{1,2}$ – комплексные нелинейные коэффициенты;

$\vec{E}$ – напряжённость поля световой волны в области, заполненной ультразвуком.

Если нелинейность свойств обусловлена эффектом Керра, то необходимо положить $\theta_1 = 6\theta_2$; при нелинейности стрикционного происхождения $\theta_2 = 0$; при возникновении нелинейной электрической поляризации $\theta_2 = \theta_1$ [6]. При выполнении условия $\Omega = \omega_1 - \omega$, (здесь $\Omega = -\upsilon_s K$, ω – частота падающего света, ω_1 – частота дифрагированного света) нелинейный коэффициент, ответственный за усиление света, дифрагированного на дополнительной решётке, сформированной ультразвуком, является комплексной величиной: $\theta = i|\theta|$ [4].

Система уравнений связанных волн имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dA_0}{dz} + \rho B_0 + \chi_{\|} A_1 + \chi B_1 + \frac{1}{2} b\left(|A_1|^2 + |B_1|^2\right) A_0 = 0, \\
&\frac{dB_0}{dz} - \rho A_0 + \chi A_1 + \chi_{\perp} B_1 + \frac{1}{2} b\left(|A_1|^2 + |B_1|^2\right) B_0 = 0, \\
&\frac{dA_1}{dz} + \rho B_1 - \chi_{\|} A_1 - \chi B_1 - \frac{1}{2} b\left(|A_0|^2 + |B_0|^2\right) A_1 = 0, \\
&\frac{dB_1}{dz} - \rho A_1 - \chi A_0 - \chi_{\perp} B_0 - \frac{1}{2} b\left(|A_0|^2 + |B_0|^2\right) B_1 = 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где ρ – параметр удельного вращения;

$\chi = \chi_0 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} p_{эф} \sqrt{2 I_a / \sigma \upsilon^3}$;

$\chi_{\|,\perp} = \chi_0 \varepsilon^2_{11,22} p^{\|,\perp}_{эф} \sqrt{2 I_a / \sigma \upsilon^3}$;

$\chi_0 = \pi / 2\lambda_0 \sqrt{\varepsilon}$; $\bar{\varepsilon} = Sp(\hat{\varepsilon})/3$;

λ_0 – длина световой волны в вакууме;

I_a – интенсивность УЗ волны;

σ – плотность кристалла;

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ – компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$p_{эф}, p^{\|,\perp}_{эф}$ – эффективные параметры, характеризующие фотоупругость среды.

Полагаем в системе уравнений связанных волн (2) $b_1 = b_2 = b$. Постоянная $b = [\pi n_2 \sin\phi / \lambda_0 \cos(\varphi/2)]$ [4], где n_2 – постоянная Керра, $\phi = \pm\pi/2$ для дифракции с понижением (знак «+») и повышением (знак «–») частоты дифрагированной волны. При дифракции на сдвиговой УЗ волне полагалось, что $\chi = (\pi \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} p_{66} / 2\lambda_0 \sqrt{\bar{\varepsilon}}) \sqrt{2 I_a / \sigma \upsilon_s^3}$, где p_{66} – эффективная фотоупругая постоянная.

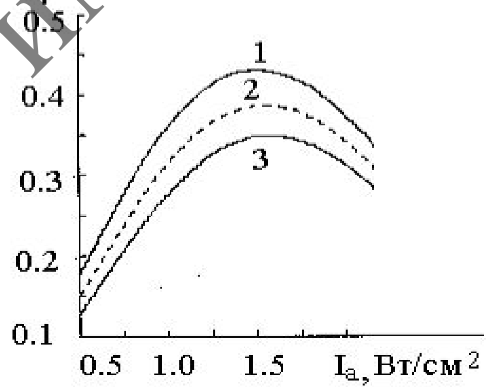
При численном исследовании системы уравнений (2) приняты следующие граничные условия: $A_0(z=0) = A_{\|}$, $B_0(z=0) = A_{\perp}$, $A_1(z=0) = B_1(z=0) = 0$, где $A_{\|}$ ($A_{\perp}$) – амплитуда падающей световой волны, поляризованной в плоскости дифракции (ортогонально плоскости дифракции). Относительные интенсивности дифрагированных волн рассчитаны на основе соотношений: $\eta_{\|} = |A_1|^2 / I_0$, $\eta_{\perp} = |B_1|^2 / I_0$, $\eta = (|A_1|^2 + |B_1|^2) / I_0$, где $I_0 = |A_{\|}|^2 + |A_{\perp}|^2$ – интенсивность падающего света на границе области акустооптического взаимодействия ($z = 0$).

Относительные интенсивности $\eta_{\|}$ и $\eta_{\perp}$ соответствуют случаю, когда поляризатор на выходной грани $z = l$ кристалла ориентирован соответственно параллельно плоскости дифракции или перпендикулярно к ней.

Численное решение системы уравнений (2) проведено для дифракции инфракрасного излучения с длиной волны $\lambda_0 = 1{,}06$ мкм на медленной сдвиговой ультразвуковой волне ($\upsilon_s = 620$ м/с), распространяющейся вдоль оси [110] кристалла TeO_2 [1]. Полагалось, что $p^{\|}_{эф} = p^{\perp}_{эф} = 0, p_{эф} = p_{66}$.

На рисунке 1 представлены зависимости $\eta_{\|}, \eta_{\perp}$ и η от интенсивности УЗ волны I_a, рассчитанные при интенсивности света $I_0 = 70$ МВт/см^2. Все названные здесь функции имеют чётко выраженный максимум, существование которого связано с реализацией линейного и нелинейного режимов дифракции.

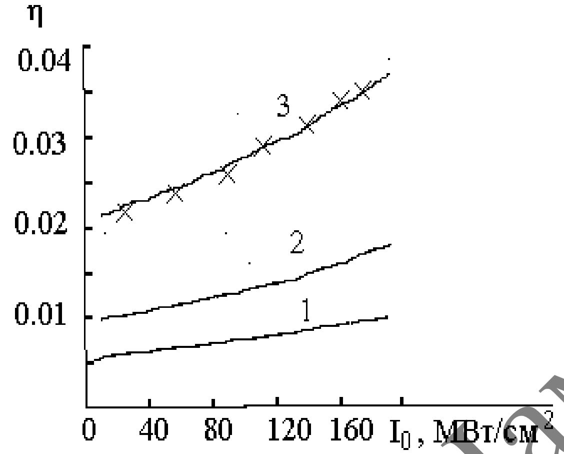
Зависимость дифракционной эффективности АО взаимодействия мощного ИК излучения с $\lambda_0 = 1{,}06$ мкм и медленной сдвиговой УЗ волны, распространяющейся вдоль оси [110] кристалла TeO_2, экспериментально исследована в [1]. В цитированной работе показано, что при возрастании интенсивности света от $I_0 << 1$ МВт/см^2 до $I_0 \approx 200$ МВт/см^2 дифракционная эффективность увеличивается в 1,5 раза. При возрастании интенсивности света до значения, соответствующего порогу разрушения кристалла ($I_0 \approx 250$ МВт/см^2), дифракционная эффективность увеличивается в 1,8 раза, по сравнению с той, которая имеет место при 200 МВт/см^2.



I_0 = 70 МВт/см^2, l = 1 см, $A_{\|} = 0$, $A_{\perp} = 1$; $b > 0$ (кривая 1), $b = 0$ (кривая 2), $b < 0$ (кривая 3)

Рисунок 1 – Зависимость $\eta_{\|}, \eta_{\perp}$ (кривые 1 и 3 соответственно) и η (кривая 2) от интенсивности ультразвуковой волны I_a

Как видно из рисунка 2, на котором представлена зависимость относительной интенсивности дифрагированной волны η от интенсивности света I_0, при увеличении I_0 от значения $I_0 << 1$ МВт/см^2 до $I_0 = 200$ МВт/см^2 дифракционной эффективности увеличивается в 1,8 раза.



I_a = 0,03; 0,05; 0,1 Вт/см^2 (кривые 1–3 соответственно); $A_{\|} = 0$, $A_{\perp} = 1$, l = 1 см

Рисунок 2 – Зависимость относительной эффективности дифракции η от интенсивности света I_0

Этот вывод хорошо согласуется с экспериментальными результатами, приведёнными в работе [1]. Имеющее место расхождение теории и эксперимента связано с приближенностью теоретической модели, в которой не учтены, например, расходимость звукового пучка, рассеяние света в другие дифракционные порядки при низких значениях волнового параметра, самофокусировка светового пучка.

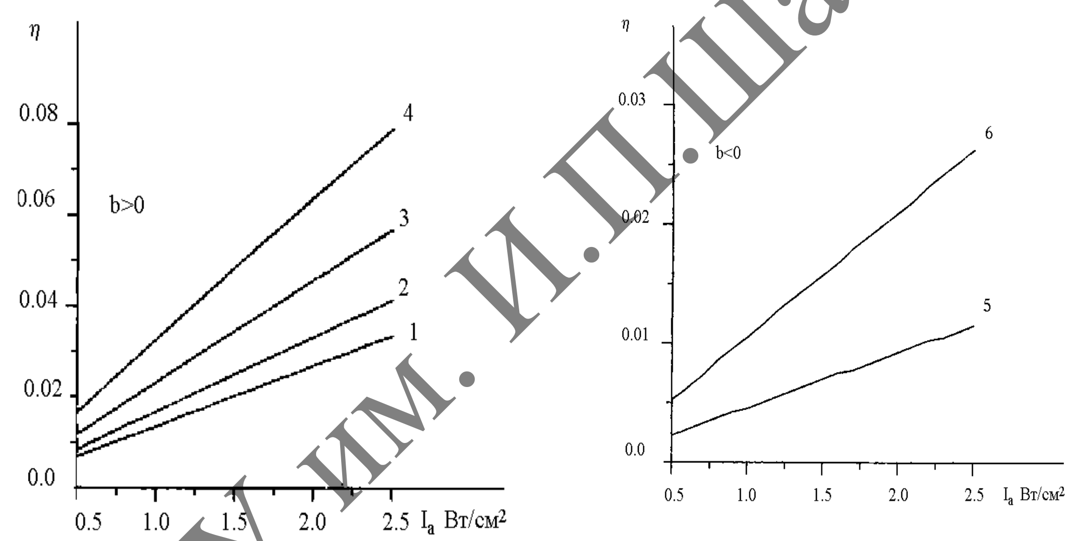
Численное решение системы (2) проведено для случая АО дифракции излучения *He-Ne* лазера (λ_0 = 0,63 мкм) на продольной УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [001] гиротропного кубического кристалла силиката висмута ($Bi_{12}SiO_{20}$), постоянная вращения которого ρ = 22,8 град/мм [3]. При этом использованы следующие граничные условия: $A_0(z=0) = A_{\|}$, $B_0(z=0) = A_{\perp}$, $A_1(z=0) = B_1(z=0) = 0$, где $A_{\|}(A_{\perp})$ – амплитуда падающей волны, поляризованной в плоскости дифракции (ортогонально плоскости дифракции). Рассмотрены случаи дифракции с понижением ($b > 0$) и повышением ($b < 0$) частоты.

Численные расчеты на основе системы уравнений (2) проведены для случая АО дифракции излучения *He-Ne* лазера (λ_0 = 0,63 мкм) на продольной УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [100] одноосного гиротропного кристалла кварца ($\alpha - SiO_2$), постоянная вращения которого

$\rho = 20$ град/мм [3]. При этом использованы следующие граничные условия: $A_0(z=0) = A_{\|}$, $B_0(z=0) = A_{\perp}$, $A_1(z=0) = B_1(z=0) = 0$, где $A_{\|}(A_{\perp})$ – амплитуда падающей волны, поляризованной в плоскости дифракции (ортогонально плоскости дифракции). Рассмотрены случаи дифракции с понижением ($b > 0$) и повышением ($b < 0$) частоты.

На рисунке 3 а приведена зависимость дифракционной эффективности η от интенсивности ультразвука I_a при различных интенсивностях света I_0 для падающей световой волны s-поляризации и стоксового режима дифракции ($b > 0$) для кристалла $\alpha - SiO_2$. Из рисунка следует, что имеет место линейный рост эффективности дифракции. С увеличением интенсивности света степень роста дифракционной эффективности становится выше. Для антистоксовой дифракции (рисунок 3б) эффективность дифракции увеличивается при уменьшении интенсивности света.

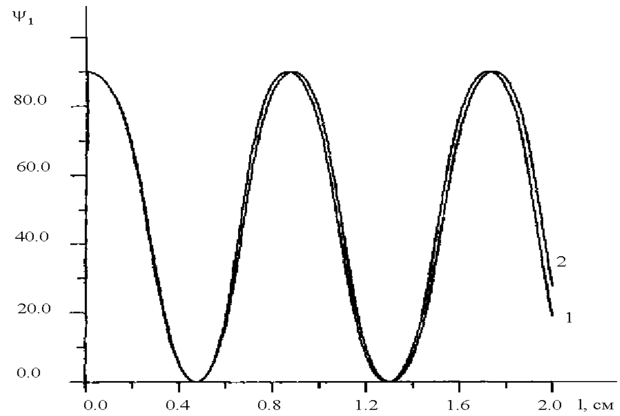
а б



1 – 20 МВт/см^2, 2 – 40 МВт/см^2, 3 – 70 МВт/см^2, 4 – 100 МВт/см^2, 5 – 70 МВт/см^2, 6 – 100 МВт/см^2 (b = 200 см/МВт, l – 1 см, $\alpha - SiO_2$)

Рисунок 3 – Зависимость эффективности дифракции η от интенсивности ультразвука I_a при различных интенсивностях света I_0

На рисунке 4 представлена зависимость азимута поляризации дифрагированного света ψ_1 от длины области АО взаимодействия при различных интенсивностях света I_0. Как следует из рисунка, наблюдается осциллирующий характер зависимости, обусловленный гиротропией кристалла. При этом на длине АО взаимодействия $l = 2$ см азимут поляризации изменяется от 0 до 90^0, причем дважды $\psi_1 = 0$ (s-поляризация дифрагированного света) и трижды $\psi_1 = 90^0$ (p-поляризация дифрагированного света).

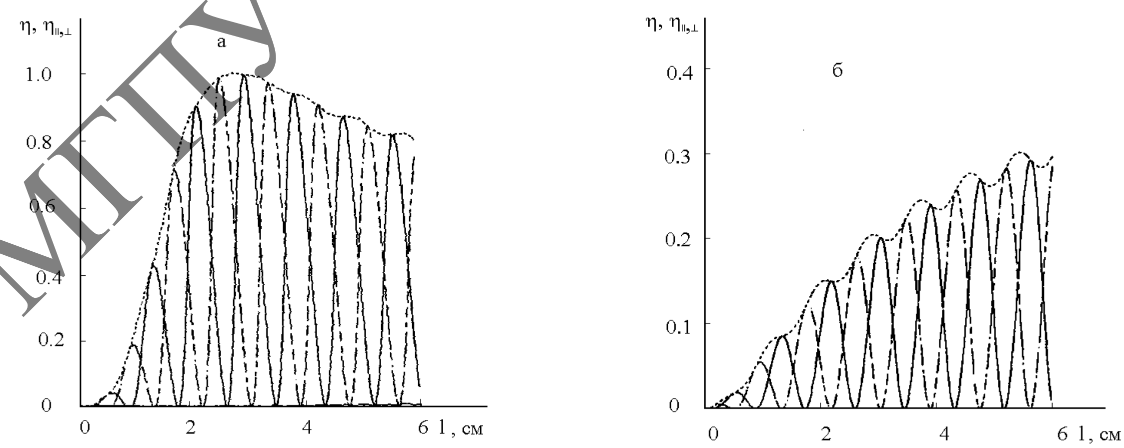


1 – 20 МВт/см^2, 2 – 40 МВт/см^2; b = 200 см/МВт, l = 2 см, I_a = 100 Вт/см^2, α-SiO_2

Рисунок 4 – Зависимость азимута поляризации дифрагированного света ψ_1 от длины акустооптического взаимодействия *l* при различных интенсивностях падающего света I_0

Заметим в заключение, что кроме нелинейности среды, обусловленной эффектом Керра, иногда следует учитывать нелинейность, индуцированную электрострикционным эффектом и нелинейной электрической поляризацией [7].

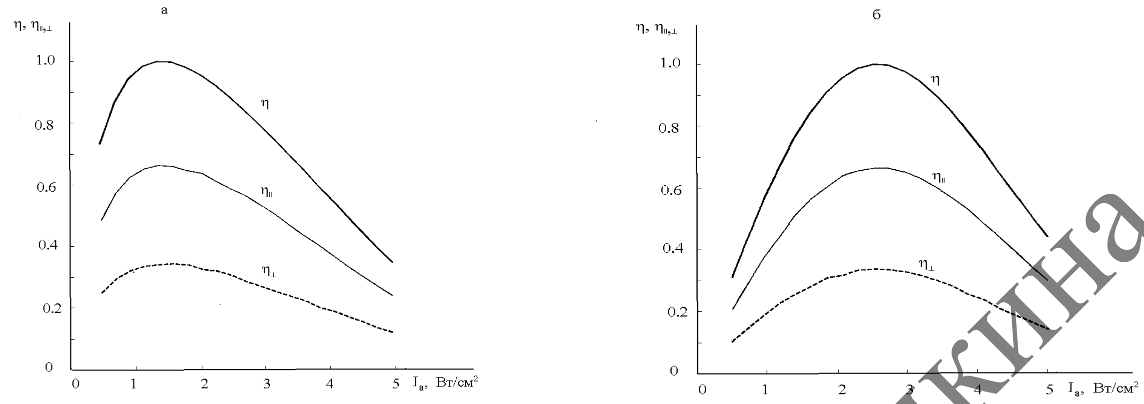
Зависимость дифракционной эффективности $\eta, \eta_{||,\perp}$ от длины АО взаимодействия l представлена на рисунке 5 для стоксовой (а) и антистоксовой (б) и двуосного кристалла $\alpha - HIO_3$. При этом продольная УЗ волна распространяется перпендикулярно оптической оси и световые волны распространяются вблизи оптической оси. Из рисунка следует, что эффективность антистоксовой дифракции значительно ниже, чем стоксовой.



а – стоксова, б – антистоксова дифракция; I_a = 1Вт/см^2; $A_{||}$ = 0; I_0 = 100 МВт/см^2

Рисунок 5 – Зависимость дифракционной эффективности η, $\eta_{||}$,$\eta_{\perp}$ от длины *l* области АО взаимодействия в кристалле $\alpha - HIO_3$

На рисунке 6 представлена зависимость эффективности дифракции $\eta, \eta_{\parallel, \perp}$ от интенсивности ультразвука I_a.



а – стоксова, б – антистоксова дифракция; $A_{\parallel} = 0$; $I_0 = 70$ МВт/см^2; $l = 1$см

Рисунок 6 – Зависимость дифракционной эффективности $\eta, \eta_{\parallel, \perp}$ от интенсивности УЗ волны I_a в кристаллах $\alpha - HIO_3$

Из рисунка следует, что эффективность стоксовой дифракции растет значительно быстрее, чем антистоксовой. При $b > 0$ максимальное значение η достигается при $I_a = 1{,}5$ Вт/см^2, а антистоксовой ($b < 0$) при $I_a = 2{,}6$ Вт/см^2.

Литература

1. Исследование дифракции мощного лазерного излучения в TeO_2 / В.В. Проклов [и др.] // Краткие сообщения по физике. Труды ФИАН. – 1979. – С. 1543–1545.

2. Гришмановский, А.Н. Акустооптическое взаимодействие в кристаллах молибдата свинца и парателлурита при большой интенсивности света / А.Н. Гришмановский, В.В. Леманов, М.П. Саттикулов // Письма в ЖТФ. – 1978. – Т. 4, № 2. – С. 706–709.

3. Кулак, Г.В. Основы акустооптики гиротропных кристаллов / Г.В. Кулак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2005. – 127 с.

4. Yeh, D. Nonlinear-optical Bragg scattering in Kerr media / D. Yeh, M. Khoshnevisan // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, № 12. – P. 1954–1957.

5. Майер, А.А. Оптическое самопереключение однонаправленных распределенно-связанных волн / А.А. Майер // УФН. – 1995. – Т. 165, № 9. – С. 1037–1075.

6. Кулак, Г.В. Влияние кубической нелинейности на акустооптическое взаимодействие в одноосных гиротропных кристаллах парателлурита / Г.В. Кулак, А.Г. Смирнов // Оптика и спектроскопия – 1999. – Т. 86, № 4. – С. 671–674.

7. Шеен, Н.Р. Принципы нелинейной оптики / Н.Р. Шеен ; пер. с англ. Н.Л. Шумая, С.А. Ахманова. – М. : Наука, 1989. – 558 с.

Е. М. Овсиюк

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДАФФИНА – КЕММЕРА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ АНТИ ДЕ СИТТЕРА

1. Постановка задачи, разделение переменных. Пространства постоянной кривизны в силу их симметрии являются важными для теоретического анализа основных модельных задач квантовой теории и теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией. В частности, особое место в этом контексте занимают пространства де Ситтера и анти де Ситтера [1], [2]. В работах [3], [4] были построены точные решения уравнения для векторной частицы в пространстве де Ситтера. В данной работе аналогичная задача решена в пространстве анти де Ситтера, 4-мерном пространстве-времени постоянной положительной кривизны.

Воспользовавшись диагональной сферической тетрадой в статических координатах анти де Ситтера $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$:

$$dS^2 = (1+r^2)\, dt^2 - \frac{dr^2}{1+r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ , \qquad 1+r^2 = \Phi \ , \qquad (1)$$

для уравнения Даффина – Кеммера получим представление [3]

$$[\, i\beta^0\partial_t + i\Phi(\beta^3\partial_r + \frac{1}{r}(\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) + \frac{\Phi'}{2\Phi}\beta^0 J^{03}) + \frac{\sqrt{\Phi}}{r}\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi} - m\sqrt{\Phi}\,]\,\Phi(x) = 0 \, ,$$

$$\Sigma^{\kappa}_{\theta,\phi} = i\beta^1\partial_\theta + \beta^2\,\frac{i\partial + i\, j^{12}\cos\theta}{\sin\theta} \, . \qquad (2)$$

Отвечающая диагонализации квадрата и третьей проекции полного момента подстановка для волновой функции имеет вид (используем формализм функций Вигнера согласно[3])

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t}\,[\, f_1(r)\, D_0, f_2(r)\, D_{-1}, f_3(r)\, D_0, f_4(r)\, D_{+1},$$
$$f_5(r)\, D_{-1}, f_6(r)\, D_0, f_7(r)\, D_{+1}, f_8(r)\, D_{-1}, f_9(r)\, D_0, f_{10}(r)\, D_{+1}\,] \, . \qquad (3)$$

Диагонализируя на решениях $\Phi_{\varepsilon jm}$ оператор пространственной инверсии $\hat{P}\,\Phi_{jm} = P\,\Phi_{jm}$, получаем:

$$P = (-1)^{j+1} \, , \quad f_1 = f_3 = f_6 = 0 \, , \; f_4 = -f_2 \, , \; f_7 = -f_5 \, , \; f_{10} = +f_8 \, ;$$
$$P = (-1)^{j} \, , \quad f_9 = 0 \, , \; f_4 = +f_2 \, , \; f_7 = +f_5 \, , \; f_{10} = -f_8 \, . \qquad (4)$$

После разделения переменных, учитывая соотношения (4), находим две системы радиальных уравнений $(\nu = \sqrt{j(j+1)}/2\,)$:

$P = (-1)^{j+1}$,

$$i\varepsilon\, f_5 + i\Phi(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}+\frac{\Phi'}{2\Phi})\, f_8 + i\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\, f_9 - m\sqrt{\Phi}\, f_2 = 0\,, \qquad i\varepsilon\, f_2 - m\sqrt{\Phi}\, f_5 = 0\,,$$

$$-i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\, f_2 - m\sqrt{\Phi}\, f_8 = 0\,, \qquad i2\nu\frac{\sqrt{\Phi}}{r}\, f_2 - m\sqrt{\Phi}\, f_9 = 0\,; \qquad (5)$$

$P = (-1)^j$,

$$\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\, F_6 + \frac{2\nu}{r}\, F_5 + m F_1 = 0\,,\; i\varepsilon\, F_5 + i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\, F_8 - m\,\Phi\, F_2 = 0\,,$$

$$i\varepsilon\, F_6 - i2\nu r\, F_8 - m F_3 = 0\,, \qquad -i\varepsilon\, F_2 + \frac{\nu}{r}\, F_1 - m F_5 = 0\,,$$

$$i\varepsilon\, F_3 + \Phi\,\frac{d}{dr} F_1 + m\,\Phi\, F_6 = 0\,,\; i\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})\, F_2 + i\frac{\nu}{r}\, F_3 + m F_8 = 0\,; \qquad (6)$$

в (6) использованы подстановки:

$$F_1 = \sqrt{\Phi}\, f_1\,, F_2 = f_2\,, F_3 = \sqrt{\Phi}\, f_3\,, F_5 = \sqrt{\Phi}\, f_5\,, F_6 = f_6\,, F_8 = \sqrt{\Phi}\, f_8\,.$$

Специально отметим, что состояния с минимальным значением $j = 0$ следует рассмотреть отдельно – исходная подстановка для волновой функции здесь имеет вид

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t}\,[\, f_1, 0, f_3, 0, 0, f_6, 0, 0, f_9, 0\,]\,; \qquad (7)$$

т. е. в выбранном тетрадном базисе волновая функция не зависит от угловых координат θ, ϕ. Угловая часть волнового оператора $\Sigma_{\theta,\phi}$ действует на такие волновые функции, как нулевой оператор, и уравнение (2) принимает вид

$$[\, i\,\beta^0\partial_t + i\,\Phi\,(\beta^3\partial_r + \frac{1}{r}(\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) + \frac{\Phi'}{2\Phi}\beta^0 J^{03}) - m\sqrt{\Phi}\,]\,\Phi(x) = 0\,, (8)$$

что приводит к простой системе радиальных уравнений:

$$-\Phi\,(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r})\, f_6 - m\sqrt{\Phi}\, f_1 = 0\,, \qquad i\varepsilon f_6 - m\sqrt{\Phi}\, f_3 = 0\,,$$

$$-\, i\varepsilon f_3 - \Phi(\frac{d}{dr}+\frac{\Phi'}{2\Phi})\, f_1 - m\sqrt{\Phi}\, f_6 = 0\,, \qquad f_9 = 0\,. \qquad (9)$$

Система (9) описывает состояния с четностью $P = (-1)^j$; состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ при $j = 0$ не существует. Система (9) сводится к уравнению для f_6:

$$\frac{d^2}{dr^2} f_6 + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} f_6 + \left[\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{m^2-2}{1+r^2} - \frac{2}{r^2(1+r^2)}\right] f_6 = 0\,, \quad (10)$$

решение которого выражается через гипергеометрические функции:

$$f_6(r) = r\,(1+r^2)^{-\varepsilon/2}\, F(\alpha,\beta,\gamma,-r^2)\,, \quad \gamma = 1+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,, \qquad \beta = \frac{3/2+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \qquad (11)$$

Гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,, n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; в результате приходим к следующему правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,, \qquad N = 2n+1 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\,. \qquad (12)$$

2. Решение радиальных уравнений при $j > 0$. Рассмотрим теперь уравнения (5). Выражая f_5, f_8, f_9 через f_2:

$$f_5 = \frac{i}{m\sqrt{\Phi}}\,\varepsilon\, f_2\,, \qquad f_8 = \frac{-i}{m\sqrt{\Phi}}\,\Phi\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right) f_2\,, \qquad f_9 = \frac{i}{m}\,\frac{2\nu}{r}\, f_2\,. \quad (13)$$

Подставляя их в первое уравнение, для функции f_2 получаем

$$\frac{d^2}{dr^2} f_2 + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} f_2 + \left[\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{m^2-2}{1+r^2} - \frac{j(j+1)}{r^2(1+r^2)}\right] f_2 = 0\,. \quad (14)$$

Дальше решение этого вида будем называть j-волной. Решение уравнения (14) выражается через гипергеометрические функции.

$$f_2 = U_{\varepsilon,j} = (-z)^{j/2}(1-z)^{-\varepsilon/2}\, F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,, \quad \gamma = j+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2+j-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,, \qquad \beta = \frac{3/2+j-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \qquad (15)$$

Гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,, n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; в результате приходим к правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,, \qquad N = 2n + j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\,. \qquad (16)$$

Можно убедиться, что при $z \to -\infty$ полная радиальная функция $U_{\varepsilon,j}(z)$ стремится к нулю:

$$U_{\varepsilon,j}(z \to -\infty) \sim z^{j/2}\, z^{-\varepsilon/2} z^{n} \sim z^{-3/4-\sqrt{m^2+1/4}\,/2}\,.$$

Обратимся к системе (6). Используя две разные подстановки:

$$I. \qquad F_1 = \sqrt{j+1}\, G_1\,, F_2 = i\sqrt{j/2}\, G_2\,, F_3 = i\sqrt{J+1}\, G_3\,,$$

$$F_5 = \sqrt{j/2}\; G_5\,,\; F_6 = \sqrt{j+1}\; G_6\,,\; F_8 = \sqrt{j/2}\; G_8\,; \qquad (17)$$

$$II. \qquad F_1 = \sqrt{j}\; G_1\,,\; F_2 = i\sqrt{(j+1)/2}\; G_2\,,\; F_3 = i\sqrt{j}\; G_3\,,$$
$$F_5 = \sqrt{(j+1)/2}\; G_5\,,\; F_6 = \sqrt{j}\; G_6\,,\; F_8 = \sqrt{(j+1)/2}\; G_8 \qquad (18)$$

и выражая функции G_5, G_6, G_8 через G_1, G_2, G_3, приходим в каждом случае соответственно к следующим трем уравнениям:

$$I. \qquad \left(\frac{j(j+1)}{r^2} + m^2 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}\right) G_1 + \frac{\varepsilon j}{r} G_2 + \varepsilon\, \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{1}{\Phi} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\varepsilon^2 - m^2\,\Phi^2 + \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right) G_2 + \frac{\varepsilon\,(j+1)}{r} G_1 + \Phi\,\frac{j+1}{r}\frac{d}{dr} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\Phi} - \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right)\right) G_3 - \varepsilon\,\frac{d}{dr} G_1 - \frac{j}{r}\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) G_2 = 0\,; \qquad (19)$$

$$II. \qquad \left(\frac{j(j+1)}{r^2} + m^2 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}\right) G_1 + \frac{\varepsilon(j+1)}{r} G_2 + \varepsilon\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{1}{\Phi} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\varepsilon^2 - m^2\Phi^2 + \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right) G_2 + \frac{\varepsilon j}{r} G_1 + \Phi\,\frac{j}{r}\frac{d}{dr} G_3 = 0\,,$$
$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right) G_3 - \varepsilon\,\frac{d}{dr} G_1 - \frac{(j+1)}{r}\,\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) G_2 = 0\,. \qquad (20)$$

Чтобы решить системы уравнений (19), (20), учтем условие Лоренца – в случае массивного векторного поля оно выполняется всегда. Его явный вид легко устанавливается:

$$\frac{-i\varepsilon}{\sqrt{\Phi}}\, f_1 - \sqrt{\Phi}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_3 - \frac{\nu}{r}\,(f_2 + f_4) = 0\,. \qquad (21)$$

При значении четности $P = (-1)^{j+1}$ условие (21) выполняется тождественно $(0 \equiv 0)$; для подстановок I и II из (17), (18) оно примет соответственно вид:

$$I. \qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi} = \frac{j}{r} G_2 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) G_3\,,$$
$$II. \qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi} = \frac{j+1}{r} G_2 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) G_3\,. \qquad (22)$$

Учитывая соотношения (22), выразим G_1 через G_2 и G_3 и подставим во второе и третье уравнения в (19), (20). Получим:

$$I. \qquad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{r\Phi} + \frac{\varepsilon^2}{\Phi^2} - \frac{m^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}\right] G_2 - \frac{2(j+1)}{r^2\Phi} G_3 = 0\,,$$

$$[\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr} + \frac{2\Phi'}{r\Phi} - \frac{2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{\Phi^2} - \frac{m^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\, G_3 - \frac{2j}{r^2\Phi} G_2 \quad 0\,; \tag{23}$$

$$II. \qquad [\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{r\Phi} + \frac{\varepsilon^2}{\Phi^2} - \frac{m^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\, G_2 - \frac{2j}{r^2\Phi} G_3 \quad 0\,,$$

$$[\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{2}{r} + \frac{\Phi'}{\Phi})\frac{d}{dr} + \frac{2\Phi'}{r\Phi} - \frac{2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{\Phi^2} - \frac{m^2}{\Phi} - \frac{j(j+1)}{\Phi r^2}]\, G_3 - \frac{2(j+1)}{r^2\Phi} G_2 \quad 0\,. \tag{24}$$

В случае I, положив $G_3 = +G_2$, из двух уравнений в (23) приходим к одному и тому же:

$$I. \qquad G_3 \quad +G_2 = U_{\varepsilon,j+1}\,, \qquad = [\,\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{M^2-2}{1+r^2} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2(1+r^2)}\,]\, G_2 \quad 0\,. \tag{25}$$

Аналогично, полагая в случае *II*, что $G_3 = -G_2$, также получим одно уравнение; причем такого же вида, как и (25) с заменой $(j+1)$ на $(j-1)$:

$$II. \qquad G_3 \quad -G_2 = U_{\varepsilon,j-1} \qquad = [\,\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2} - \frac{M^2-2}{1+r^2} - \frac{(j-1)j)}{r^2(1+r^2)}\,]\, G_2 \quad 0\,. \tag{26}$$

Таким образом, помимо j-волн, существуют еще два типа решений (детали вычислений с применением свойств гипергеометрических функций опускаем):

$I.$ $\quad (j+1)-$тип,

$$G_3 = G_2 \quad U_{\varepsilon,j+1}, \qquad -\varepsilon\,\frac{G_1}{\Phi} \quad (\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r})\, G_2\,;$$

$$G_1 = \sqrt{-z}\; U_{\varepsilon,j+1} - \frac{2j+3}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\; U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

$$U_{\varepsilon,j+1} = (-z)^{(j+1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;z)\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2+j+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}, \qquad \beta \quad \frac{3/2+j+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,$$

$$\gamma = j+1+3/2\,; \tag{27}$$

II. $(j-1)$ – тип,

$$-G_3 = G_2 = U_{\varepsilon,j-1}, \qquad = \varepsilon \frac{G_1}{\Phi} \left(-\frac{d}{dr}+\frac{j-1}{r}\right) G_2 ,$$

$$G_1 = -\sqrt{-z}\; U_{\varepsilon,j-1} - \frac{2}{\varepsilon}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sqrt{1-z}\; U_{\varepsilon-1,j} ,$$

$$U_{\varepsilon,j-1} = (-z)^{(j-1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\, F(\alpha,\beta,\gamma;z) ,$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\, F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z) ,$$

$$\alpha = \frac{3/2+j-1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}, \qquad \beta = \frac{3/2+j-1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2},$$

$$\gamma = j-1+3/2 . \qquad (28)$$

Подведем итоги решения радиальных уравнений. Получены решения трех типов (приводим выражения только для $f_1,...,f_4$):

j – волна

$$f_1 = f_3 = 0\,,\; f_2 = -f_4 = U_{\varepsilon,j}\,; \qquad (29)$$

$(j+1)$ – волна,

$$f_1 = \sqrt{j+1}\left[\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}}\,U_{\varepsilon,j+1} - \frac{2j+3}{\varepsilon}\,U_{\varepsilon-1,j}\right],$$

$$f_2 = +f_4 = +i\sqrt{j/2}\;U_{\varepsilon,j+1}, \quad = f_3 = +i\sqrt{j+1}\,\frac{1}{\sqrt{1-z}}\,U_{\varepsilon,j+1}\,; \qquad (30)$$

$(j-1)$ – волна,

$$f_1 = \sqrt{j}\left[-\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}}\,U_{\varepsilon,j-1} - \frac{2}{\varepsilon}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\,U_{\varepsilon-1,j}\right],$$

$$f_2 = +f_4 = i\sqrt{\frac{j+1}{2}}\,U_{\varepsilon,j-1}, \quad = f_3 = -i\sqrt{j}\,\frac{1}{\sqrt{1-z}}\,U_{\varepsilon,j-1}\,. \qquad (31)$$

Найденные три типа волн соответствуют трем возможным значениям орбитального момента частицы со спином 1 при заданном полном моменте j: $l = j,\; j+1,\; j-1$.

3. Безмассовый предел. Сделаем замечание относительно перехода во всех соотношениях к случаю безмассового векторного поля. Основное уравнение Даффина – Кеммера при этом имеет вид (2) с единственной формальной заменой:

$$m\sqrt{\Phi} \;\to\; P_6\sqrt{\Phi}\,, \qquad (32)$$

где P_6 – проектор на 6-мерное подпространство 10-компонентной волновой функции:

$$P_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Соответственно, в основной системе радиальных уравнений должны быть выполнены формальные замены:

$$m\sqrt{\phi}\, f_i \to 0, \quad i = 1,2,3,4; \qquad m\sqrt{\phi}\, f_i \to \sqrt{\phi}\, f_i, \quad i = 5,\dots,10. \tag{34}$$

Понятно, что никакого существенного влияния на процедуру решения системы радиальных уравнений замена (34) не оказывает. Нужно только заметить, что поскольку в безмассовом случае условие Лоренца не выполняется автоматически, как следствие уравнений, его нужно рассматривать теперь как условие, фиксирующее калибровку волновой функции фотона.

Все остальные соотношения останутся в силе, вместо использованных выше параметров гипергеометрических функций нужно брать следующие:

$$U_{\varepsilon,j}, \quad \alpha = \frac{2+j-\varepsilon}{2}, \quad \beta = \frac{1+j-\varepsilon}{2}, \quad \gamma = j+3/2; \tag{35}$$

правило квантования энергии ε (частоты) следующее:

$$\varepsilon = 2n + j + 2 = N + 2, \quad N = 2n + j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}. \tag{36}$$

Случай нулевого значения $j = 0$ должен быть рассмотрен отдельно. Система (9) принимает здесь вид

$$-\Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) f_6 - 0\sqrt{\Phi}\, f_1 = 0, \qquad i\varepsilon f_6 - 0\sqrt{\Phi}\, f_3 = 0,$$
$$-i\varepsilon f_3 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_1 - \sqrt{\Phi}\, f_6 = 0, \quad f_9 = 0, \tag{37}$$

что эквивалентно следующему:

$$g_6 = 0, \quad f_9 = 0, \qquad -i\varepsilon f_3 - \Phi\left(\frac{d}{dr} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\right) f_1 = 0. \tag{38}$$

У возможного состояния поля при $j = 0$ компоненты электрического и магнитного векторов обращаются в ноль ($F_{\alpha\beta} = 0$); ненулевые $f_1(r), f_3(r)$ соответствуют решению градиентного типа: $A_\alpha = \nabla_\alpha \Phi$. Чтобы зафиксировать две радиальные функции, связанные уравнением (38), нужно рассмотреть это уравнение, наложив какое-либо калибровочное условие. В частности, наложив условие Лоренца (см. (21)), имеем два уравнения (используем подстановки $f_1 = \Phi^{-1/2}F_1, = f_3 \quad \Phi^{-1/2}F_3$):

$$-\frac{i\varepsilon}{\Phi}F_3 - \frac{d}{dr}F_1 = 0\,, \qquad -\frac{i\varepsilon}{\Phi}F_1 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)F_3 = 0\,. \tag{39}$$

Исключая F_3, получаем уравнение для F_1:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)}\frac{d}{dr} + \frac{\varepsilon^2}{(1+r^2)^2}\right]F_1 = 0. \tag{40}$$

Это радиальное уравнение, отвечающее $j = 0$-решению уравнения $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi = 0, \quad \Phi = e^{-i\varepsilon t} f(r)$.

Заключение. Поле со спином 1 исследовано в статических координатах в пространстве анти де Ситтера с использованием общековариантного уравнения Даффина – Кеммера. Получены решения в виде сферических волн с квантовыми числами (ε, j, m); угловая зависимость выделяется посредством функций Вигнера $D^{j}_{-m,\sigma}$, $\sigma = -1,\ 0,\ +1$. Система радиальных уравнений решена в гипергеометрических функциях. В качестве линейно независимых решений выделены волны трех типов: $(j-1,\ j,\ j+1)$, что соответствует трем возможным значениям орбитального момента частицы со спином 1 при фиксированном значении полного момента j. Найдено правило квантования энергетических уровней. Указан способ перехода к случаю электромагнитного поля в лоренцевской калибровке.

Автор признательна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

Литература

1. Schrödinger, E. Space-time structure / E. Schrödinger. – Cambridge : University Press, 1950.

2. Хокинг, С. Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. – М. : Мир, 1977. – 429 с.

3. Богуш, А.А. Векторное поле в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1986. – № 1. – С. 58–62.

4. Богуш, А.А. Общековариантный формализм Даффина – Кеммера и сферические волны для векторного поля в пространстве де Ситтера / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков. – Минск, 1986. – 45 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 426).

Е. М. Овсиюк

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ ДЕ СИТТЕРА, СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В 5-МЕРНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

1. Введение. 5-мерная формулировка волнового уравнения. Известно [1]–[15], что волновое уравнение для частицы со спином 1, помещенной в фон космологической модели де Ситтера, может быть представлено в 5-мерном виде, явно инвариантном относительно группы симметрии этого пространства – группы $S0(3.2)$. Цель настоящей работы – воспользовавшись этим представлением, построить решения волнового уравнения для частицы со спином 1. Особый интерес представляют статические координаты. Из общих соображений понятно, что должен возникать дискретный спектр энергий и иметь место некоторое вырождение уровней по квантовым числам.

В конформно-плоских координатах пространства анти де Ситтера

$$dS^2 = \frac{1}{\Phi^2}[\,(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\,], \qquad \Phi = (1 + x^2)/2 \qquad (1)$$

рассмотрим тензорные уравнения Прока

$$\partial_\alpha \Psi_\beta - \partial_\beta \Psi_\alpha = m\,\Psi_{\alpha\beta}, \qquad \Phi^2\, \partial^\beta \Psi_{\alpha\beta} = m \Psi_\alpha\,. \qquad (2)$$

Введем в пространстве анти де Ситтера пять координат ξ^a:

$$\xi^\alpha = \frac{x^\alpha}{\Phi}, \qquad \xi^5 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \qquad x^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{1 + \xi^5}, \qquad \Phi = \frac{1}{1 + \xi^5}, \qquad (a = \alpha, 5),$$

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 + (\xi^5)^2 = +1, \qquad dS^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta + (d\xi^5)^2\,. \quad (3)$$

Из приведенных соотношений следует, что пространство анти де Ситтера можно отождествить со сферой в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве; следовательно, пространство анти де Ситтера допускает 10-параметрическую группу движений – группу $SO(3.2)$. Вместо $\Psi^\alpha(x)$ (обозначаем ее дальше как $a^\alpha(x)$) введем волновую функцию $A^a(\xi)$:

$$A^\alpha = (\frac{\delta^\alpha_\beta}{\Phi} - \frac{x^\alpha\, x_\beta}{\Phi^2})\, a^\beta, \quad A^5 = -\frac{x_\beta\, a^\beta}{\Phi^2}\,; \qquad a^\alpha(x) = \Phi\,(A^\alpha - x^\alpha A^5)\,. \quad (4)$$

Пять величин $A^a(\xi)$ не являются независимыми; легко можно убедиться, что выполняется условие поперечности: $A^a \xi_a = A^0 \xi^0 - \vec{A}\,\vec{\xi} + A^5 \xi^5 = 0$. Инвариантное относительно группы $SO(3.2)$ волновое уравнение для вектора $A^a(\xi)$ должно строиться с помощью оператора $L_{ab} = \xi_a\,(\partial/\partial\xi^b) - \xi_b\,(\partial/\partial\xi^a)$ и иметь вид

$$(-\frac{1}{2} L^{ab}\, L_{ab} + m^2 - 2\,)\, A_c = 0, \qquad L_{ab}A^b = A_a\,, \qquad A^a\xi_a = 0\,. \tag{5}$$

2. Сферические волны в 5-мерном представлении, разделение переменных в статических координатах. Уравнение для векторного поля в 5-мерной форме

$$(\,\Delta + m^2 - 2\,)\,A^b = 0\,, \quad \xi_b\, A^b = 0\,, \quad L_{ab}A^b = A_a \tag{6}$$

будем решать в статических координатах анти де Ситтера (при этом следуем методу, развитому для решения аналогичной задачи в пространстве де Ситтера [15]); эти координаты $x^\alpha = (t,\, r,\, \theta,\, \phi)$ связаны с ξ^a соотношениями:

$$\xi^1 = r\sin\theta\cos\phi\,, \quad \xi^2 = r\sin\theta\sin\phi, \quad \xi^3 = r\cos\theta\,,$$
$$\xi^0 = \sin t\sqrt{1+r^2}\,, \quad \xi^5 = \cos t\sqrt{1+r^2}\,;$$
$$t = \operatorname{arctg}\frac{\xi^0}{\xi^5}\,, \quad r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}\,,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}}{\xi^3}\,, \phi = \operatorname{arctg}\frac{\xi^2}{\xi^1}\,. \tag{7}$$

Для любого представления группы $SO(3.2)$, реализуемого в пространстве функций $\Psi(\xi)$, выполняются соотношения:

$$\xi' = S\,\xi\,,\ \Psi'(\xi') = U\,\Psi(\xi) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi'(\xi) = U\,\Psi(S^{-1}\,\xi)\,.$$

Дальше рассматриваем случай, когда $U \equiv S$ и $\Psi \equiv A$. Полагая

$$\xi^{0'} = \cos\omega\,\xi^0 - \sin\omega\,\xi^5\,, \qquad \xi^{5'} = \sin\omega\,\xi^0 + \cos\omega\,\xi^5$$

(это поворот на угол ω в плоскости 0–5) и выбирая параметр ω бесконечно малым, получим

$$A'(\xi) = (I + \delta\omega\, J_{50})\, A(\xi)\,, \qquad J_{50} = L_{50} + \sigma_{50}\,,$$

$$L_{50} = \xi_5\,\frac{\partial}{\partial\xi^0} - \xi^0\,\frac{\partial}{\partial\xi^5}\,, \qquad \sigma_{50} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Генератор J_{50} будет использован при построении оператора энергии векторной частицы в 5-мерном представлении. Волновое уравнение будем решать, диагонализируя одновременно три оператора: $(+iJ_{50})$ – энергии; $\vec{J}^{\,2}$ – квадрата момента; J_3 – третьей проекции момента:

$$(+iJ_{50})^a_{\ b} A^b = \varepsilon A^a ,$$
$$(\vec{J}^{\,2})^a_{\ b} A^b = j(j+1)\, A^a , \qquad (J_3)^a_{\ b}\, A^b = m\, A^a . \tag{9}$$

Подстановка для 5-вектора, учитывающая зависимость функции A_a от времени, вытекающую из уравнения $(+iJ_{50})\, A = \varepsilon A$, имеет вид

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t} \Big[\; f(r)\, \vec{Y}^{j+1}_{jm}(\theta,\phi) + g(r)\, \vec{Y}^{j-1}_{jm}(\theta,\phi) + h(r)\, \vec{Y}^{j}_{jm}(\theta,\phi) \Big],$$
$$A^0 = \Big[\; e^{-i(\varepsilon-1)t}\; F(r) + i\, e^{-i(\varepsilon+1)t}\; G(r) \;\Big] Y_{jm}(\theta,\phi),$$
$$A^5 = \Big[\; i\, e^{-i(\varepsilon-1)t}\; F(r) + e^{-i(\varepsilon+1)t})\, G(r) \;\Big] Y_{jm}(\theta,\phi) . \tag{10}$$

При заданном $j = 1,\, 2,\, ...$ имеются три линейно независимых сферических вектора с $\nu = j+1,\ j,\ j-1,$ при нулевом $j=0$ есть только один сферический вектор. Это означает, что при нулевом $j=0$ подстановка для 5-мерной функции может быть только следующей:

$$j = 0 , \qquad \vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\, f(r)\, \vec{Y}^{1}_{00} ,$$
$$\frac{1}{2}(A^0 + iA^5) = iG(r)\, e^{-i(\varepsilon+1)t}\, Y_{jm} ,$$
$$\frac{1}{2}(A^0 - iA^5) = F(r)\, e^{-i(\varepsilon-1)t}\, Y_{jm} . \tag{11}$$

Радиальные функции $f(r),\ g(r),\ h(r),\ F(r),\ G(r)$ должны быть определены из уравнения (6). Обратимся к первому уравнению из (6). Учитывая, что действие оператора $\vec{l}^{\,2}$ на сферические функции определяется формулами

$$\vec{l}^{\,2}\, \vec{Y}^{\nu}_{jm} = \nu(\nu+1)\, \vec{Y}^{\nu}_{jm} , \quad \vec{l}^{\,2}\, Y_{jm} = j(j+1)\, Y_{jm} , \quad \nu = j, j+1, j-1 ,$$

для радиальных функций $f(r),\ g(r),\ h(r),\ F(r)$ получаем дифференциальное уравнение одного и того же вида:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)} \frac{d}{dr} + \frac{\Lambda^2}{(1+r^2)^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2(1+r^2)} - \frac{(m^2-2)}{1+r^2} \right] U_{\Lambda,\nu} = 0 ; \tag{12}$$

искомые функции должны совпадать со следующими решениями этого уравнения

$$f = f_0\, U_{\varepsilon,j+1}\,,\quad g = g_0\, U_{\varepsilon,j-1}\,,\quad h = h_0\, U_{\varepsilon,j}\,,\quad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,,\quad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j}\,;$$

$f_0,\ g_0,\ h_0,\ F_0,\ G_0$ – некоторые постоянные; связь между ними должна быть найдена из анализа уравнений (6). Решения уравнения (12) могут быть выражены через гипергеометрические функции (достаточно детально рассмотреть случай $U_{\varepsilon,j}$):

$$U_{\varepsilon,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,,\quad z = -r^2,\ \gamma = j+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2 + j - \varepsilon + \sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,\qquad \beta = \frac{3/2 + j - \varepsilon - \sqrt{m^2+1/4}}{2}\,; \tag{13}$$

гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; в результате приходим к следующему правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,,\quad N = 2n + j \in \{0,1,2,\}\,. \tag{14}$$

Легко можно убедиться, что при $z \to -\infty$ полная радиальная функция $U(z)$ стремится к нулю:

$$U(z \to -\infty) \sim z^{j/2}\, z^{-\varepsilon/2}\, z^{n} \sim z^{-3/4-\sqrt{m^2+1/4}\,/2} \to 0\,.$$

Из условий поперечности и Лоренца в (6) можно получить следующие выражения для $G \pm iF$ через $(f,\ g)$:

$$G + iF = \frac{-rf + rg}{\sqrt{1+r^2}}\,,\ G - iF = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\left[\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f - \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) g\ \right]. \tag{15}$$

3. Решение радиальных уравнений, волны типов $(j,\ j+1,\ j-1)$**.** Три линейно независимые решения волнового уравнения будем искать в следующем виде:

$$j-\text{волна},\qquad f = 0\,,\ g = 0\,,\ h \neq 0\,,$$
$$(j+1)-\text{волна},\qquad f \neq 0\,,\ g = 0\,,\ h = 0\,,$$
$$(j-1)-\text{волна},\qquad f = 0\,,\ g \neq 0\,,\ h = 0\,.$$

Строя волны этих трех типов, мы фактически требуем диагонализации на решениях дополнительного оператора – квадрата орбитального момента $\vec{l}^{\;2} = \nu(\nu+1)$, $\nu = j+1,\ j,\ j-1$.

Рассмотрим волну $(j+1)$-типа:

$$f = \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\, f_0\, U_{\varepsilon,j+1}\,,\qquad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,,\qquad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j}\,; \tag{16}$$

условия (15) принимают вид

$$G + iF = -\frac{rf(r)}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad G - iF = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\,\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f \tag{17}$$

или после перехода к переменной $z = -r^2$

$$2\frac{G_0}{f_0} U_{\varepsilon+1,j} = -\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j+1} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} + \frac{j+2}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j+1},$$

$$2i\frac{F_0}{f_0} U_{\varepsilon-1,j} = -\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j+1} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} + \frac{j+2}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j+1}. \tag{18}$$

Учитывая явный вид функций

$$U_{\varepsilon,j+1} = (-z)^{(j+1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma;z),$$

$$U_{\varepsilon+1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon+1)/2}\,F(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1;z),$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;z),$$

$$\gamma = j+1+3/2, \quad \alpha = \frac{3/2+j+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2},$$

$$\beta = \frac{3/2+j+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}, \tag{19}$$

а также используя формулы дифференцирования и соотношения Гаусса для гипергеометрических функций, найдем коэффициенты G_0, F_0:

$$G_0 = \frac{\gamma-1}{\varepsilon} f_0 = \frac{j+3/2}{\varepsilon} f_0, \qquad F_0 = i\frac{j+3/2}{\varepsilon} f_0 = i\frac{1-\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} f_0. \tag{20}$$

Аналогичные вычисления можно проделать и для волны типа $(j-1)$:

$$g = \sqrt{\frac{2j+1}{j}}\, g_0\, U_{\varepsilon,j-1}(z), \qquad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}, \qquad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j},$$

$$G + iF = \frac{r\,g}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad G - iF = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\,\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) g; \tag{21}$$

переходим к переменной $z = -r^2$

$$2\frac{G_0}{g_0} U_{\varepsilon+1,j} = \frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j-1} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} - \frac{j-1}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j-1},$$

$$2i\frac{F_0}{g_0} U_{\varepsilon-1,j} = \frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j-1} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} - \frac{j-1}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j-1}, \tag{22}$$

учитываем явный вид функций

$$U_{\varepsilon,j-1} = (-z)^{(j-1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(a,b,c;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon+1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon+1)/2}\,F(a,b,c+1;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(a+1,b+1,c+1;z)\,,$$

$$c = j-1+3/2\,,\ a = \frac{3/2+j-1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,$$

$$b = \frac{3/2+j-1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \tag{23}$$

Используя свойства гипергеометрических функций, находим коэффициенты

$$G_0 = \frac{(a-c)(b-c)}{\varepsilon\, c}\,g_0\,, \qquad F_0 = i\,\frac{ab}{\varepsilon\, c}\,g_0\,. \tag{24}$$

Соберем вместе полученные результаты для решений 5-мерного уравнения:

j **-волна** $\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t} h_0\, U_{-i\varepsilon,j}(r)\,\vec{Y}^{\,j}_{jm}(\theta,\phi)\,, \quad A^0 = 0\,,\ A^5 = 0\,;$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}$.

$(j-1)$ **-волна** $\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\sqrt{\frac{2j+1}{j}}\,f(r)\,\vec{J}^{\,j-1}_{jm}(\theta,\phi)\,, \qquad f(r) = f_0\,U_{\varepsilon,j-1}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0 + iA^5) = i\,G(r)\,e^{-i(\varepsilon+1)t}\,Y_{jm}\,, \quad G(r) = \frac{(a-c)(b-c)}{\varepsilon\, c}\,g_0\,U_{\varepsilon+1,j}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0 - iA^5) = F(r)\,e^{-i(\varepsilon-1)t}\,Y_{jm}\,, \qquad F(r) = i\,\frac{ab}{\varepsilon\, c}\,g_0\,U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j - 1 + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}$.

$(j+1)$ **-волна**, $\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\,f(r)\,\vec{J}^{\,j+1}_{jm}(\theta,\phi)\,, \qquad f(r) = f_0\,U_{\varepsilon,j+1}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0 + iA^5) = i\,G(r)\,e^{-i(\varepsilon+1)t}\,Y_{jm}\,, \qquad G(r) = \frac{j+3/2}{\varepsilon}\,f_0\,U_{\varepsilon+1,j}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0 - iA^5) \quad F(r)\, e^{-i(\varepsilon-1)t} = Y_{jm}\,, \qquad\qquad F(r) \quad i = \frac{j+3/2}{\varepsilon}\, f_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j + 1 + 3/2 + \sqrt{m^2 + 1/4}$.

Вырождение уровней энергии можно описать следующей таблицей

	j	$(j-1)$	$(j+1)$
$N=1=$	$n \quad 0,\ j=1=$	$n \quad 0,\ j=2=$	$n \quad 0,\ j=0$
$N=2=$	$n \quad 0,\ j=2=$	$n \quad 0,\ j=3=$	$n \quad 0,\ j=1$
		$n=0,\ j=1$	
$N=3=$	$n \quad 0,\ j=3=$	$n \quad 0,\ j=4=$	$n \quad 0,\ j=2$
	$n=1,\ j=1=$	$n \quad 1,\ j=2=$	$n \quad 1,\ j=0$
$N=4=$	$n \quad 0,\ j=4=$	$n \quad 0,\ j=5=$	$n \quad 0,\ j=3$
	$n=1,\ j=2=$	$n \quad 1,\ j=3=$	$n \quad 1,\ j=1$
$N=5=$	$n \quad 0,\ j=5=$	$n \quad 0,\ j=6=$	$n \quad 0,\ j=4$
	$n=1,\ j=3$	$n \quad 1,\ j=4$	$n \quad 1,\ j=2$
	$n=2,\ j=1=$	$n \quad 2,\ j=2=$	$n \quad 2,\ j=0$
$N=6=$	$n \quad 0,\ j=6=$	$n \quad 0,\ j=7=$	$n \quad 0,\ j=5$
	$n=1,\ j=4$	$n \quad 1,\ j=5$	$n \quad 1,\ j=3$
	$n=2,\ j=2=$	$n \quad 2,\ j=3=$	$n \quad 2,\ j=1$
		$n=3,\ j=1$	
$N=7=$	$n \quad 0,\ j=7=$	$n \quad 0,\ j=8=$	$n \quad 0,\ j=6$
	$n=1,\ j=5=$	$n \quad 1,\ j=6=$	$n \quad 1,\ j=4$
	$n=2,\ j=3=$	$n \quad 2,\ j=4=$	$n \quad 2,\ j=2$
	$n=3,\ j=1=$	$n \quad 3,\ j=2=$	$n \quad 3,\ j=0$
$N=8$	$n=0,\ j \quad 8$	$=n \quad 0,\ j \quad 9=$	$=n \quad 0,\ j \quad 7=$
	$n=1,\ j=6=$	$n \quad 1,\ j=7=$	$n \quad 1,\ j=5$
	$n=2,\ j=4=$	$n \quad 2,\ j=5=$	$n \quad 2,\ j=3$
	$n=3,\ j=2=$	$n \quad 3,\ j=3=$	$n \quad 3,\ j=1$
		$n=4,\ j=1$	

Уровни энергии задаются соотношениями (при $j=0$, $\nu = j+1=1$)

$$\varepsilon = N + \frac{3}{2} + \sqrt{m^2 + 1/4}\,, \quad N = 2n + \nu\,, \ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu = j,\ j-1,\ j+1\,. \quad (25)$$

Заключение. Уравнение для частицы со спином 1 в 5-мерной форме, явно инвариантной относительно группы $SO(3.2)$, решено в статических координатах пространства анти де Ситтера. На построенных решениях диагонализируются 5-мерные операторы энергии, квадрата и третьей проекции полного момента векторной частицы. Найдено три линейно независимых решения $(j, j+1, j-1)$ типов. Найден дискретный спектр энергии векторной частицы, описано вырождение уровней.

Автор благодарит В.М. Редькова за советы и помощь в работе.

Литература

1. Dirac, P.A.M. The electron wave equation in the de Sitter space / P.A.M. Dirac // Ann. Math. – 1935. – Vol. 36, № 3. – P. 657–669.

2. Dirac, P.A.M. Wave equations in conformal space / P.A.M. Dirac // Ann. Math. – 1936. – Vol. 37. – P. 429.

3. Lubanski, J.K. Sur la representation des champs mesoniques dans l'éspace à sinq dimension / J.K. Lubanski, L. Rosenfeld // Physica. – 1942. – Vol. 9. – P. 117.

4. Goto, K. Wave equations in de Sitter space / K. Goto // Progr. Theor. Phys. – 1951. – Vol. 6. – P. 1013.

5. Ikeda, M. On a five-dimensional representation of the electromagnetic and electron field equations in a curved space-time / M. Ikeda // Progr. Theor. Phys. – 1953. – Vol. 10. – P. 483.

6. Пестов, Ф.Б. Уравнения электродинамики в сферическом мире / Ф.Б. Пестов, Н.А. Черников, Н.С. Шавохина // ТМФ. – 1975. – Т. 25, № 3. – С. 327–334.

7. Fushchych, W.L. On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space / W.L. Fushchych, I.Yu. Krivsky // Nucl. Phys. B. – 1969. – Vol. 14. – P. 573–585.

8. Castagnino, M. Champs de spin entier dans l'espace-temps De Sitter / M. Castagnino // Ann. Inst. Henri Poincaré. A. – 1970. – Vol. 13, № 3. – P. 263–270.

9. Vidal, A. On the consistency of wave equations in de Sitter space / A. Vidal // Notas Fis. – 1970. – Vol. 16, № 1. – P. 8.

10. Adler, S.L. Massless, euclidean quantum electrodinamics on the 5-dimensional unit hypersphere / S.L. Adler // Phys. Rev. D. – 1972. – Vol. 6, № 12. – P. 3445–3461.

11. Gazeau, J.P. Gauge fixing and Gupta-Bleuler triplet in de Sitter QED / J.P. Gazeau // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, № 7. – P. 1847–1854.

12. Sánchez, N. Quantum field theory and elliptic interpretation of de Sitter space-time / N. Sánchez // Nucl. Phys. B. – 1987. – Vol. 294, № 4. – P. 1111–1137.

13. Pol'shin, S. Group theoretical examination of the relativistic wave equations on curved spaces. II. De Sitter and anti de Sitter spaces / S. Pol'shin // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: gr-qc/9803092.

14. Garidi, T. Massless vector field in de Sitter universe / T. Garidi [et al.] // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: arXiv:gr-qc/0608004.

15. Отчик, В.С. Сферические волны электрического, магнитного и продольного типов в пространстве де Ситтера / В.С. Отчик, В.М. Редьков; Ин-т физики АН БССР. – Минск, 1986. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.12.86, № 8641–В86.

М. И. Полоз

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РАЗРАБОТКЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКЕ НА МЛАДШИХ КУРСАХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Одной из главных задач современного образования является адаптация учащихся к сегодняшним реалиям, привитие им навыков самообразования, творческого использования полученных знаний. Успешное решение этих задач связано с преодолением внутренних стереотипов, которые сложились в течение нескольких последних поколений. В числе основных тенденций высшего образования указываются: переход к активизирующим, развивающим способам организации вузовского учебного процесса; переход к активным формам и методам обучения с включением в деятельность студентов элементов проблемности, научного поиска, разнообразных форм самостоятельной работы; переход к такой организации взаимодействия преподавателя и студента, при которой акцент переносится с обучающей деятельности преподавателя на познавательную деятельность и индивидуальную работу студента [1].

Главной задачей педагогического вуза является формирование профессионализма учителя. Психологические аспекты этой проблемы заложены в трудах известных ученых Л.С. Выготского, П.Я. Гальперина, А.Н. Леонтьева, Н.Ф. Талызиной и др. Выделяют следующие психологические критерии подготовки специалиста: объективные, субъективные, результативные, процессуальные, нормативные, индивидуально-вариативные, прогностические, творческие, качественные и количественные, профессиональной обучаемости, профессиональной приверженности, социальной активности и конкурентоспособности профессии в обществе [2, 55–57].

Проблемы, связанные с формированием основ профессионального мастерства учителя в период его подготовки в педвузе рассматривались видными педагогами и психологами С.И. Архангельским, Т.А. Ильиной, И.А. Новик, И.Т. Огородниковым, Б.В. Пальчевским, В.П. Пархоменко, П.И. Пидкасистым, В.А. Сластениным, Н.К. Степаненковым, И.Ф. Харламовым, И.И. Цыркуном и др.

Разработке и совершенствованию методической системы обучения информатике для различных профилей посвящены труды И.Н. Антипова, В.К. Белошапка, С.А. Бешенкова, А.И. Бочкина, Ю.С. Брановского, Я.А. Ваграменко, А.Г. Гейна, В.А. Каймина, А.А. Кузнецова, А.Т. Кузнецова, Э.И. Кузнецова, А.Г. Кушниренко, М.П. Лапчика, А.С. Лесневского, В.М. Монахова, Е.В. Нашкевич, А.И. Павловского, Ю.А. Первина, В.Ф. Шолоховича и др.

Обучение при теоретическом подходе рассматривается, прежде всего, как управление учебной деятельностью, требующее новых подходов к анализу целеполагания, содержания, методов, организационных форм и средств обучения информатике на младших курсах педагогических вузов.

Качество обучения зависит от степени обоснованности трех основных узлов: цели обучения (*для чего учить*); содержания обучения (*чему учить*); принципов организации учебного процесса (*как учить*) [3].

Учебные цели (цели, которые должны быть достигнуты в результате обучения) являются исходным, системообразующим пунктом проектирования методики обучения.

Основные требования к целям: конкретность и реальность (т. е. достижимость).

Диапазон учебных целей весьма широк: от формирования свойств и качеств личности, ее способностей (отдалённые цели) до усвоения студентами конкретных видов деятельности (ближайшие цели). Вслед за А.Н. Леонтьевым [4], который считал, что задача – это «цель, заданная в определенных условиях», необходимо, прежде всего, назвать цель действия и условия выполнения. Главной особенностью целей учебной деятельности является их иерархичность: отдаленные цели нельзя достичь, минуя более близкие, последние – это средство, необходимое, но недостаточное, для достижения первых. Другой особенностью целей является их системный характер. Система целей должна быть, с одной стороны, устойчивой, с другой стороны – гибкой, то есть способной изменяться в связи с изменениями учебной ситуации.

Что же касается отдаленных учебных целей, то их нужно формулировать исходя из особенностей нашего времени. Полученные знания очень быстро «стареют», теряют свою актуальность. Поэтому отдаленные учебные цели следует задавать, исходя из необходимости воспитания грамотного, высококлассного специалиста, обладающего современным научным мышлением, способного к постоянному самообразованию, повышению своего уровня. Важное внимание следует уделить технологии самообучения, т. е. умениям и навыкам учебной работы, способствующим самостоятельному приобретению и усвоению знаний. К ним относятся: конспектирование, рецензирование, использование словарей, справочников, применение сокращений, составление каталогов, указателей и т. п. Необходимо научить всех студентов этой технологии интеллектуальной деятельности, рациональным методам работы. В XXI веке лучшие образовательные структуры будут «учить людей учиться», а тренажерами для достижения таких целей будут различные предметные срезы с действительности – знания [5].

Итак, цели образования должны быть представлены в виде иерархизированной системы: от конечных целей к целям изучения отдельных учебных дисциплин и входящих в них разделов и тем. Основание этой системы должны составлять тематические цели, выходящие на цели предмета, включающего эти темы. Обоснованием учебных целей не заканчивается начальный этап разработки методики обучения. Следующим шагом на пути к построению эффективного образовательного процесса является вопрос активизации мотивации обучающегося.

Готовность человека и его желание обучаться – один из ключевых факторов успеха образовательного процесса. Механическое принуждение к обучению не может дать высокого положительного результата. Если хорошо знать и понимать, что движет человеком, что побуждает его к действиям, к чему он стремится, можно так построить обучение, что человек сам будет стремиться выполнять свою работу наилучшим образом и наиболее результативно.

Компьютеры уже сами по себе выступают достаточно сильным фактором повышения мотивации учения. Однако начальный этап обучения в вузе всегда характеризуются разнонаправленностью мотивационных векторов обучаемых, следовательно, начальный этап должен быть направлен на приведение мотивационных векторов в сонаправленное состояние [6].

Следующим шагом процесса разработки методики при теоретическом подходе является научно-обоснованное построение содержания учебного курса.

Исследованиям по отбору содержания обучения, определению принципов и критериев посвящены работы Ю.К. Бабанского, Ю.С. Брановского, М.А. Данилова, Б.П. Есипова, Л.В. Занкова, Ю.М. Калягина, В.С. Леднева, И.Я. Лернера, В.М. Монахова, М.Н. Скаткина, А.В. Усова, Т.И. Шамова, М.В. Швецкого и др. Анализ показывает, что долгое время высшее педагогическое образование ассоциировалось с сугубо профессиональным образованием, которое было подчинено главной цели – формированию квалификационных качеств учителя определенной дисциплины для общеобразовательной школы.

Разработка содержания учебного курса должна включать следующие этапы: определение общего объема учебного материала, который планируется включать в курс; разделение материала на блоки, модули в соответствии с критериями логической полноты, целостности, завершённости, диагностируемости усвоения; структурирование, установка связей между блоками; разработка методических рекомендаций, системы задач.

Многие отечественные и зарубежные специалисты считают, что обучение в XXI веке необходимо вести на основе задач. При традиционной методике предусматривается сначала лекционное прохождение материала с возможностью его последующего закрепления на семинарах. Методика преподавания на основе задач предполагает, что перед обучаемыми ставится проблема, при решении которой они сами ищут информацию, таким образом обучаясь. Эта методика делает учебный процесс более эффективным, так как обучающийся лучше усваивает полученные знания и может выбрать оптимальный набор информации, необходимой ему в жизни.

На основании проведенного анализа работ Б. Блума [7], Н.Ф. Талызиной [8] и других мы предлагаем таксономию учебных задач по информатике [9, 36–37].

Таким образом, учитывая перечисленные выше специфические проблемы и сложности обучения информатике, при разработке методики преподавания информатики на младших курсах педагогических вузов с учетом различного начального уровня подготовки, должны быть выделены принципы и определены критерии ее использования, позволяющие:

- учитывать соответствие содержания совокупности требований государственных образовательных стандартов и требований конкретных вузов, отраженных в программах и концепциях их развития, а также выделение вариативной части содержания курса информатики;
- обеспечить реализацию принципа преемственности при преподавании информатики на этапе средней школы, а затем на младших курсах педагогических университетов;
- реализовать принцип индивидуализации для возможности выбора собственной траектории обучения;
- обеспечить принцип универсальности для возможности осуществления учебного процесса в любом вузе и любым преподавателем (обеспечивается выделением инвариантной части содержания курса).

Подводя итог проведенному выше анализу, хочется еще раз акцентировать внимание на следующих основных положениях.

Учебные цели являются исходным, системообразующим пунктом разработки методики обучения. Цели обучения должны быть представлены в виде иерархической системы – таксономии. При организации усвоения любых знаний в системе целей необходимо заранее планировать те умения (те виды деятельности), ради которых эти знания накапливаются.

Мотивация учения занимает ведущее место среди факторов, определяющих эффективность обучения. Необходимо делать акцент на достижение внутренней учебной мотивации, заключенной, как правило, в самом изучаемом материале и носящей устойчивый, продолжительный характер.

Анализ результатов исследований показал, что всюду, где это возможно, необходимо проектировать содержание образования, основываясь на деятельности с ориентировочной основой с полным составом ориентиров, которая позволяет поднять эффективность обучения на принципиально новый уровень.

Сформированные виды деятельности будут соответствовать целям обучения тогда и только тогда, когда цели представлены в виде типовых задач. Каждая задача должна включать в себя деятельность, обеспечивающую решение этой задачи. С использованием таксономии учебных задач можно конструировать систему задач для выполнения поставленных педагогических целей, более полно учитывать состав когнитивных требований к учебной ситуации, проводить диагностику знаний и уровня сформированности учебных действий студентов, а также прогнозировать ход обучения с учетом меры сложности задач и степени нагрузки на все виды проектируемой познавательной деятельности, то есть можно создавать индивидуальную программу развития обучаемых или более эффективно организовывать дифференцированную работу.

Литература

1. Попков, В.А. Дидактика высшей школы : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Попков, А.В. Коржуев. – М. : Издат. центр «Академия», 2001. – 136 с.

2. Маркова, А.К. Психологические критерии и ступени профессионализма учителя / А.К. Маркова // Педагогика. – 1995. – № 6. – С. 55–63.

3. Талызина, Н.Ф. Пути разработки профиля специалиста / Н.Ф. Талызина, Н.Г. Печенюк, Л.Б. Хихловский. – Саратов : Саратовский университет, 1987. – 176 с.

4. Леонтьев, А.Н. Психологические вопросы сознательности учения / А.Н. Леонтьев // Известия АПН СССР. – 1947. – Вып. 7. – С. 3–40.

5. Долгоруков, Ю.М. Развитие образования в условиях информатизации общества / Ю.М. Долгоруков // Вестник Московского университета. Сер. 18. – 1999. – № 4. – С. 33–51.

6. Коган, А.Ф. Диагностика целеполагания в педагогике: общие требования к построению компьютерных тестов целеполагания / А.Ф. Коган // Практическая психология и социальная работа. – 2000. – № 2. – С. 22–26.

7. Bloom, B.S. Taxonomy of Educational objectives; The Classification of Educational Goals: Hand book № 1, Cognative Domain / B.S. Bloom. – NY. : Me Kay, 1956. – 207 p.

8. Талызина, Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – М. : МГУ, 1975. – 344 с.

9. Полоз, М.И. Обучение информатике студентов с различным начальным уровнем подготовки : монография / М.И. Полоз. – Мозырь : УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2009. – 181 с.

Ж. И. Равуцкая

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ К БУДУЩЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Реформа общеобразовательной школы, предполагающая отход от единообразия в содержании, методах и формах организации образования, дала широкий простор для творческих поисков учителей-предметников, в том числе учителей физики. Анализ их деятельности показал, что предлагаемые авторские методики обучения и воспитания наполнены преимущественно эмпирическими нововведениями. Однако высокие результаты в образовании учащихся могут быть достигнуты, если процедура повседневной подготовки учителя к занятиям будет научно обоснованной и рациональной. Этим обусловлена необходимость актуализации такой специальной сферы профессиональной деятельности педагога, как педагогическое проектирование.

Процесс педагогического проектирования исследовался в работах В.С. Безруковой [1], В.П. Беспалько [2], С.И. Высоцкой [3], Л.И. Еруновой [4], Н.В. Кузьминой [5], Н.А. Масюковой [7], Б.В. Пальчевского [7], В.А. Сластенина [8] и др.

Изучение проектировочной деятельности педагога и специфики форм организации учебных занятий по физике послужило основой развития идеи методического проектирования. *Методическое проектирование представляет собой деятельность по переводу процесса обучения из состояния сущего (исходного состояния педагогической деятельности) в должное (идеальное представление о возможном и должном уровне педагогической деятельности), предвосхищение предполагаемого процесса и результата обучения с учётом всего комплекса необходимых и достаточных методических средств, обстоятельств и условий.*

Специфика методического проектирования заключается в следующем. Оно не сводится к обдумыванию лишь действий педагога, содержания и возможностей использования педагогических средств, а осуществляется с ориентацией на учащихся, на группу школьников и каждого в отдельности. Следовательно, педагог достигает успеха, если при проектировании учебного процесса главными «точками отсчёта» для себя он считает учащихся, их потребности, их готовность к работе над предметом на данной стадии обучения, их способность к саморазвитию и вооружает их соответствующими методами.

Учитель не должен, да и не может быть простым исполнителем разработанных другими проектов. Проектировочная деятельность осуществляется учителем на основе его собственных представлений о целесообразности той или иной трансформации учебного материала, о наиболее подходящих способах реализации методов обучения, об организационных формах обучения и т. д., что составляет для учителя концептуальную базу самостоятельного проектирования. При этом его возможности во многом определяются качеством его педагогической, психологической, методической и другой научной подготовки, уровнем профессионализма.

Необходимо выделить два аспекта методического проектирования: альтернативность и многоуровневость. Альтернативность заключается в том, что один и тот же результат обучения может быть достигнут при реализации различных проектов. Многоуровневость предполагает выделение нескольких уровней проектирования. В научной литературе выделены следующие уровни: проектирование изучения материала курса в целом; проектирование изучения темы; проектирование отдельного урока; конкретизация базовой модели урока с учётом конкретных групп учащихся и отведённого на обучение времени; проектирование отдельных (как потенциально возможных) ситуаций на уроке; проектирование способов и средств создания проблемных ситуаций и поэтапного процесса их разрешения. Мы ограничимся рассмотрением двух уровней проектирования: проектирования учебного занятия и системы учебных занятий по теме.

Опираясь на теорию деятельности, разработанную А.Н. Леонтьевым [6], рассмотрим способы проектировочной деятельности как системы на трёх иерархических уровнях: деятельностном, действенном и операционном. На макроуровне в состав этой деятельности входят следующие макроэлементы: научно-методический поиск, разработка методического проекта и его экспертиза (рисунок).

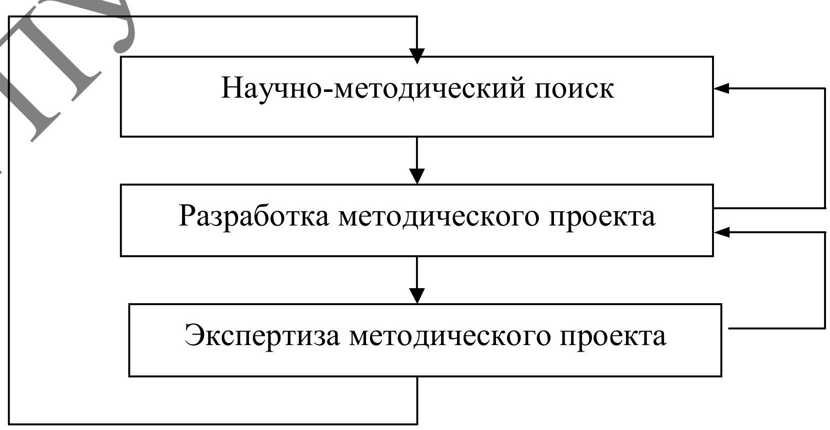


Рисунок – Компоненты модели проектировочной деятельности учителя физики на деятельностном уровне

Научно-методический поиск включает следующие действия: диагностика подготовки учащихся по физике и уровня их развития; определение собственных профессиональных возможностей; определение адекватной методической стратегии обучения физике. Разработка методического проекта осуществляется на уровне учебного занятия и системы учебных занятий по теме посредством выполнения следующих действий: формулирование целей и задач обучения физике; отбор содержания учебного материала по физике; выбор адекватных методов и методических приемов обучения физике; выбор оптимальной системы форм учебных занятий по физике. Экспертиза методического проекта проводится в два этапа: теоретический и экспериментальный. Каждое из выделенных действий проектировочной деятельности можно представить в виде совокупности операций (таблица 1).

Представленная модель охватывает все аспекты проектировочной деятельности учителя физики, учитывает специфику методического проектирования и является основой для разработки системы методической подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности.

Реализация специальной подготовки будущего учителя физики к проектированию учебных занятий осуществляется поэтапно: пропедевтика – школа по проектированию – создание методических произведений.

Пропедевтический этап формирования проектировочных умений включает проведение лекций, семинарских и практических занятий, организацию и проведение педагогической практики и предполагает:

– мотивацию проектировочной деятельности будущего учителя физики;

– ознакомление со структурой проектировочной деятельности и системой проектировочных умений;

– ознакомление с содержанием каждого проектировочного умения, со способами выполнения действий по проектированию учебного процесса;

– осознанное применение и усвоение полученных знаний при выполнении отдельных заданий;

– отработку проектировочных умений в процессе самостоятельного применения усваиваемого действия в новой ситуации.

Предметной основой формирования проектировочных умений будущего учителя физики на этапе пропедевтики является курс методики преподавания физики.

В лекционный курс по методике преподавания физики включена дополнительная тема «Научные основы проектирования учебных занятий по физике». В цикле лекций по данной теме определена значимость проектирования в профессиональной деятельности учителя физики, раскрыты методологические основы проектирования, обоснована структура проектировочной деятельности учителя физики. Особое внимание уделяется специфике проектирования учебных занятий по физике.

Таблица 1 – Компоненты модели проектировочной деятельности учителя физики на действенном и операционном уровнях

Действия	Операции
Диагностика подготовки учащихся по физике и уровня их развития	Определение уровня усвоения знаний Определение уровня сформированности мыслительных операций Определение уровня и характера познавательного интереса
Определение собственных профессиональных возможностей	Определение уровня профессиональной деятельности Определение индивидуального стиля деятельности
Определение адекватной методической стратегии обучения физике	Осуществление типологии учащихся по способностям к учению Выбор методической стратегии обучения
Формулирование целей и задач обучения физике (на уровне учебного занятия и системы учебных занятий по теме)	Формулирование целей и задач обучения с помощью ключевых глаголов Определение промежуточных и конечных результатов обучения (критериев эффективности) Осуществление перевода цели в тестовое задание
Отбор содержания учебного материала по физике (на уровне учебного занятия и системы учебных занятий по теме)	Уточнение границ материала, подлежащего усвоению Поэлементный анализ учебного материала темы Определение основных и вспомогательных дидактических единиц темы Разработка логической структуры темы Определение и разработка оптимальных способов предъявления материала Установление межпредметных связей Установление возможных источников дополнительного материала Установление требуемого уровня усвоения материала Выбор вида познавательной деятельности учащихся
Выбор адекватных методов и методических приемов обучения физике (на уровне учебного занятия и системы учебных занятий по теме)	Определение дидактических возможностей различных методов обучения физике Выбор методов, наиболее полно реализующих цель обучения с учётом особенностей класса Разработка оптимального сочетания выбранных методов Учёт умственной работоспособности учащихся и частоты смены видов деятельности на занятии
Выбор оптимальной системы форм учебных занятий по теме курса физики	Распределение вопросов программы по занятиям Выбор системы форм учебных занятий с учетом отобранного материала, методов обучения и особенностей класса Анализ выбранной системы с точки зрения оптимальности решения поставленных задач
Проведение теоретической экспертизы методического проекта	Самооценка, самоконтроль текущей педагогической деятельности Оценка проекта экспертным советом педагогов
Проведение экспериментальной экспертизы методического проекта	Постановка целей и задач педагогического эксперимента Определение критериев эффективности методического проекта Проведение педагогического эксперимента Анализ, обобщение и интерпретация полученных результатов Уточнение методического проекта, его коррекция Формулирование выводов

Теоретический курс в форме лекций дополняется семинарскими и практическими занятиями. На семинарском занятии «Содержание проектировочной деятельности учителя физики» представляются способы выполнения отдельных действий проектировочной деятельности. На практических занятиях проводится отработка представленных действий посредством выполнения будущими учителями специальных заданий. В качестве примера рассмотрим отдельные задания.

1. Подберите систему уровневых задач для диагностики усвоения опорных знаний на учебном занятии «Закон Ома для участка электрической цепи».

2. Составьте библиографический указатель статей журналов «Физика в школе» и «Фізіка: праблемы выкладання» за три последних года, материалы которых целесообразно использовать при осуществлении методического проектирования.

3. С помощью ключевых глаголов сформулируйте цель и задачи изучения темы «Электрические явления».

4. Составьте структурно-логическую схему изучения темы «Магнитное поле».

В процессе прохождения педагогической практики будущие учителя выполняют задания, которые позволяют им исследовать процесс обучения физике непосредственно в школе. Во время практики предполагается выполнить задания следующего типа:

1. Опираясь на метод экспертной оценки, осуществите типологию учащихся класса по учебным возможностям, их количественное распределение.

2. Разработайте методический проект организации учебных занятий по теме: осуществите научно-методический анализ темы, составьте прогноз уровня усвоения основных знаний и умений темы, определите основные дидактические задачи темы, разработайте технологию достижения каждой дидактической задачи.

3. Выявите понятийную базу учащихся и их «донаучные» представления, которые могут быть использованы при изучении темы.

4. Охарактеризуйте особенности усвоения программного материала различными категориями учащихся.

5. Коротко опишите процесс реализации методического проекта.

6. Проведите анализ опыта работы учителя физики.

Пропедевтический этап завершается анализом созданных будущими учителями первых методических произведений: творческих рефератов, описаний практики обучения физике, проектов отдельных учебных занятий по физике.

Второй этап формирования проектировочных умений будущего учителя физики – школа по проектированию – представляет собой проведение тренингов по формированию умений в рамках спецкурса «Проектирование учебных занятий по физике», рассчитанного на 34 часа (таблица 2).

Таблица 2 – Тематический план спецкурса «Проектирование учебных занятий по физике»

Темы	Количество часов				
	Теоретический модуль	Практический модуль			
		семинары	практикумы	деловые и дидактические игры	посещение уроков в школе
1. Вводное занятие	2				
2. Методологические основы проектировочной деятельности	2				
3. Модель проектировочной деятельности учителя физики		2			
4. Диагностический этап процесса проектирования учебных занятий по физике	2		2		
5. Формулирование целей и задач обучения физике	2		2		
6. Научное обоснование отбора содержания учебного материала по физике		2	2		
7. Определение методов и методических приемов обучения физике	2		2		
8. Разработка оптимальной системы форм учебных занятий по физике		2	2		
9. Экспертиза разработанного методического проекта				2	
10. Итоговое занятие				4	2
Всего:	10	6	10	6	2

Основная цель спецкурса – овладение будущими учителями специальными знаниями о проектировании учебных занятий по физике и развитие умений, обеспечивающих высокий уровень их готовности к проектировочной деятельности.

Проведение спецкурса целесообразно по той причине, что будущие учителя уже имеют определённую подготовку по специальности, психолого-педагогическим и методическим дисциплинам и могут углублённо заниматься специальными вопросами, связанными с их будущей деятельностью. Кроме того, после прохождения первой педагогической практики они осознают трудности, с которыми придётся встретиться в школе, недостаток своих педагогических и методических знаний для их преодоления и в связи с этим необходимость пополнения этих знаний и приобретения определённых умений. Поэтому будущие учителя, как правило, работают в спецкурсе активно и с интересом. Этот интерес необходимо поддерживать и использовать.

Тренинги по формированию умений проводятся на материале школьного курса физики по конкретным темам.

Расширение и углубление подготовки будущего учителя к проектировочной деятельности осуществляется в процессе создания методических произведений.

Одной из форм методических произведений является методический проект, который оценивается по следующим критериям: научное обоснование (использование эмпирических фактов, передовых педагогических идей), проработанность, реальность выполнения. Защита методического проекта проводится в малой группе. При защите можно использовать метод дискуссии, отрабатывать умения критиковать и отстаивать свой проект, разрабатывать и использовать средства наглядности. Осуществление трансляции методических проектов возможно посредством представления их на выставке методических произведений, а также применения студентами в своей работе во время педагогической практики.

Обогащение методической подготовки студентов на этапе создания методических произведений можно организовать посредством работы в проблемных группах. Научными направлениями работы таких групп могут быть следующие: научно-педагогический опыт проектирования учебных занятий; прогрессивный педагогический опыт обучения физике (анализ теории и практики), научные основы методической подготовки учителя физики, обоснование модели обучения физике, курса обучения физике и др. Например, программа работы в проблемной группе «Прогрессивный педагогический опыт обучения физике» может включать в себя следующие модули: введение; функции педагогического опыта в методическом творчестве учителя физики; прогрессивный педагогический опыт обучения физике; методические системы прогрессивно работающих учителей физики; уроки физики новых типов; модернизация и усовершенствование традиционных уроков; новые методические приёмы обучения физике; развитие самостоятельности учащихся, индивидуализация и дифференциация обучения физике; изучение и обобщение прогрессивного педагогического опыта работы учителей физики.

Литература

1. Безрукова, В.С. Педагогика / В.С. Безрукова. – Екатеринбург : Изд-во «Деловая книга», 1996. – 344 с.
2. Беспалько, В.П. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов : учеб.-метод. пособие / В.П. Беспалько, Ю.Г. Татур. – М. : Высш. школа, 1988. – 144 с.
3. Высоцкая, С.И. Дидактико-методологический подход к анализу деятельности учителя в процессе обучения / С.И. Высоцкая // Методологические проблемы современной педагогической науки и практики. – Челябинск : ЧГПИ, 1988. – С. 90–102.
4. Ерунова, Л.И. Урок физики и его структура при комплексном решении задач обучения: Кн. для учителя / Л.И. Ерунова. – М. : Просвещение, 1988. – 158 с.
5. Кузьмина, Н.В. Очерки психологии труда учителя / Н.В. Кузьмина. – Л. : ЛГУ, 1967. – 183 с.
6. Леонтьев, А.Н. Деятельность, сознание, личность / А.Н. Леонтьев. – М. : Политиздат, 1975. – 304 с.
7. Пальчевский, Б.В. Педагогическое проектирование и программирование в рамках ИПК / Б.В. Пальчевский, Н.А. Масюкова // Адукацыя і выхаванне. – 1997. – № 3. – С. 16–27.
8. Сластёнин, В.А. Педагогика / В.А. Сластёнин, И.Ф. Исаев, Е.Н. Шиянов. – М. : Школа-Пресс, 1998. – 512 с.

А. Т. Ребко

ОРГАНИЗАЦИЯ ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ НА ОСНОВЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА

Анализ литературных источников и практика показывают, что инновационные технологии в современной школе пока не являются доминирующими. Это подтверждает необходимость сочетания традиционных методов с инновационными в процессе формирования системы профессиональных знаний и умений будущих учителей физики.

Инновационная деятельность предполагает освоение и внедрение в учебный процесс результатов научно-педагогических исследований, подтвердивших свою эффективность в результате эксперимента, а также использования дидактических технологий и проектов, направленных на повышение качества образования. Компонентами системы инновационной деятельности педагогов являются обобщение и применение передового опыта, новых достижений в области психологии, педагогики, методики обучения физике, совершенствования педагогического мастерства, направленных на развитие интеллектуальных и творческих подходов к решению учебно-воспитательных задач, освоение и применение различных современных средств обучения [1]–[3].

В педагогическом вузе необходимо готовить специалистов способных ориентироваться в современном информационном пространстве, создавать компьютерные версии изучаемых явлений, подбирать оптимальные программы и информационно-компьютерные технологии. Формирование отмеченных выше качеств будущих учителей физики решается успешно на основе учёта и развития их познавательного интереса в сочетании с управляемой самостоятельной деятельностью.

Суть познавательного интереса заключается в стремлении обучаемого проникнуть в изучаемую область более глубоко и основательно, в постоянном побуждении заниматься предметом своего интереса [4], [5]. Реализации этого способствуют такие особенности курса физики, как стройность и красота теории, возможность экспериментальной проверки, наблюдения, использования и проявления в различных сферах окружающей действительности.

Вовлечение студентов в инновационную деятельность основывается на той практической базе, которая была сформирована в период обучения их в средней общеобразовательной школе. При изучении подготовленности первокурсников к такой работе мы заметили, что чаще всего приходится начинать с минимального уровня, то есть они не готовы получать профессиональные знания и умения. Процесс развития интереса к предмету идёт более успешно, если использовать как основу тот материал, те сведения, которые получают молодые люди из доступных источников информации.

Использование информационно-образовательных ресурсов сети Интернет позволяет студентам отыскать нужный материал для рефератов, докладов, курсовых и дипломных работ, знакомиться с новейшими научными открытиями и техническими достижениями. Современные средства позволяют записывать нужную информацию, в удобное время воспроизводить и при этом ускорять, замедлять, повторять фрагменты для уточнения, анализа, проверки и объяснения сути, привлекая различные приёмы умственной деятельности. Очень важно, чтобы один и тот же факт объяснялся с различных точек зрения, которые необходимо обобщать и формулировать правильный вывод.

Для решения вопросов в аспекте исследуемой проблемы целесообразно использовать следующие приёмы формирования познавательного интереса:

1. Привлечение примеров из техники и повседневной жизни.

2. Обсуждение фактов использования физических законов в цирковом искусстве, кино, телевидении, спорте.

3. Использование софизмов и парадоксов.

4. Экскурсы в историю физики и техники.

5. Рассмотрение примеров из художественной литературы.

6. Анализ фантастических ситуаций, бытующих предрассудков.

Как это осуществлять без реакции отторжения, попытаемся показать на примере просмотра захватывающего телешоу «Битва титанов», показанного по ОНТ. Эту передачу смотрели с удовольствием взрослые и дети, относясь к ней как к увлекательному отдыху.

После первой передачи студентам-первокурсникам была предложена программа просмотра, анализа и обобщения конкурсов на предмет проявления в них основных законов и явлений физической науки.

После целенаправленного просмотра телешоу «Битва титанов» мы пришли к заключению, что, пренебрегая объективными проявлениями физических закономерностей, тренеры и руководители команд допускали ошибки при расстановке участников по конкурсам с учётом их физических данных и возможностей. Сами же участники соревнований в процессе азартных выступлений, не учитывая требований элементарных законов природы, имели досадные срывы в действиях и, как итог, низкие результаты.

В ряде конкурсов, например «Шляпы», «Поликлиника», участникам необходимо было преодолеть вращающую платформу. Неудача постигла тех, кто никак не учитывал центробежную силу инерции, которая действует на тело во вращающейся системе отсчета, направленную в сторону от оси вращения и определяемую по формуле $F = mw^2 R$. Если угловая скорость была задана условиями конкурса, то массы тел участников отличались по значению и успех, как правило, имели представители китайской команды. Расстояние до оси вращения R можно было уменьшать, если пытаться прыгать на платформу как можно подальше от края. В ходе конкурсов было заметно, как опытные участники при падении пытались ползти и затем вставать в направлении к оси вращения. Те, кто этого не учитывал, попадали в бассейн с водой.

В конкурсах «Жирафы на велосипедах» участники попадали в сложные ситуации, если забывали о том, что масса тела – мера его инертности при поступательном движении. Особенно это ярко проявлялось при изменении направления движения и при беге в массивных и габаритных костюмах.

В конкурсах «Танцплощадка», «Кочки» успешно выступали «низкорослые участники», так как центр тяжести у них находится ниже, да ещё и наклонялись они сознательно в сторону, противоположную наклону опорной поверхности. Телеведущая недоумевала, почему это участники китайской команды прислонились лбами к стене, в то время как высокие и стройные братья Колдуны, гордо стоящие с гитарами в руках, слетели с той же наклонной плоскости за минимальное время.

При выполнении конкурса «Необитаемый остров» члены Российской сборной сгруппировались не в центре «острова» и тут же потеряли равновесие. Они совсем не взяли во внимание опыт членов китайской команды, выступавшей до этого, которые расположились строго симметрично и поближе к центру «острова», да ещё и наклонились немного в ту же сторону.

Модуль средней силы взаимодействия сил при столкновении очень сильно зависит от времени соударения, то есть $F = \Delta(mv)/\Delta t$. Чем меньше Δt, тем больше F. Участники соревнования совсем не учитывали эту закономерность, преодолевая препятствия, представляющие собой накачанные воздухом резиновые «деревья». Им следовало снижать скорость движения, при малой силе противодействия легче проскальзывать через такой «лес».

Результаты всех конкурсов подтвердили справедливость утверждения «у кого знания, у того и сила».

Совсем недавно по программе ОНТ сообщили о создании в г. Варшава музея физики и необычных явлений. Там на современных приборах, сложном техническом оборудовании на доступном уровне показывают проявления законов физики, имитируя цунами, ковер-самолет на воздушной подушке, мыльные пузыри, различные электромагнитные эффекты.

Интересные вопросы физического содержания встречаются и на интеллектуальной игре «Один против всех», показываемой по первому белорусскому каналу. Ответы на физические вопросы подтверждают уровень интереса и отношения к этой науке.

В условиях изменяющегося высшего и среднего образования продуманное использование таких и других подобных телепроектов, например реалити-шоу «Зачистка», может входить в систему работы с различными группами студентов. Они затем перенесут такой опыт в школу, во время педагогической практики и будут использовать в профессиональной деятельности по окончанию университета.

Литература

1. Кульбицкий, Д.И. Методика обучения физике в средней школе : учебное пособие для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего педагогического образования по физическим специальностям / Д.И. Кульбицкий. – Минск : ИВЦ Минфина, 2007. – 220 с.
2. Цыркун, И.И. Методическая инноватика / И.И. Цыркун. – Минск : БГПУ,1996. – 152 с.
3. Цыркун, И.И. Инновационное образование педагога: на пути к профессиональному творчеству : пособие / И.И. Цыркун, Е.И. Карпович. – Минск : БГПУ, 2006. – 311 с.
4. Ланина, И.Я. Не уроком единым. Развитие интереса к физике / И.Я. Ланина. – М. : Просвещение, 1991. – 223 с.
5. Щукина, Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике / Г.И. Щукина. – М. : Просвещение, 1971. – 24 с.

В. С. Савенко, А. И. Бежанова, Л. М. Анопреенко,
Н. Н. Чемрова, А. С. Каленик

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Электропластический эффект (ЭПЭ) был обнаружен в 1969 году при действии одиночными импульсами тока плотностью $\sim 10^5$ А/см^2 и длительностью $\sim 10^{-4}$ с на деформацию кристаллов цинка растяжением и сжатием. Он проявлялся в скачкообразных удлинениях образцов при прохождении по ним каждого импульса тока без какого-либо существенного теплового эффекта и без тепловой дилатации образцов. ЭПЭ фиксируется на всех без исключения исследованных проводящих и в той или иной степени пластичных материалах при различных видах нагружения образцов, включая сжатие и более сложные напряженные состояния [1].

При пропускании через металлические монокристаллы импульсов электрического тока с плотностью от 50–1000 А/мм^2 и длительностью 10^{-4} с наблюдается перераспределение деформации двойникованием в окрестностях концентраторов механических напряжений [2], [5]–[8].

Специальными опытами было установлено, что эффект частично связан с пондеромоторным пинч-действием импульсного тока – сжатием образцов в радиальном направлении собственным магнитным полем тока, который на использованных образцах диаметра ~ 1 мм пинч-эффект имел определенное значение.

В приближении бесконечного проводника, по которому протекает ток с локальной плотностью до J_m и с нулевой компонентой перпендикулярно оси образца, при параллельности напряженности электрического тока E оси образца и когда собственное магнитное поле тока H не имеет компоненты вдоль оси проводника, а поле Холла является потенциальным, могут реализоваться отдельные вклады составляющих кооперативного явления электропластической деформации металлов (ЭПДМ) в суммарный эффект действия тока.

Они включают в себя все известные в теории пластичности металлов взаимодействия дислокаций с точными дефектами и примесями, динамические температурные явления, поляризацию проводника с током, динамическую неустойчивость скоплений дислокаций и т. д., что необходимо иметь в виду при рассмотрении приложимости главного механизма пластической деформации металла – термофлуктуационного открепления дислокаций от стопоров к явлениям ЭПЭ и ЭПДМ.

Указанные процессы лежат в основе деформационного упрочнения и описываются основным уравнением кинетики пластической деформации металлов:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0^* \cdot \exp[U - (\sigma - \sigma_i)\frac{v}{k_{\acute{A}}\grave{O}}], \qquad (1)$$

где ε^* – скорость пластической деформации;

$\varepsilon^*{}_0$ – экспоненциальный множитель, пропорциональный характеристической частоте колебаний дислокационных сегментов;

U – энергия, необходимая для преодоления дислокацией стопора;

v – активационный объем указанного взаимодействия;

$k_Б$ – постоянная Больцмана;

T – температура металла.

Приведенное уравнение позволяет рассмотреть связанные с током и сопутствующими ему электромагнитными полями физические эффекты, оказывающие влияние на скорость пластической деформации металла ε^* как через образование дополнительных напряжений, добавочных к напряжениям σ, создаваемым нагружающим устройством, так и изменения параметров энергии активации U активационного объема v процессов взаимодействия дислокаций со стопорами.

Несомненно и физически обосновано наличие в ЭПЭ давления «электронного ветра» на дислокации с величиной силы давления F_e на единицу длины дислокации по формуле

$$F_e = B_e \cdot v_e, \qquad (2)$$

где B_e – коэффициент электронного торможения дислокаций;

v_e – дрейфовая скорость электронов, определяемая по формуле

$$v_e = \frac{J}{e \cdot n}, \qquad (3)$$

где e, n – заряд и концентрация электронов проводимости.

Первоначально в расчетах В.Я. Кравченко, выполненных на основе первого борновского приближения, считалось, что $B_e = 10^{-6}$ г/см·с, но она давала значения силы давления «электронного ветра» значительно меньшие, чем наблюдавшая в эксперименте величина ЭПЭ [3].

В последующем А.М. Рощупкиным в 1979 г. было получено выражение $B_e = 4hn$, где h – постоянная Планка с численным значением $B_e = 10^{-4}$ г/см·с, находящимся в большем согласии с экспериментальными данными по ЭПЭ [4].

Наложение во взаимно перпендикулярных направлениях электрического и магнитного поля на проводящий кристалл приводит к изменению концентрации носителей тока у индентируемой грани и, вследствии этого, к изменению ее поверхностной энергии.

Клиновидные двойники создаются полем неоднородного напряжения алмазного индентора на плоскости спайности двойникующихся кристаллов. Поскольку двойниковый клин растет за счет перемещения смешанных двойникующих дислокаций, можно оценить процессы взаимодействия дислокаций со свободной поверхностью.

Измерения проводились на свежесколотой плоскости спайности (111) монокристаллов висмута технической чистоты.

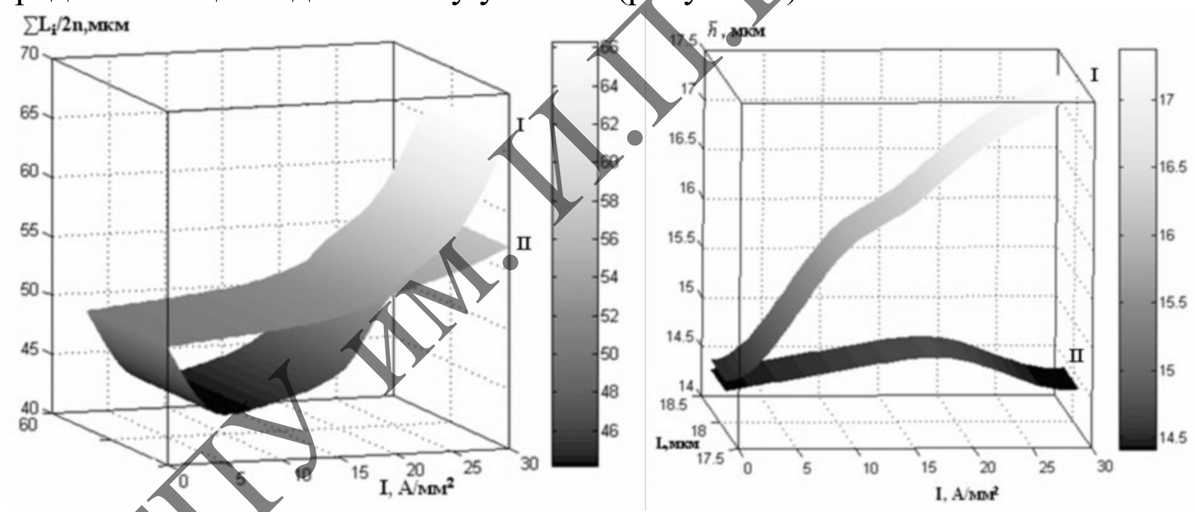
Кристалл закреплялся между массивными медными электрическими контактами в геометрическом центре сердечника, где магнитное поле наиболее однородно. Импульс тока через кристалл создавался путем разрядки батареи конденсаторов. Длительность импульса составляла 10^{-4} с, форма была близка к треугольной.

Для изучения двойникования нагружением в «точке» была изготовлена специальная приставка к стандартному микротвердомеру ПМТ-3, которая позволила проводить индентирование в условиях возбуждения электронной подсистемы кристаллов электромагнитными полями. С целью устранения искажения магнитного потока ферромагнитными деталями оборудования и действия сил электромагнитного давления все детали установки и нагрузочного узла микротвердомера были сделаны из диамагнитных материалов, имеющих коэффициент магнитной восприимчивости $x = 10^{-5}$. Во избежание искажения магнитного поля стальным предметным столиком микротвердомера образец и нижний срез сердечника электромагнита располагались на достаточно большой высоте от столика (10–15 см) [2].

Использовался метод повторного опускания индентора в то же место. Импульсы тока без механических напряжений дополнительного двойникования не вызывают. Для устранения возможного влияния МПЭ кристалл в процессе измерения постоянно находился в области магнитного поля. Спустя 5 с после повторного опускания индентора в индентированое поле через кристалл пропускался импульс тока. Индентирование без импульса тока не дает заметного изменения картины двойникования. Индукция магнитного поля в образце была постоянной и равнялась 0,22 Тл. Поскольку на развитие отдельных двойников в большой степени влияют локальные особенности кристаллической структуры в окрестности двойниковых границ, число отпечатков составляло не менее 20. Полученные экспериментальные зависимости строились компьютерным способом с помощью MATLAB 7.0.1.

На рисунках 1–6 приведены зависимости количественных характеристик двойникования от плотности тока в импульсе при постоянном значении магнитного поля. Наличие отрицательного потенциала (на рисунках графики I) на индентируемой плоскости обеспечивает избыточную электронную и дырочную концентрации, что приводит к повышению поверхностной энергии. На рисунках графики II соответствуют положительному потенциалу на индентируемой плоскости. Недостаток электронов и дырок у этой плоскости ведет к понижению поверхностной энергии. Из графика видно, что индентирование висмута в условиях одновременного возбуждения его электронной подсистемы электрическим и магнитным полями приводит к его существенной пластификации за счет дополнительной деформации двойникованием.

Средний пробег $\frac{\sum L_i}{2n}$ ($\sum L_i$ – суммарная длина двойниковых лучей, $2n$ – общее количество двойников) двойникующих дислокаций увеличивается с возрастанием плотности тока в импульсе при положительном потенциале индентируемой плоскости без изменения средней толщины двойника у устья $\bar{h}$ (рисунок 1).

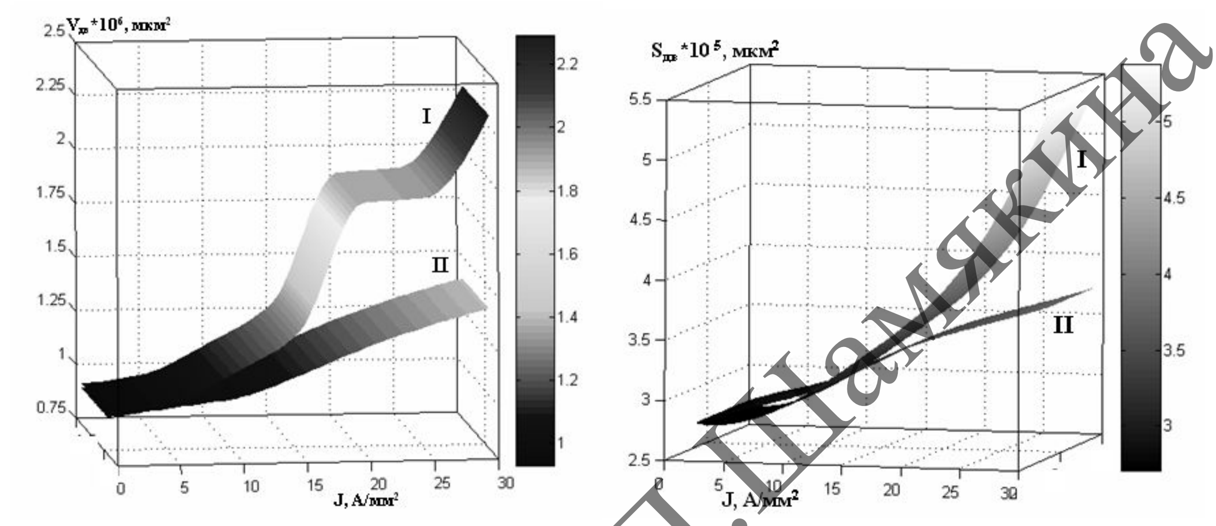


а б

Рисунок 1 – Зависимость средней длины пробега двойникующих дислокаций (а) и средней ширины двойниковых лучей у устья (б) от плотности тока в импульсе при отрицательном (I) и положительном (II) потенциале индентируемой плоскости спайности висмута

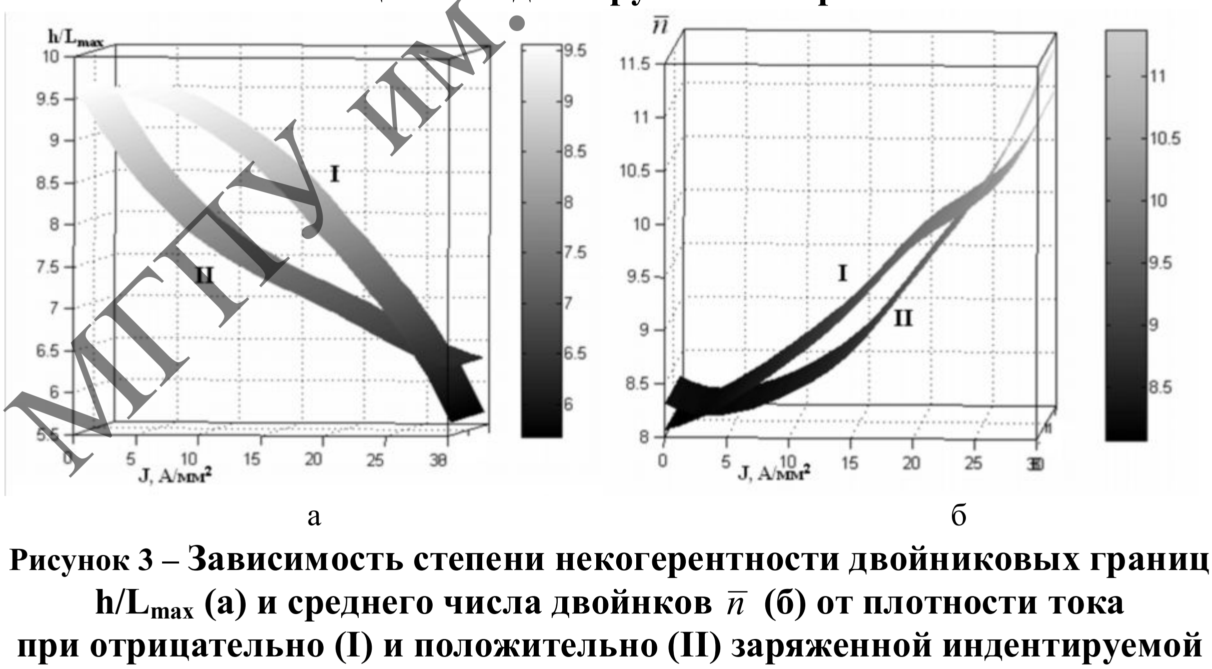
В этом случае уменьшение поверхностной энергии облегчает пробег дислокаций и не интенсифицирует работу поверхностных источников дислокаций. При отрицательном потенциале на индентируемой грани увеличивается как средний пробег двойникующих дислокаций, так и средняя толщина двойников у устья.

Следствием возбуждения поверхностного состояния кристалла электромагнитными полями является увеличение суммарного сдвойникованного объема Vдв и суммарной площади двойниковых границ Sдв (рисунок 2). При этом увеличение сдвойникованного объема происходит не только за счет роста «старых» двойников, но и за счет появления новых – «электродвойников» (рисунки 2 и 3б).



а б

Рисунок 2 – Зависимость суммарного сдвойникованного объема Vдв (а) и суммарной площади границ раздела двойников Sдв (б) от плотности тока в импульсе при отрицательном (I) и положительном (II) потенциале индентируемой поверхности



а б

Рисунок 3 – Зависимость степени некогерентности двойниковых границ h/L_{max} (а) и среднего числа двойнков $\overline{n}$ (б) от плотности тока при отрицательно (I) и положительно (II) заряженной индентируемой плоскости спайности монокристаллов висмута

Возбуждения поверхностного состояния кристалла электромагнитными полями приводит к уменьшению степени некогерентности двойниковых границ h/L_{max}, т. е. к уменьшению плотности двойникующих дислокаций на границах раздела (рисунок 3).

Из графиков можно видеть, что все количественные характеристики дополнительного двойникования обнаруживают полярный характер в зависимости от взаимной ориентации вектора поля Холла в образце и индентируемой грани. Эту зависимость невозможно объяснить действием напряжений, создаваемых силой Ампера, поскольку скалывающее напряжение за счет этой силы $\tau = I_{\max} BL / al$ для используемых плотностей тока на два порядка меньше, чем скалывающее напряжение для двойникующих дислокаций $\tau = P / L_{\max}^2$. Здесь I_{max} – максимальная сила тока, l и a – длина и ширина образцов, P – нагрузка на штоке индентора, L_{max} – максимальная длина двойникового луча. Как показывает расчет, суперпозицией внешнего магнитного поля и собственного магнитного поля на поверхности образца можно пренебречь. Полученные результаты невозможно объяснить и на основе классического электропластического эффекта, так как в этом случае плотность пластифицирующего импульса ограничена снизу порогом в 50–70 А/мм^2.

Пластификация монокристаллов висмута при одновременном наложении на них электромагнитных полей может быть объяснена только взаимодействием двойникующих дислокаций с возбужденной свободной поверхностью. Перемещение винтовой составляющей двойникующей дислокации на одно межатомное расстояние по плоскости спайности сопровождается появлением характерной ступеньки. При этом на создание новой ячейки затрачивается энергия $b^2\gamma$, где b – вектор Бюргерса, γ – поверхностная энергия. Для преодоления этой силы, распространяющейся в глубь кристалла на несколько b и действующей в непосредственной близости от поверхности, необходимо дополнительное локальное скалывающее напряжение $\Delta\tau$, которое при T = 0 находится по формуле:

$$\Delta\tau = \frac{|\mathrm{grad} U(z)|}{b^2}, \qquad (4)$$

где U(z) – поверхностный потенциальный барьер.

Увеличение поверхностной энергии противодействует силе зеркального изображения, что притягивает к поверхности краевую компоненту двойникующей дислокации как неустойчивый объект, имеющий избыточную свободную энергию. Эта сила определяется медленно меняющимся логарифмическим потенциалом. Подобный подход хорошо описывает поведение ЭПЭ как при положительном, так и отрицательном потенциале индентируемой грани.

Висмут химической чистоты (с примесью свинца) при $B \perp c$ (с – тригональная ось ромбоэдрической решетки висмута) имеет отрицательное значение постоянной Холла $R < 0$. Следовательно, при такой геометрии приложения полей образец будет иметь электронный тип проводимости. Электронная жидкость, диффузно рассеиваясь на свободной поверхности, компенсирует положительный потенциал на одной грани монокристалла висмута и увеличивает отрицательный потенциал на противоположной грани, заряженной в результате холловской поляризации материала. Результатом этого процесса является падение величины эффекта пластификации в области послепороговых значений плотностей тока по причине значительного увеличения поверхностной энергии.

Литература

1. Троицкий, О.А. Электропластический эффект в металлах / О.А. Троицкий // Проблемы прочности. – 1984. – № 2. – С. 103–106.
2. Савенко, В.С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешний энергетических воздействий / В.С. Савенко. – Минск, 2003 – С. 110.
3. Кравченко, В.Я. Воздействие направленного потока электронов на движущиеся дислокации / В.Я. Кравченко // Журнал экспериментальной теоретической физики. – 1966. – Т. 51, вып. 6(12). – С. 1676–1688.
4. Roshcnupkin, A.M. [et al.] // Phys. stat. sol. (b). – 1989. – Vol. 151. – P. 121.
5. Савенко, В.С. Электронно-пластический эффект при двойниковании монокристаллов висмута / В.С. Савенко, В.И. Спицын, О.А. Троицкий // Доклады академии наук СССР. – 1985. – Т. 283, № 5. – С. 1181–1183.
6. Savenko, V. Electroplastic effect under the simultaneous superposition of electric and magnetic fields / V. Savenko // Journal of applied physics. – 1999. – № 5. – P. 1–4.
7. Savenko, V. Plastificaition of Bismuth Crustal under Simultaneous Superposition of Electric and Magnetic Fields / V. Savenko // Zeitschrift fur METALLKUNDE. – Munchen, 1998. – № 7. – S. 498–500.
8. Savenko, V.S. STRUCTURAL FEATURES of the fast HARDENED METAL PAPERSof ALLOYS Bi-15 at. % Sb / V.S. Savenko V.G. Chepelevich E.E. Gretchannikov // The second international conference «Materials and covers in extreme conditions: researches, application, non-polluting "know-how" and salvaging of items», Kiev, 2002. – P. 331–332.

V. S. Savenko

ELECTROPLASTIC EFFECT AT TWINNING METALS

Use of pulses of a current of high density, electric and magnetic fields, ionic implantation have allowed to intensify plastic deformation of metals, thus, giving a basic opportunity of management of plastic deformation twinning with the help of forces of the nonmechanical nature, influencing on conditions and character of hardening of a material by means of controllable twinning.

Fundamental and applied problems of modern materiology on increase of a production efficiency, and increase of its technological level are defined by necessity of creation of a complex of high physicomechanical properties of materials for extreme physical conditions with high service characteristics. The basic kinds of plastic deformation of crystal bodies are sliding and twinning. In spite of the fact that twinning concerns to the basic kinds of deformation of crystals, as against the sliding, the given kind of plastic deformation is investigated insufficiently full, at the same time experimental results on studying twinning prove to be true opening all the new phenomena proceeding at the given kind of deformation. Deformation of metals in conditions of low temperatures and the big speeds load results in fragile destruction of that processes of plastic deformation have not time to be realized. Therefore studying of processes of plastic deformation twinning is an actual task, both in scientific, and in the applied plan [1].

Realization twinning is carried out in a case an interdiction for usual disposition slidings, and also at the big speeds load and at low temperatures. Sources of generating twinning dispositions are concentrators of tension, and development of doubles is carried out with the big speeds and the subsequent deformation processes on borders of doubles frequently result in destruction of a material. In this connection management kinetics controllable twinning, for creation uniform disposition structures on borders of doubles with the purpose of reduction in concentration of load, gives a real opportunity to use twinning as a reserve of increase of plasticity of a material. On the other hand systems of thin doubles at the subsequent deformation will create natural obstacles for full dispositions, in this connection creation in a material twinning structures probably effective hardening of a material that is independent way and the channel of hardening twinning metals.

At pass through metal monocrystals of impulses of an electric current with density from 50–1000/mm^2 and duration 10^{-4} with, deformation redistribution twinning in vicinities of concentrators of mechanical pressure is observed.

Comparison of pictures of deformation with an impulse of a current and without an impulse shows, that at joint action of electric and mechanical pressure there is a stimulation of plastic deformation twinning.

At action on a crystal of the concentrated loading occurrence of doubles is provided with excitation of dot sources twinning dispositions. twinning germs have double wedge, their development follows the bill of simultaneous moving of regional making dispositions in a plane of shift and screw in a plane unity. Such doubles can arise in volume of a deformable material near to concentrators of pressure at any kind loading.

One of features of development of the doubles arising "in a point", is the sequence of elementary certificates of development: at short-term action of loading there is a thin double of final length, at increase in time of action indentor on a crystal generating twinning dispositions and their translation on borders of section without increase in length twin a wedge is observed. It is natural, that moving from a mouth to top twinning dispositions can meet an obstacle and form a congestion. Thus will sharply increase incoherent twins borders in planes (III), and internal pressure can lead to disclosing of cracks in a secondary plane unity.

At pass a current impulse through a crystal during deformation the new kind of interaction screw twinning dispositions with an obstacle is observed. Excitation of an electronic subsystem of the sample leads to intensive reproduction twinning dispositions on borders of section and to collective interaction screw making twinning dispositions with an obstacle. As a result there is a phenomenon of branching of doubles not observed earlier.

Branching of doubles arises always on curve borders of section, where degree incoherent twinning borders the greatest.

Doubles usually arise on congestions and relaxations of internal pressure at a print lead. Till now it was known, that the relaxation of internal pressure can be carried out at the expense of sliding development, for example, in the areas of a crystal adjoining to twinning to borders. In the given job for the first time it is revealed, that under the influence of electric impulses the relaxation of internal pressure is carried out as a result of development of new doubles, and new doubles arise not only on congestions of full dispositions, but also on borders twinning layers, i.e. on congestions twinning dispositions. Doubles, arising in places of concentration of pressure, discharge dislocation congestions, thereby reduce probability of fragile destruction in reintense places of a crystal lattice.

In absence of external power influences "branchy" doubles arise on twins borders with small degree coherent (fig. 1) is more often.

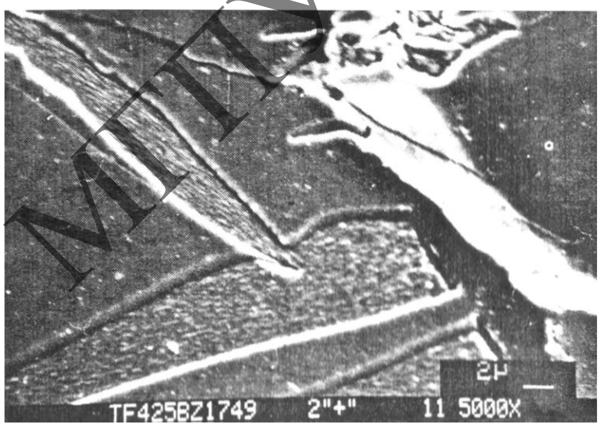


Fig. 1 – Origin of the double on twin to border with small degree coherent

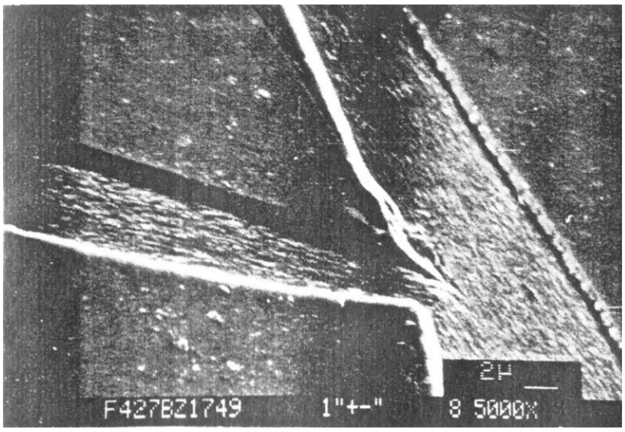


Fig. 2 – Branching of the double at a stopper

The curvature twinning borders is called by superfluous concentration on them twinning dispositions. The raised density of dispositions on twin to border conducts to localisation on it of the internal pressure which sources are twinning dispositions. Thus in places of a congestion of dispositions there can be pressure comparable on size with an occurrence threshold aspect wedge the double. The relaxation of the given pressure occurs through origin on twin to border of the new double which develops in a new energetically favourable direction (fig. 2).

The picture of fields of pressure at aspect wedge the double (fig. 3) which is received in the assumption of is considered that twin the border consists from full [1, 3], instead of partial dispositions. Fields of pressure round a congestion of such dispositions of looking like wedge can be calculated under the formula:

$$\sigma_{xy} = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}\left\{\sum_{n=0}^{N_1}\frac{(x+nd)[(x+nd)^2-(y+nh)^2]}{[(x+nd)^2+(y+nh)^2]^2} + \sum_{n=1}^{N_2}\frac{(x+nd)[(x+nd)^2-(y-nh)^2]}{[(x+nd)^2+(y-nh)^2]^2}\right\}$$

where σ_{xy} – chopping off pressure, b – the module of vector Burgersa, G – the shift module, ν – factor Puassona, n – a summation index, N_1 and N_2 – number of dispositions on twin borders. In our case at the computer plotting, presented on fig. 3, it was accepted $N_1 = N_2 = 10$.

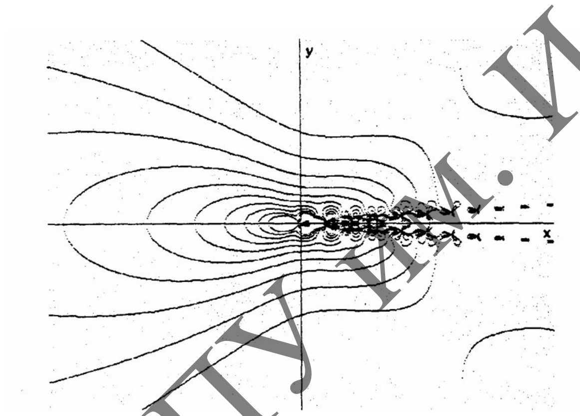


Fig. 3 – Fields of pressure at aspect wedge the double

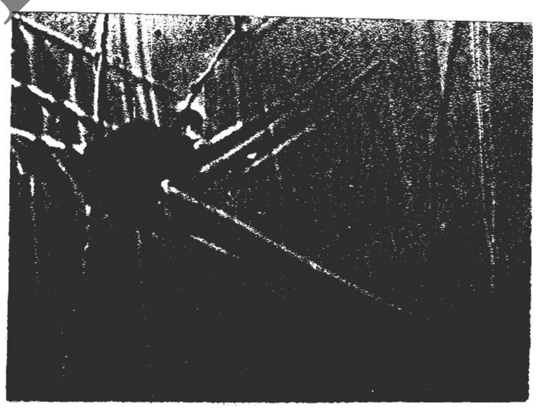


Fig. 4 – Education of the second top of the double in a crystal Be. Density of a current 700 А/мм^2; x 600

From fig. 3 it is visible, that pressure increase with approach to twin to border, moreover at top of the double they have the same order, as at direct affinity twin borders, but on dist aspect wedge ance in two-three times more. As a result in the presence of stoppers on a movement way aspect wedge the double, there is a redistribution of pressure at its top in such a manner that the size of their projections to a new direction twin becomes comparable with threshold value of occurrence of the double.

To stimulate dislocation processes at twinning crystals it is possible by pass through them of impulses of an electric current [2–5]. With growth of density of a current in an impulse generating processes twins dispositions amplify. Thus the collective moving on twinning to borders twinning dispositions can co-operate with an obstacle not only with education of the new double, but also overcome resistance of the stopped dispositions with education of the second top.

It is possible to explain stimulation by impulses of an electric current of branching of doubles also increase of internal pressure in a crystal at the expense of pinch-effect realisation. As a result of occurrence of additional pressure in a crystal the probability of occurrence of the second top of the double raises.

Thus, with the help elektroplastichesky a method of research and a method of computer construction of fields of pressure around aspect wedge the double it is established, that the relaxation of internal pressure in bismuth monocrystals can occur by realisation twinning at the expense of branching of doubles. And, the new top of the double arises not on full dispositions, and on partial twins.

The increase in time action indentor before pass a current impulse leads to density growth twinning dispositions on borders and to branching strengthening. Thus the density twinning on borders of section of each new generation of doubles is less than dispositions, than previous (fig. 4).

With growth of density of a current in an impulse generating processes twinning dispositions amplify. Thus the collective moving on twin to borders twinning dispositions can co-operate with an obstacle not only with education of the new double, but also overcome resistance of the stopped dispositions with education of the second top. On fig. 4 education of the second top of the double in a crystal Be is shown [6–9].

The described phenomena testify to additional possibility of plasticization mechanically twinning materials at creation in the course of deformation of the conditions favorable for reproduction twinning of dispositions. Such conditions can be created, passing through a material impulses of a current of the big density during deformation. Thus the relaxation of the internal pressure arising at dislocations of congestions on borders of section, can occur not only at the expense of education of new doubles therefore the reserve of plasticity increases and the probability of fragile destruction, but also as a result of partial intwinning decreases.

The literature

1. Spitsyn, V.I. Electroplastic deformation of metals / V.I. Spitsyn, O.A. Troitsky. – M. : the Science, 1985. – 160 с.

2. Savenko, V.S. Mechanical twinning and electroplasticity of metals in the conditions of external power influences / V.S. Savenko. – Minsk : BSU, 2003. – 200 с.

3. Savenko, V.S. IV International conference "Action of electromagnetic fields on plasticity and durability of materials" / V.S. Savenko, O.M. Ostrikov. – Voronezh, 1996. – P. 20.

4. Savenko, V.S. Influence of an irradiation on electromechanical effect at twinning bismuth crystals / V.S. Savenko, M.S. Tsedrik // News AN BSSR, fiz-mat Sciences. – 1980. – № 1. – P. 105–108.

5. Bashmakov, B.I. Studying of electromechanical effect at twinning crystals of bismuth in the range of temperatures 77–530 К / B.I. Bashmakov, V.S. Savenko // Izv. High schools. Physics. – 1980. – № 7. – P. 29–33.

6. Elektroplastichesky effect at simultaneous imposing electric and a magnetic field in bismuth monocrystals / V.S. Savenko [et al.] // Bulletin BSU. – 1995. – Sulfurs. 1, № 2. – P. 27–30.

7. Savenko, V.S. Elektronno-plastichesky effect at twinning bismuth monocrystals / V.S. Savenko, V.I Spitsyn, O.A. Troitski // Reports of academy of sciences of the USSR. – 1985. – № 5. – P. 1181–1183.

8. Baranov, U.V. Physical bases of electropulse and electroplastic processings and new materials / U.V. Baranov. – M. : MSIU, 2001. – 844 p.

9. Advantages electroplastic proskating rinks and electroplastic drawing gold, silver, copper and a steel, and also tungsten, molybdenum and niobij / V.S. Savenko [et al.] // A floor-mat. nauch.-prakt. kon. Modern technologies in the field of manufacture and processing of nonferrous metals. – M. : IKM the Russian Academy of Sciences, 2006.

Н. В. Сергиевич

О СТРУКТУРЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В данной работе рассматривается возможность представления безгранично делимого распределения любой конечной размерности без предположения существования его дисперсии в виде свёртки нормального распределения (возможно вырожденного) и конечного или счётного числа распределений Пуассона [1].

Характеристическая функция (х. ф.) $\varphi(t)$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_d)$ распределения случайного вектора (с. век.) ξ в R^d называется *безгранично делимой*, если для любого n существует х. ф. $f_n(t)$ такая, что

$$\varphi(t)=(f_n(t))^n. \qquad (1)$$

И с. век. ξ, и его распределение, х. ф. которого обладает свойством (1), также называются *безгранично делимыми* [2].

Из (1) следует, что если с. век. ξ безгранично делим, то при любом n ξ представляется в виде суммы n независимых одинаково распределённых векторов с х. ф. $f_n(t)$.

В случае, когда безгранично делимое распределение имеет конечную дисперсию и $d=2$, в [1] показано, что это распределение является свёрткой нормального распределения и конечного или счётного числа распределений Пуассона. Для безгранично делимых случайных величин (с. в.), $d=1$, доказательство данного факта есть в [3].

Покажем, что и в общем случае, т. е. когда безгранично делимое распределение может не иметь конечной дисперсии и R^d имеет любую конечную размерность, оно представляется в виде свёртки нормального распределения (которое может быть вырожденным) и конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Известно, что каждая безгранично делимая х. ф. $\varphi(t)$, определяющая распределение размерности $d \geq 1$ с конечной или бесконечной дисперсией, представима в форме $\varphi(t)=e^{\psi(t)}$, где

$$\psi(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx)+i(t,a)-\frac{(t,Bt^*)}{2}. \qquad (2)$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_d)\in R^d$, $x^2=(x,x)=|x|^2$, a – постоянный вектор в R^d, B – неотрицательно определённая матрица размерности $d\times d$, $\Pi(B)$ – ограниченная мера, определённая на множествах B борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(R^d)$, из области интегрирования исключен нуль-вектор, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_d)\in R^d$, t^* – вектор-столбец [4].

Представление (2) состоит из двух частей [1]:

1. $\psi_1(t)=i(t,a)-\dfrac{(t,Bt^*)}{2}$. Это логарифм х. ф. нормального распределения с ковариационной матрицей B и математическим ожиданием (ось симметрии), равным вектору a. Плотность вероятности этого распределения

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det B}}e^{-\frac{1}{2}\left(x-a,B^{-1}(x-a)^*\right)},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $\left(x-a,B^{-1}(x-a)^*\right)$ – скалярное произведение, $(x-a)^*$ – вектор-столбец.

2. $\psi_2(t)=\displaystyle\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx)$. Эту часть в литературе часто называют пуассоновской (см., например, [5]). Покажем, что $\psi_2(t)$ – логарифм х. ф. свёртки конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Теорема. *Каждое безгранично делимое распределение представимо в виде свёртки нормального распределения (возможно, вырожденного) и конечного или счётного числа распределений Пуассона.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\varphi_\xi(t) = \exp\lambda\left(e^{i(t,x_0)} - 1\right),$$

где ξ – с. век. в R^d, x_0 – фиксированный вектор в R^d, $\lambda > 0$ – постоянное число, есть х. ф. распределения Пуассона на полупрямой (одномерное подпространство в R^d) $x = cx_0$, $c \geq 0$ – переменное число, т. е. распределения

$$P\{\xi = mx_0\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m = \overline{0,\infty}. \tag{3}$$

Действительно, по определению х. ф., для распределения (3) х. ф.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(t,mx_0)}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(e^{i(t,x_0)}\lambda\right)^m}{m!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{i(t,x_0)}} = \exp\lambda\left(e^{i(t,x_0)} - 1\right).$$

Кроме того, если с. век. $\eta = \alpha\xi + b$, где α – число, b – вектор, то по свойству х. ф.

$$\varphi_\eta(t) = e^{\lambda\left(e^{i(t,\alpha x_0)}-1\right)}e^{i(t,b)}. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_\eta(t)$ – х. ф. распределения Пуассона, у которого, в отличие от (3), изменен масштаб и которое идет вдоль полупрямой $x = c_1x_0 + b$, c_1 – переменное число. Причем $c_1 \geq 0$, если $\alpha > 0$, и $c_1 \leq 0$, если $\alpha < 0$.

Поскольку интеграл в (2) существует, то он равен пределу своих интегральных сумм при неограниченном размельчении разбиения области в R^d с её расширением на все пространство R^d.

Разобьём начальный d-мерный параллелепипед на n элементарных частей Δ_{nk}, $k = \overline{1,n}$. В каждой элементарной части произвольно выбираем по одной d-мерной точке x_{nk}. Составим интегральную сумму интеграла из (2):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i(t,x_{nk})} - 1 - \frac{i(t,x_{nk})}{1+x_{nk}^2}\right)\frac{1+x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk}). \tag{5}$$

Введём обозначения: $\lambda_{nk} = \dfrac{1+x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk})$, $b_{nk} = \dfrac{x_{nk}\lambda_{nk}}{1+x_{nk}^2}$. После этого сумма (5) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_{nk}\left(e^{i(t,x_{nk})}-1\right)+i(t,b_{nk})\right). \qquad (6)$$

В (6) каждое слагаемое есть логарифм х. ф. вида (4) распределения Пуассона. Вся сумма (6) – логарифм х. ф. свёртки n распределений Пуассона. Разумеется, некоторые из этих распределений могут оказаться вырожденными. А именно, вырожденными будут те распределения, для которых мера Π элементарных частей Δ_{nk} равна нулю: $\Pi(\Delta_{nk})=0$.

Если теперь неограниченно размельчать разбиение и неограниченно расширять по всем направлениям исходный параллелепипед, то в пределе суммы (6) дадут интеграл

$$\psi_2(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx).$$

Следовательно, $\psi_2(t)$ – предел конечных сумм логарифмов х. ф. распределений Пуассона. Поэтому $e^{\psi_2(t)}$ – х. ф. свёртки конечного или счётного числа распределений Пуассона.

Поскольку

$$\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t),$$

то теорема доказана. □

Пример. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – так называемые точечные носители пуассоновских вероятностей в R^d, $x_k\neq 0$, $k=\overline{1,n}$. Это значит, что для τ-окрестностей $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ точек $x_1,x_2,\ldots,x_n$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1+x_k^2}{x_k^2}\Pi(\delta_k)=\lambda_k,\ k=\overline{1,n},$$

$$\lim_{\tau\to 0}\Pi\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n}\delta_k}\right)=0.$$

Кроме того, пусть

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k\lambda_k}{1+x_k^2}=a.$$

Тогда

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(e^{i(t,x_k)}-1\right)-\frac{(t,Bt^*)}{2}. \qquad (7)$$

Это логарифм х. ф. свёртки n распределений Пуассона, с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и нормального распределения с ковариационной матрицей B.

Нетрудно составить плотность вероятности свёртки, определяемой равенством (7). По правилу нахождения распределений сумм с. век. получаем

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det B}} \sum_{m_k=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{m_k}}{m_k!} \right) e^{-\frac{(z, B^{-1} z^*)}{2}},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $z = x - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$.

Данная теорема позволяет судить о структуре распределения стохастически непрерывного d-мерного случайного процесса $S(t)$ в момент времени t. Поскольку $S(t)$ представимо в виде суммы равномерно бесконечно малых приращений, то применимы, вообще говоря, фундаментальные теоремы о сходимости распределений сумм с. век., полученные при решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм с. век. без предположения их независимости М.Д. Юдиным. Они показывают, что в момент $t > 0$ случайный процесс $S(t)$ будет иметь безгранично делимое распределение. Кроме того, данная теорема указывает возможное направление моделирований стохастически непрерывных процессов любой конечной размерности [1].

Установлено, что *зависимость между случайными векторами оказывает существенное влияние на вид поверхности плотности вероятности предельного распределения их сумм через нормальный компонент, порождённый ковариацией слагаемых сумм.*

В частности, одними из ключевых параметров рассмотренных моделей являются элементы ковариационной матрицы B, соответствующие нормальному компоненту предельного распределения. С увеличением дисперсионных параметров нормального распределения (уменьшением элементов обратной матрицы B^{-1}), как следствие, увеличивается влияние нормального компонента на предельное распределение, приближая график теоретической плотности вероятности распределения к графику нормальной плотности. При уменьшении же дисперсионных параметров нормального компонента влияние его падает, отдавая всю «инициативу» дисперсионным параметрам λ_{ij} распределений Пуассона, вследствие чего график приближается к дискретному распределению, а именно – распределению или композиции нескольких распределений Пуассона.

Апробирован *метод выявления степени зависимости приращений процесса*, согласно которому обязательным условием является учёт ковариационных параметров. *Если предел суммы дисперсий равен нулю, то «шум» процесса (нормальный компонент) создается именно за счёт ковариаций случайных слагаемых, и величина этого шума характеризует, следовательно, степень зависимости между случайными векторами*.

При моделировании процессов деформации коэффициенты ковариационной матрицы B отражают степень зависимости между элементарными приращениями продвижения микротрещины.

Так, малые значения дисперсионных параметров нормального компонента предельного распределения характерны для начальной стадии процесса образования дефектов, когда еще только в начале развития микротрещины вероятности сосредоточены в окрестности нуля. Далее дисперсионные параметры увеличиваются, и дефект растет. При уменьшении с течением времени влияния нормального компонента на развитие процесса в пределе мы получаем, что при постоянном λ от теоретической плотности вероятности реализуемой модели остаётся лишь пуассоновское распределение.

Если же вместе с уменьшением дисперсионных параметров нормального компонента уменьшать и дисперсионные параметры пуассоновского компонента, то теоретическая плотность вероятности модели вырождается в $\delta(l_0)$-распределение (функцию Дирака), оставляя от дефекта лишь один точечный след в центре распределения.

При моделировании диффузионных процессов дисперсионные параметры нормального распределения в формуле теоретической плотности вероятности отражают степень «активности» самих элементарных диффундирующих частиц.

Так, в случае малой активности нормального компонента мы получаем уже плотности, в которых превалирует пуассоновский компонент – в точках (на кривых) сосредоточения пуассоновской вероятности значение плотности вероятности значительно больше, чем на остальной части плоскости. Это объясняется тем, что из-за уменьшающейся «активности» нормального компонента его влияние на вид предельного распределения уменьшается. И мы, таким образом, приходим к пуассоновскому распределению с остаточными следами «активности» нормального компонента в окрестностях точек (кривых) пуассоновской вероятности.

Если же «активность» частиц высока, то график поверхности плотности вероятности «расплывается» по плоскости, постепенно сглаживая пуассоновское распределение.

При исследовании процесса сумма ковариаций его приращений не менее важна, чем сумма дисперсий или сумма математических ожиданий. Поэтому без учёта суммы ковариаций адекватного, теоретически обоснованного моделирования реального процесса не получится.

Степень зависимости приращений процесса, так же, как и остальные характеристики этого процесса, во-первых, ключевым образом влияет на его ход, а во-вторых, может быть приближенно оценена при моделировании объекта исследования [6]. Для этого подсчитывается теоретическая сумма дисперсий, после чего требуется адекватно подобрать элементы матрицы B. Далее из полученных при моделировании элементов матрицы B вычитаются подсчитанные ранее суммы дисперсий. Разность их есть предел суммы ковариаций зависимых слагаемых, и её величина отражает искомую степень зависимости.

По достижении необходимой степени адекватности теоретических результатов экспериментальным, можно говорить о том, что полученные параметры отражают содержание моделируемого объекта. А это, в свою очередь, говорит о том, полученные численные значения параметров формулы плотности вероятности предельного распределения – будь то дисперсионные либо ковариационные параметры, отражающие степень зависимости между элементарными приращениями случайного процесса, – дают достаточно важную информацию о данном моделируемом процессе.

Литература

1. Юдин, М.Д. Предельные распределения сумм зависимых случайных векторов и их приложения : моногр. / М.Д. Юдин, Н.В. Сергиевич. – Мозырь : УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2009. – 145 с.
2. Юдин, М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин / М. Д. Юдин. – Минск : Университетское, 1990. – 254 с.
3. Лоэв, М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М. : Изд. ЦЛ, 1962. – 720 с.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк [и др.]. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
5. Круглов, В.М. Дополнительные главы теории вероятностей / В.М. Круглов. – М. : Изд. «Высшая школа», 1984. – 264 с.
6. Гуз, С.Н. О влиянии зависимости случайных слагаемых на предельные распределения их сумм / С.Н. Гуз, Н.В. Сергиевич, М.Д. Юдин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – Минск, 2002. – № 3. – С. 30–33.

Н. В. Сергиевич, М. И. Полоз

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОВЕРКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Алгоритмический стиль мышления предполагает высокую мыслительную активность, сопоставимую, а временами и превосходящую по интенсивности и сложности даже математическое мышление [1]. Хорошо развитое алгоритмическое мышление предполагает хорошо развитое владение навыками анализа и синтеза информации. Один из теоретиков программирования Д. Кнут, рассматривая алгоритмическое мышление, выделяет следующие основные категории, характерные для наиболее типичного мыслительного процесса программистов [2]: некоторая связь – операции с формулами; сильное использование – отражение действительности, сведение к более простому случаю, абстрактные рассуждения, использование структур данных, алгоритмы.

Для успешного освоения раздела «Алгоритмизация и программирование», помимо знания основных алгоритмов, учащимся нужно иметь хорошо развитое абстрактное мышление, владеть навыками анализа и синтеза и, кроме того, обладать хорошими знаниями по основным естественнонаучным дисциплинам – алгебре и началам анализа, геометрии, физике. При этом одной из самых важных и сложных задач является проверка объема и, главное, качества усвоенного материала.

В программировании, где ***критерием правильности работы программы*** *является получение верных результатов на всех возможных наборах входных данных, ограниченных исходной областью определения задачи*, наиболее распространённым способом оценки является проверка разработанного учащимися алгоритма и его программной реализации на одном из языков программирования на некотором наборе входных данных, именуемом *тестом* [3].

Ранее тестирование и оценка решений выполнялись вручную, что являлось весьма трудоёмким занятием. На различных соревнованиях по программированию именно здесь рождались многие судейские ошибки. Помимо человеческого фактора, существуют и другие недостатки этой формы проведения соревнований. Например, нельзя сдавать решение до окончания олимпиады, а после сдачи – вносить в него изменения. Очевидным решением данной проблемы является использование компьютера для автоматизации проверки решений.

Большинство из разработанных в настоящее время так называемых *автоматизированных систем тестирования* (АСТ) решений задач достаточно узко специализированы и ориентированы непосредственно лишь на автоматизацию только проверки решений. Однако с учётом получающей в настоящее время все большее распространение дистанционной формы обучения подобная система тестирования, основанная на использовании web-технологий, позволила бы учителям школ и преподавателям вузов при изучении дисциплин, связанных с программированием, не только повысить качество сугубо контроля практических навыков учащихся, но и выйти на качественно новый уровень обучения. Ниже рассматриваются базовые принципы работы АСТ «MasterTest», ориентированной на работу как в локальной сети, так и в сети Интернет [4].

Процесс тестирования решения алгоритмической задачи на компьютере приблизительно можно описать следующим образом: составляется условие задачи, решить которую учащемуся требуется с помощью одного или нескольких изученных алгоритмов, причем в условии четко регламентируется результат, выдаваемый программой во всех возможных ситуациях, а также задаются области значений всех входных параметров. При этом стиль написания программы не учитывается, но строго отслеживается корректность ее работы.

Правильность работы программы оценивают по заранее подготовленному набору тестов, в котором каждый тест состоит из входных и выходных данных: программе даётся входной набор данных, а полученные на выходе результаты сравниваются с эталонными. Способы сравнения могут варьироваться. Например, это может быть побайтное сравнение файлов либо подстановка ответа в условие задачи.

Успешное прохождение полного набора тестов оценивается в 100 баллов (либо процентов). При этом удельный «вес» каждого теста может либо вычисляться как средний вес всех тестов набора, либо индивидуально оцениваться в зависимости от его сложности (если сложность тестов различна и/или прохождение данного теста принципиально).

Обычно наборы составляются так, чтобы наиболее комплексно протестировать программу, проверив ее корректную работу на всех возможных наборах входных данных, удовлетворяющих условиям поставленной задачи. При этом можно также учитывать и некоторые дополнительные ограничения, такие, как время исполнения программы, объём используемой оперативной памяти и др. Такой способ оценки результатов может быть достаточно просто автоматизирован.

Таким образом, *основная цель создания системы тестирования – полное исключение человека из процесса проверки с целью обеспечения быстрой, качественной и, главное, объективной оценки решения задачи.*

Можно выделить следующие основные требования, предъявляемые к подобной системе [4]:

1. *Независимость от платформы системы участника соревнования.*

В современном мире существует большое количество различных операционных систем, структура и принципы функционирования которых значительно отличаются. Разработка программного обеспечения, в частности, клиентской части, для какой-либо определенной платформы привело бы к потере значительной части потенциальных пользователей данной системы. Следовательно, программный продукт не должен зависеть от платформы клиента.

2. *Автоматическое тестирование в кратчайшие сроки.*

Передача функции проверки программе позволяет увеличить скорость тестирования, исключить человеческий фактор и тем самым повысить качество результата.

3. *Обслуживание нескольких пользователей одновременно.*

Одним из способов обеспечения этой возможности является включение в тестирующую систему двух автономных модулей – *ядра* и *серверной части*.

Сервер берет на себя функции общения с подмножеством клиентов системы. Именно он реализует независимость АСТ от платформы пользователя. Следует отметить, что самим процессом тестирования данный модуль заниматься не должен. В любой момент сервер должен быть готов принять поступившее от пользователя решение некоторой задачи и поставить его в очередь тестирования. Непосредственно же тестированием пришедших от пользователей решений занимается **ядро** тестирующей системы [4].

В общем виде вся последовательность действий, осуществляемых тестирующей системой при проверке программы пользователя, выглядит следующим образом:

1. Получение результата решения задачи – программы (алгоритма) пользователя.
2. Определение набора тестов для этой задачи.
3. Выполнение тестирования.
4. Формирование оценки.

При этом, во-первых, процедура передачи решения от пользователя к системе тестирования должна быть простой и, во-вторых, сама система тестирования должна быть фактически изолирована от пользователей с целью нормального функционирования и предохранения наборов тестов от просмотра пользователями.

Таким образом, помимо ядра и серверной части АСТ, упомянутых выше, для полноценного взаимодействия пользователя с системой требуется также наличие соответствующего *интерфейса*, который максимально упрощает и делает прозрачной процедуру общения пользователя с системой, но в то же время решает ряд сложных задач по существлению безопасности работы системы.

Одной из главных задач программных модулей, составляющих АСТ, является продуманный выбор инструментария, необходимого для создания данного программного обеспечения.

При разработке ядра и серверной части тестирующей системы [4]-[6] использовались язык C# и СУБД MySQL, а также следующие сторонние библиотеки:

– ***Система протоколирования*** log4net, являющаяся частью проекта «Apache Logging Services». Данная библиотека распространяется по свободной лицензии Apache License 2.0.
– ***Драйвер для подключения баз данных*** MySQL Connector/NET 5.1, распространяющийся по GPL лицензии.

Модуль, реализующий интерфейс пользователя и АСТ [3], был разработан с использованием следующего программного комплекса:

– Web-сервер Apache 2.00.52;
– Язык программирования Perl 5.8.6;
– СУБД MySQL 3.23.58.

Основными критериями выбора данных программ являлась их бесплатность и в то же время достаточно большая функциональность. Кроме того, они достаточно просты в использовании и имеют реализации, написанные для различных операционных систем.

Анализ существующих программных решений в области сетевых технологий и теории тестирования программ позволил сделать вывод о том, что, возможно, наиболее действенные результаты при создании АСТ может дать использование стремительно развивающихся в данное время web-приложений, и, в частности, технологии CGI (Common Gateway Interface) [7]. Выбор обусловлен несколькими причинами.

1. Существует достаточно большое количество различных инструментов, которые позволяют решать различные задачи с использованием данной технологии.
2. Работа приложений построена по технологии «Клиент-Сервер», предоставляющей необходимые возможности по защите данных, находящихся на сервере [8].
3. Технология базируется на протоколе HTTP, который является, в свою очередь, надстройкой над семейством протоколов TCP/IP. Вследствие этого пользователь практически не стеснен в выборе программы-клиента (браузера), а главное – в выборе операционной системы [9].
4. Простота доступа к нужной информации.

Для обеспечения возможности взаимодействия ядра и серверной части системы необходимо разработать соответствующий механизм. Поскольку ядро системы работает с очередью задач, а серверная часть активизируется по запросу от клиента, то прямой связи между ними в этом случае быть не может. Следовательно, нужно искать возможность обмена информацией без прямого соединения, но с использованием некоторого промежуточного «хранилища». Возможно, наилучшим вариантом для этого является использование базы данных.

Как известно, при разработке любого программного продукта необходимо четко определить его структуру. Наличие данного этапа в разработке программного обеспечения обусловлено некоторыми объективными причинами:

1. Существуют различные алгоритмы, которые решают одни и те же поставленные задачи. Одни из них отличаются высокой скоростью решения, другие – функциональностью, третьи – простотой разработки [10]. Следовательно, зная перечень основных проблем, можно выбрать наиболее эффективный алгоритм их решения, используя для оценки все эти критерии.
2. В процессе разработки программы с изначально некорректной структурой могут возникнуть непреодолимые проблемы в решении поставленных задач, в некоторых особых случаях способные и вовсе приостановить разработку программного продукта.

Как уже говорилось ранее, СУБД в данном случае является не только хранилищем данных, но и одним из основных механизмов взаимодействия автоматизированной системы тестирования и web-интерфейса. Во-первых, система тестирования является многопользовательской, следовательно, помимо всего прочего, в БД также необходимо хранить информацию и обо всех пользователях. Второй важной составляющей является информация о задачах, которые будут предоставлены учащимся для решения. Для работы с АСТ также требуется хранить и сведения о поступивших на тестирование решениях и, соответственно, результатах тестирования предыдущих решений.

Выше был описан минимальный набор данных для нормального взаимодействия системы тестирования и web-интерфейса. В процессе разработки программы возникла необходимость в хранении также еще и дополнительной информации, необходимой для удобного администрирования системы, создания дружественного интерфейса и получения оперативной статистики по решениям. Поскольку эти данные требуются исключительно для функционирования web-модуля, они не накладывают никаких ограничений на работу системы тестирования.

Инфологическое и логическое проектирование базы данных АСТ на основании всех поставленных требований и, далее, физическое проектирование БД уже непосредственно для реляционной СУБД MySQL позволило определить структуру базы данных системы, схема которой приведена на рисунке.

В БД выполнена частичная нормализация отношений. В частности, все таблицы (отношения) приведены к нормальной форме Бойса-Кодда (или усиленной третьей нормальной форме).

Во всех таблицах есть первичные индексы (помечены флагом PK – primary key), необходимые для однозначного определения любой записи таблиц. В некоторых таблицах добавлены вторичные индексы (по одному или нескольким полям) для ускорения работы операций, связанных с выборкой данных (выделены на схеме «жирным» шрифтом). Вторичные индексы добавлялись только в тех случаях, когда по данному полю или группе полей осуществлялся отбор данных. Следствием добавления вторичных индексов стала значительно возросшая скорость обработки некоторых запросов к БД.

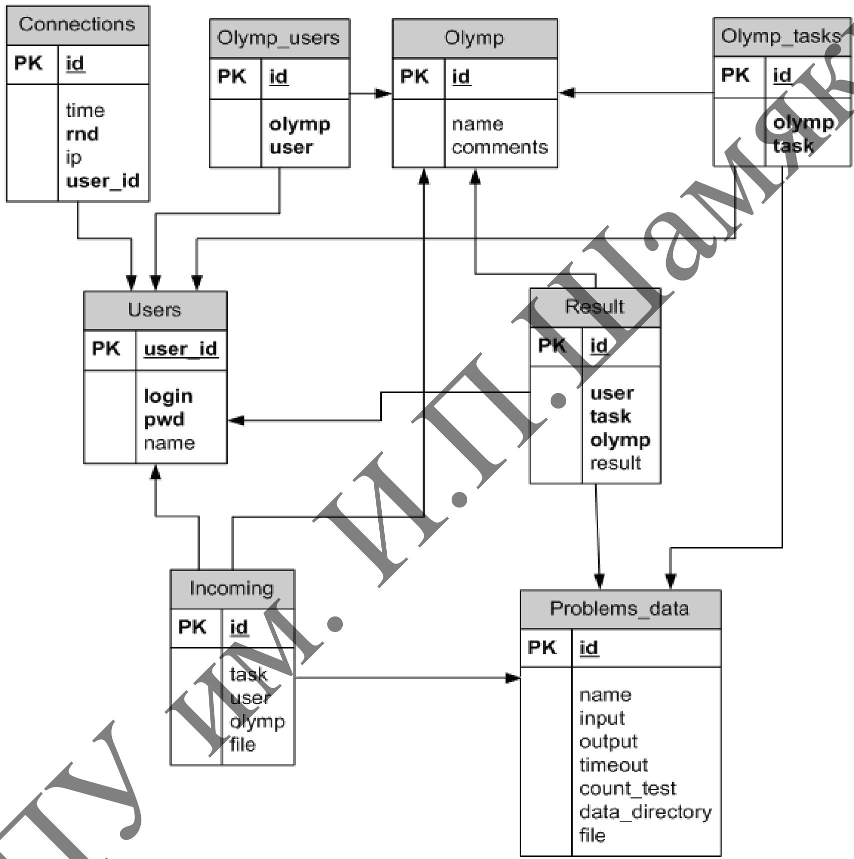


Рисунок – Структурная схема базы данных АСТ «MasterTest»

Основными объектами базы данных являются так называемые «плоские» таблицы. Каждая из таблиц либо хранит информацию о каком-либо множестве объектов (справочники), либо содержит сведения, характеризующие некоторую совокупность объектов, описанных в других таблицах (сводные таблицы).

В справочниках хранится информация об объектах, а также уникальный ключ, который позволяет однозначно идентифицировать объект. В нашей базе данных имеются три справочника: Users, Problems_data, Olymp. В них хранится информация о пользователях, задачах и курсах соответственно, зарегистрированных в системе. Курсы объединяют в себе подмножество различных задач комплекса, предлагаемых для решения, и подмножество пользователей, которые будут их решать.

Забрав решение из очереди, ядро тестирует его и формирует соответствующий протокол, сохраняя всю необходимую информацию о решении в базе данных. При таком подходе ядро тестирующей системы избавлено от необходимости заботиться о входящих данных. Этим занимается серверная часть, предоставляя ядру решение пользователя для проверки. Именно она заботится о регистрации пользователей, подписке их на курсы, получении условий задач, обеспечении возможности отсылки решений.

Литература

1. Сергиевич, Н.В. О преподавании алгоритмизации и программирования в средней школе / Н.В. Сергиевич // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы Междунар. науч.-практ. интернет-конф., 27-31 окт. 2008 г., г. Мозырь / редкол.: В.В. Валетов (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь : УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2008. – С. 144–147.
2. Knuth, Donald E. Algorithms in modern mathematics and computer science / Donald E. Knuth. – Lecture Notes in Computer Science, 122. – Berlin : Springer, 1981. – P. 82–89.
3. Лопато, В.М. О разработке автоматизированной системы тестирования / В.М. Лопато // Инновации-2004 : материалы XI Респ. студ. науч.-практ. конф., 22 апреля 2004 г., Мозырь : в 2 ч. – Мозырь : УО МГПУ, 2004. – Ч. 1. – С. 89.
4. Лещенко, В.В. О подходе к реализации тестирующего модуля в автоматизированной системе тестирования / В.В. Лещенко // Инновации-2004 : материалы XI Респ. студ. науч.-практ. конф., 22 апреля 2004 г., Мозырь : в 2 ч. – Мозырь : УО МГПУ, 2004. – Ч. 1. – С. 89.
5. Лещенко, В.В. Автоматизация тестирования решений задач по программированию / В.В. Лещенко // Инновации-2005 : материалы XII Респ. студ. науч.-практ. конф., 28 апреля 2005 г., Мозырь : в 2 ч. – Мозырь : УО МГПУ, 2005. – Ч. 1. – С. 94.
6. Лещенко, В.В. Выбор средств реализации автоматизированных систем тестирования / В.В. Лещенко // Материалы XIV Республиканской студенческой науч.-практ. конф., 21 апреля 2007. – Мозырь : УО МГПУ, 2007.
7. Хокинс, С. Администрирование Web-сервера Apache и руководство по электронной коммерции / С. Хокинс. – Киев : Вильямс, 2001. – 336 с.
8. Цимбал, А.А. Технология создания распределенных систем. Для профессионалов / А.А. Цимбал, М.Л. Аншина. – Санкт-Петербург : Питер, 2003. – 576 с.
9. Паркер, Т. TCP/IP. Для профессионалов / Т. Паркер, К. Сиян. – Санкт-Петербург : Питер, 2004. – 864 с.
10. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2007. – 1296 с.

О. В. Старовойтова

РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

При обучении математике с использованием электронного учебника (ЭУ) эффективно реализуются дидактические принципы, направленные на активизацию познавательной деятельности учащихся, на мотивацию обучения: индивидуализация и дифференциация процесса обучения (например, за счёт возможности поэтапного продвижения по уровням сложности материала), осуществление контроля (система контрольных вопросов и заданий в виде базы данных с определёнными уровнями усвоения, критериями оценивания, мониторинг обученности, реализованный в виде накопляемых результатов по всем видам контроля в базе знаний учащегося) с обратной связью – диагностика ошибок (констатация причин ошибочных действий обучаемого и предъявление на экране компьютера соответствующих комментариев) по результатам учебной деятельности, а также осуществление самоконтроля, самокоррекции, тренировки в процессе усвоения учебного материала и самоподготовки учащихся.

При использовании электронного учебника некоторые дидактические возможности расширяются, т. е. подача самого материала осуществляется не только текстом и с помощью полиграфических возможностей, а применяется активная графика, аудио-, видеосопровождение, мультимедиа. Изложение самого учебного материала осуществляется в виде гипертекстовой логической структуры (в традиционном учебнике линейная структура изложения материала), встроенные средства обучения (компьютерные педагогические программы) помогают учителю в процессе обучения.

Электронный учебник решает следующие педагогические задачи:

- формирование интереса к математике и развитие математических способностей;
- первоначальное изучение учебного курса;
- изучение учебного курса на разных уровнях глубины и детализации; повторение, закрепление и актуализацию знаний, умений и навыков;
- контроль и оценивание уровней знаний и умений.

Эффективность любого урока, как с традиционным учебником, так и с электронным, зависит от предварительной подготовки к нему учителя, но подготовка к уроку с использованием электронного учебника, в силу своей специфики требует значительно больших усилий.

На наш взгляд, можно выделить несколько методических подходов использования ЭУ в учебном процессе:

- использование отдельных компонентов ЭУ на уроках;

- использование на уроках для организации самостоятельного изучения некоторых тем и дальнейшего обсуждения изученного материала, а также для организации самостоятельной домашней работы;
- использование ЭУ в качестве дополнительного источника информации к традиционным учебным материалам.

При проектировании урока с использованием ЭУ необходимо четко видеть его место и роль на уроке. Необходимо также помнить, что эффективность использования возможностей, представляемых ЭУ, должна отвечать состоянию компьютерной техники, уровню подготовки и готовности учителя и учащихся работать с электронными информационными ресурсами.

Рассмотрим некоторые приёмы использования электронного учебника:

1. Электронный учебник используется при изучении нового материала и его закреплении.

Учащихся сначала опрашивают по традиционной методике или с помощью печатных текстов. При переходе к изучению нового материала ученики садятся у компьютера, включают его и начинают работать со структурными единицами параграфа под руководством и по плану учителя.

2. Электронный учебник может использоваться на этапе закрепления материала.

На данном уроке новый материал изучается обычным способом, а при закреплении все учащиеся под руководством учителя соотносят полученные знания с помощью функций электронного учебника.

3. В рамках комбинированного урока с помощью электронного учебника осуществляется повторение и обобщение изученного материала.

Такой вариант предпочтительнее для уроков итогового повторения, когда по ходу урока требуется «пролистать» содержание нескольких параграфов, выявить родословную понятий, повторить наиболее важные факты и события, определить причинно-следственные связи. На таком уровне учащиеся должны иметь возможность поработать сначала сообща (по ходу объяснения учителя), затем в парах (по заданию учителя), наконец, индивидуально (по очереди).

4. Самостоятельное изучение нового материала и составление по его итогам своей структурной единицы параграфа.

Такая работа проводится в группах учащихся (3–4 человека). В заключение урока учащиеся обращаются к электронной единице параграфа, сравнивая её со своим вариантом. Тем самым происходит приобщение учащихся к исследовательской работе на уроке, начиная с младшего школьного возраста.

5. Электронный учебник используется как средство контроля усвоения учащимися понятий.

Тогда в состав электронного учебника входит система мониторинга. Результаты тестирования учащихся по каждому предмету фиксируются и обрабатываются компьютером. Данные мониторинга могут использоваться учеником, учителем, методическими службами и администрацией. Процент правильно решённых задач даёт ученику представление о том, как он усвоил учебный материал, при этом он может посмотреть, какие структурные единицы им усвоены не в полной мере, и впоследствии дорабатывать этот материал. Таким образом, ученик в какой-то мере может управлять процессом учения. Учитель, в свою очередь, на основе полученной информации также имеет возможность управлять процессом обучения. Результаты класса по содержанию в целом позволяют учителю увидеть необходимость организации повторения для достижения максимального уровня обученности. Рассматривая результаты отдельных учащихся по структурным единицам, можно сделать аналогичные выводы по каждому отдельному учащемуся и принять соответствующие методические решения в плане индивидуальной работы. Наконец, можно проследить динамику обучения ученика по предмету. Стабильно высокие результаты некоторых учеников дают учителю возможность выстроить для них индивидуальную предметную траекторию.

В результате использования электронных учебников происходит индивидуализация процесса обучения. Каждый ученик усваивает материал по своему плану, т. е. в соответствии со своими индивидуальными способностями восприятия. В результате такого обучения уже через 1–2 урока (занятия) учащиеся будут находиться на разных стадиях (уровнях) изучения нового материала. Это приведёт к тому, что учитель не сможет продолжать обучение школьников по традиционной классно-урочной системе. Основная задача такого рода обучения состоит в том, чтобы ученики находились на одной стадии перед изучением нового материала и при этом все отведенное время для работы у них было занято. На наш взгляд, это может быть достигнуто при сочетании различных технологий обучения, причем электронный учебник должен содержать несколько уровней сложности. В этом случае ученик, который быстро усваивает предлагаемую ему информацию, может просмотреть более сложные разделы данной темы, а также поработать над закреплением изучаемого материала. Слабый же ученик к этому моменту усвоит тот минимальный объем информации, который необходим для изучения последующего материала. При таком подходе к решению проблемы у учителя появляется возможность реализовать дифференцированное, а также разноуровневое обучение в условиях традиционного школьного преподавания.

При сопоставлении вариантов будем исходить из того, что обучение осуществляется преимущественно по дедуктивной схеме, т. е. путем дифференциации некоторой «относительно примитивной, но целостной основы».

На *этапе получения знаний* учащийся переходит от полного отсутствия знаний к их усвоению. С учётом упомянутой схемы этот переход должен осуществляться таким образом, чтобы у учащегося сложился общий, недифференцированный каркас требуемого знания, некоторое общее представление о теме. Основная форма усвоения – вербальная, часто в виде учебных правил, решение задач играет преимущественно вспомогательную, иллюстративную роль. Этап проходит при максимальной помощи со стороны учителя.

На *этапе тренировки*, состоящем в решении задач, вербальное знание переходит в умение и навык, приобретает чёткость, определённость. Решение задач превращается в главное средство обучения, происходит дифференцирование исходного знания, оно наполняется частными деталями. Этот этап, значительно превосходящий первый по трудности, длительности, осуществляется при минимальной помощи со стороны учителя или даже при полном её отсутствии.

Использование электронного учебника возможно на обоих этапах, но целесообразно чаще всего на втором.

При планировании уроков необходимо найти оптимальное сочетание электронного учебника с другими (традиционными) средствами обучения.

Рассмотрим различные варианты использования ШЭУ в учебном процессе на примере ПМК «Геометрия 8 класс: поддержка учебника Н. М. Рогановского» [1], разработанного авторским коллективом преподавателей физико-математического факультета УО МГПУ имени И. П. Шамякина под руководством профессора, доктора педагогических наук Н. М. Рогановского в рамках республиканской программы «Информатизация системы образования по заказу Главного информационно-аналитического центра Министерства образования Республики Беларусь.

Функциональные возможности данного программного комплекса:

- ознакомление учащихся с теоретическими основами изучаемого курса;
- возможность проверки знаний учащихся в тестовой форме (как в ходе, так и по окончании изучения каждой темы);
- возможность использования рейтинговой системы оценок знаний учащихся в ходе проверки знаний учащихся;
- сохранение результатов тестирования в отдельной базе данных;
- возможность работы с программой по сети.

Теоретический материал представлен четырьмя темами: «Основные свойства геометрических фигур», «Перпендикулярные и параллельные прямые», «Треугольники», «Построения циркулем и линейкой». Как правило, параграф содержит две части: «Теория», «Примеры решения задач». После каждого параграфа и каждой главы предлагаются задания для самоконтроля. Практикум по решению задач приводится отдельным разделом, отдельным разделом приводится дополнительный материал (рисунок 1).

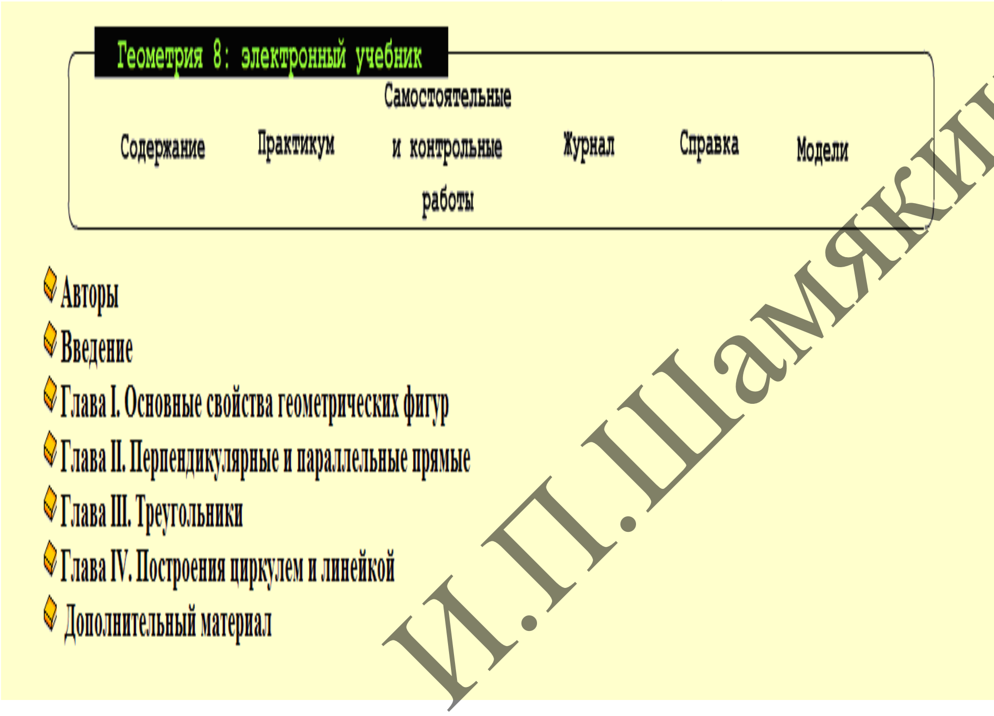


Рисунок 1 – Геометрия 8: электронный учебник

Традиционный и электронный учебники могут быть рассмотрены как две составляющие единого учебника, причем сочетание их в процессе обучения может быть различным. Применение двух типов учебников осуществляется на основании принципа взаимной дополняемости, предполагающего определенную очередность их использования с целью оптимизации процесса обучения.

1 вариант использования электронного учебника

Сочетание традиционного и школьного электронного учебника на основе принципа дополняемости при сохранении ведущей роли книжного учебника.

В этом случае ЭУ часто называют *компьютерным сопровождением* к традиционному учебнику. Общим признаком такого построения является то, что электронный учебник не занимает ведущей позиции, оставляя эту роль за традиционным учебником.

Данный вариант использования может обусловливаться несколькими причинами: неполнотой содержания учебного материала в ШЭУ, эпизодичностью его использования (зависящей от комплектования школы компьютерными классами, обеспечения соответствующими программно-методическими средствами), лучшей наглядностью при изучении материала. На наш взгляд, менее предпочтительны такие ШЭУ, которые отличаются неполнотой и фрагментарностью содержания.

Например, при изучении некоторых определений или понятий учителю необходимо при объяснении приводить достаточно много примеров и для лучшей наглядности это можно продемонстрировать с помощью ШЭУ. Изучая тему: «Основные задачи на построение» на первом этапе учитель объясняет построение у доски, а на втором этапе может выбрать для повторения построения демонстрацию с помощью ШЭУ.

2 вариант использования школьного электронного учебника

Сочетание традиционного и школьного электронного учебника на основе принципа дополняемости при сохранении ведущей роли электронного учебника.

Например, изучение информации путем предъявления ее в виде небольших доз удобнее осуществить с помощью компьютера, а повторение крупной порции материала – с помощью книжного учебника или наоборот, предоставляя при этом основное место – школьному электронному учебнику.

Выбор того или иного учебника и характера их сочетания на определенном этапе учебного процесса производится учителем с учётом пожеланий учащихся, а также в соответствии с той технологией обучения, которой он придерживается.

3 вариант использования школьного электронного учебника

Использование отдельных составляющих школьного электронного учебника.

Рассмотрим различные приемы использования в процессе обучения отдельных составляющих электронного учебника на примере использования программно-методического комплекса «Геометрия-8» [1].

1. *Использование интерактивных моделей, работающих в режиме ручной или автоматической анимации*

1.1. *Использование демонстрационных моделей*

Демонстрационные модели призваны по шагам показывать этапы построения той или иной геометрической фигуры. При этом существует возможность просмотреть в учебнике как отдельные части построения, так и всё построение от начала до конца. В моделях имеется демонстрации основных геометрических построений (проводимых с помощью циркуля и линейки), изучаемых в 7 классе. Данные модели целесообразно показывать при объяснении нового материала. Например, в параграфе 24 четвёртой главы продемонстрировано построение биссектрисы угла (рисунки 2, 3).

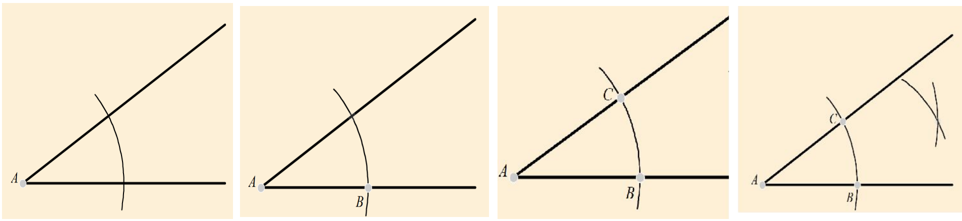


Рисунок 2 – Этапы построения биссектрисы угла

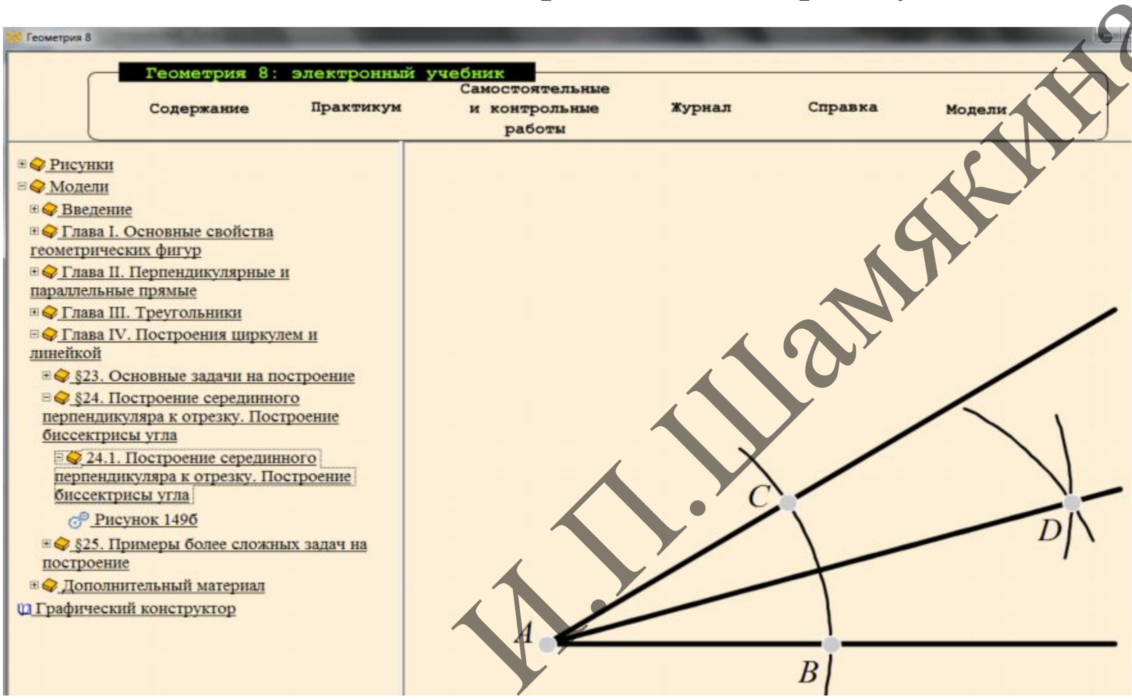


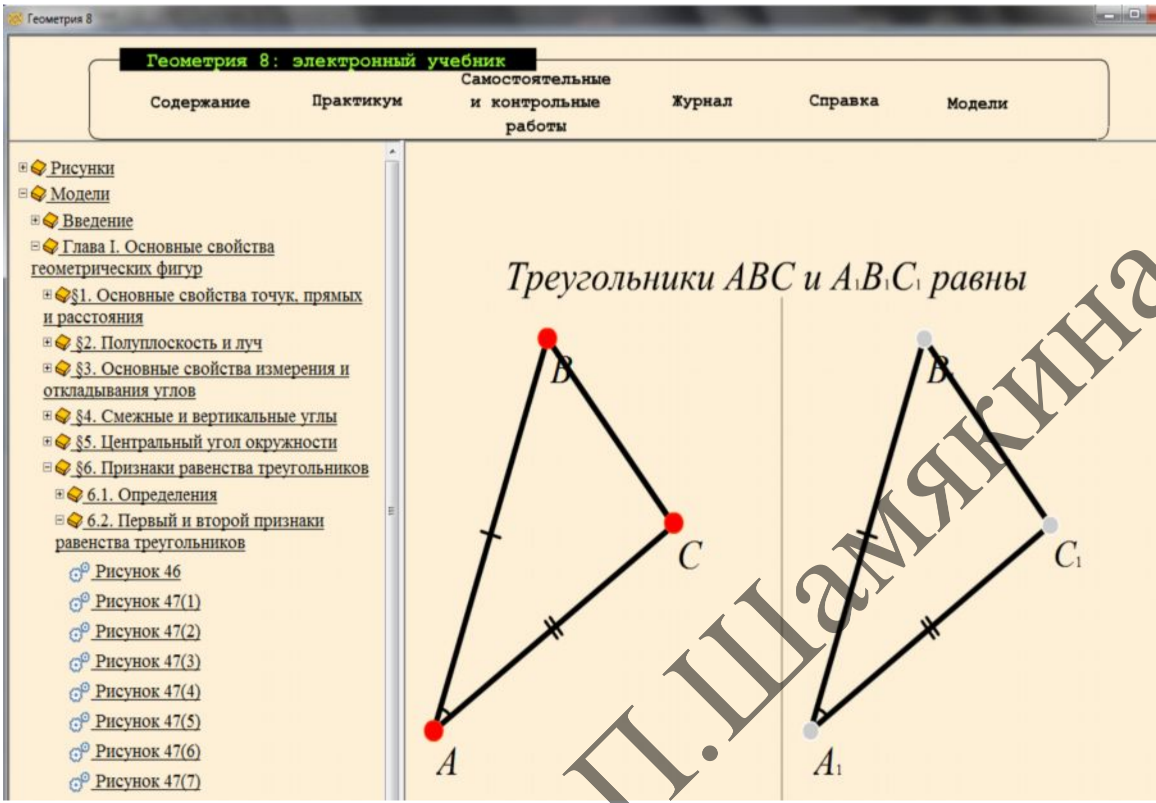
Рисунок 3 – Построение биссектрисы угла

1.2. Использование активных моделей

Активные модели, позволяют моделировать различные ситуации взаимного расположения геометрических объектов (точек, прямых, окружностей) и понять суть того или иного геометрического понятия или свойства. Они позволяют не только увидеть определение или свойство, но и «пощупать» его руками. Для этого в активных моделях предусмотрены активные точки, которые выделены красным цветом. Эти точки пользователь может перемещать в пределах изображения, при этом все построения обновляются в зависимости от нового положения активных точек.

Рассмотрим это на примере изучения темы «Признаки равенства треугольников». С помощью активных точек можно продемонстрировать ученикам, что треугольники будут равны независимо от того, как они будут расположены. В данном примере точки на первом рисунке A, B, C активные. При изменении (перемещении) этих точек ученики могут наблюдать, что на симметричном ему левом рисунке происходят такие же изменения (рисунок 4а, 4б). Данные модели можно использовать на начальном этапе объяснения нового материала.

а



б

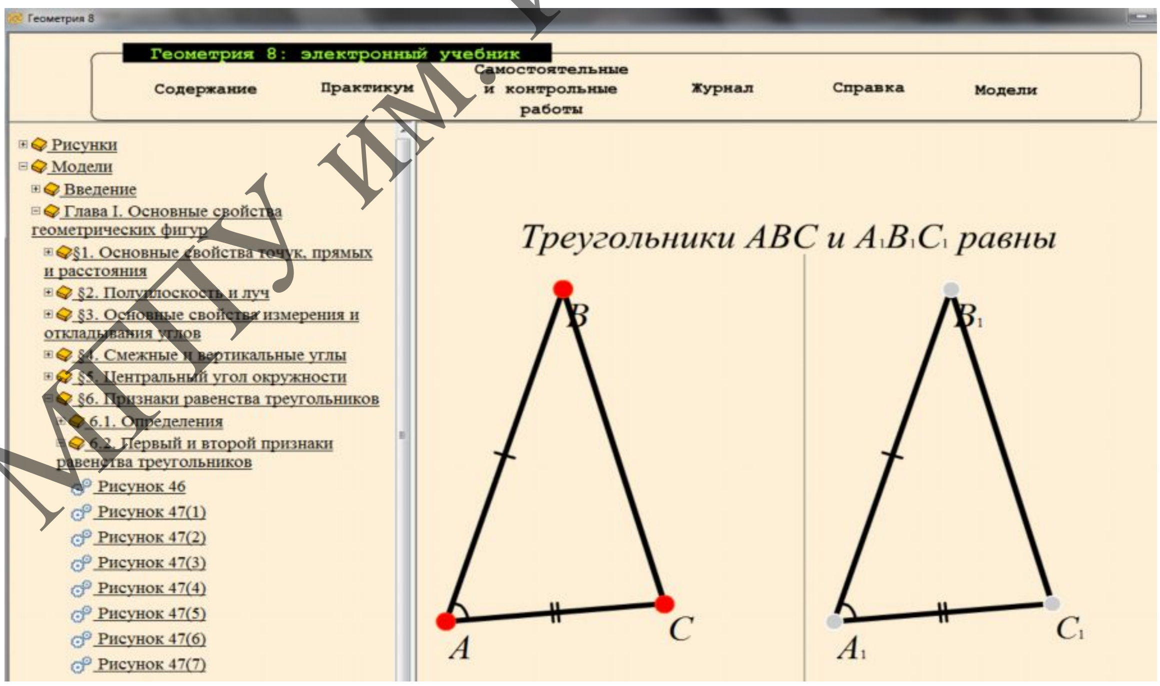


Рисунок 4 – Использование активных моделей

2. Применение графического конструктора при решении задач

Графический конструктор позволяет моделировать построения с помощью циркуля и линейки. Кроме традиционных опций, таких, как выбор цвета, толщины линии, рисование карандашом и вставки текста, в данном редакторе присутствует три оригинальных инструмента. Это – «точка», «циркуль» и «транспортир». Инструмент «точка» позволяет отмечать различные точки при построении. Инструмент «циркуль» позволяет моделировать построение различных дуг окружностей с помощью циркуля. Построение окружности с помощью данного инструмента делится на несколько этапов. В начале пользователю необходимо указать длину радиуса окружности путём задания двух точек – начала и конца радиуса. Далее выбирается центр окружности, начало и конец дуги, которая будет построена. Как видно из описания данного инструмента он полностью повторяет алгоритм построения окружности реальным циркулем, что сделает процесс изучения геометрии наиболее наглядным, так как работа с данной программой будет полностью основываться на навыках работы с реальными чертёжными инструментами (рисунок 5).

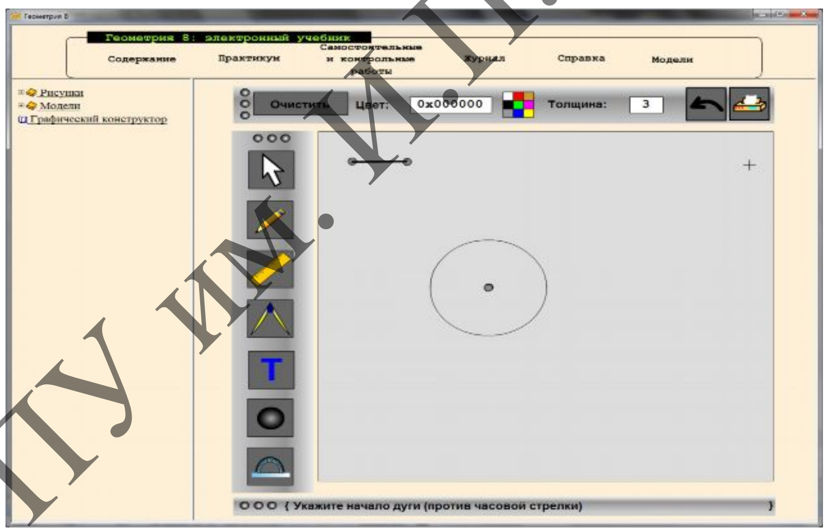


Рисунок 5 – Использование графического конструктора

Инструмент «транспортир» позволят откладывать углы необходимой градусной мерой. Построение угла с помощью данного инструмента делится на несколько этапов. В начале указывается вершина угла, затем начало и конец угла. Кроме того, в данном редакторе предусмотрена возможность вывода полученного изображения на печать, что будет особенно полезно при проверке учителем правильности построения учащимися тех или иных элементов (рисунок 6).

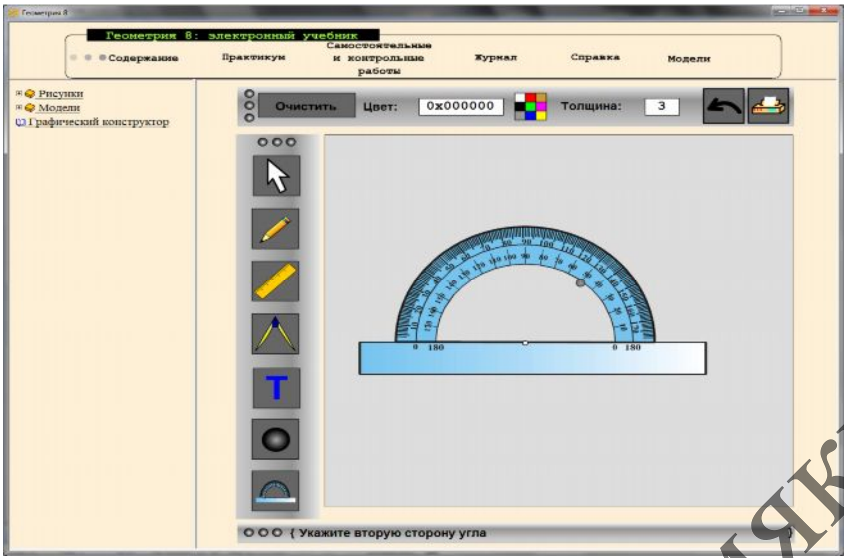


Рисунок 6 – Использование транспортира

3. Использование калькулятора.

Использование калькулятора для выполнения вычислений при решении задач.

4 вариант использования электронного учебника

Самостоятельный компьютерный учебник, выполняющий все необходимые функции в обучении.

Данное использование эффективно при закреплении материала, при проведении самостоятельных и контрольных работ.

Электронный и традиционный учебники целесообразно строить как *самостоятельные средства обучения,* каждое из которых способено полностью обеспечить процесс обучения. Вместе с этим осуществляется их максимальная координация и согласованность по содержанию и объему учебного материала, структуре и последовательности учебных тем, уровню дифференциации обучения, строго выдерживается соответствие основополагающим государственным документам: концепции средней школы, образовательному стандарту и программе.

Выбор того или иного учебника и характера их сочетания производится учителем с учётом пожеланий учащихся.

Вопрос о том, какой из этих учебников является основным, а какой вспомогательным на определённом отрезке учебного процесса решается учителем в соответствии с той технологией обучения, которой он придерживается.

ЭУ [1] может использоваться в любом из названных вариантов. Выбор того или иного варианта зависит от наличия программно-технического обеспечения в школе и профессиональной готовности учителя.

Таким образом, нами

1) выделены различные методические подходы использования ЭУ в учебном процессе.

2) определены две составляющие единого учебника – обычный и электронный учебники, применение которых необходимо осуществлять на основании принципа взаимной дополняемости, предполагающего определенную очередность их использования с целью оптимизации процесса обучения.

3) определены различные варианты использования электронного учебника в учебном процессе на примере использования программно-методического комплекса «Геометрия-8».

Литература

1. ПМК «Геометрия 8 класс: поддержка учебника Н.М. Рогановского» разработан в рамках республиканской программы «Информатизация системы образования» по заказу Главного информационно-аналитического центра Министерства образования Республики Беларусь, 2006, госрегистрация 200645114, дата регистрации 16.11.2006».

О. И. Терещенко, М. И. Ефремова

ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Теория неравенств играет в математике огромную роль, а некоторые ее современные области полностью базируются на этой теории. С помощью неравенств формулируются многие задачи, выражаются результаты определённых математических исследований.

С неравенствами, как правило, связаны задачи двух типов:

– нахождение условий, при которых данное неравенство обращается в истинное высказывание (решение неравенств);

– доказательство того, что, исходя из определённых наперёд заданных условий, данное неравенство обращается в истинное высказывание (доказательство неравенств).

Задачи на доказательство неравенств дают возможность закрепить достаточно большой объём теоретических вопросов, по-новому выяснить известные факты.

С помощью неравенств можно показать, какую роль играет аппарат математической логики в дедуктивных рассуждениях, в понимании самого процесса доказательства. Знание основных методов и способов доказательства неравенств, некоторые специфические неравенства дают возможность шире их применять при решении проблем прикладного характера.

Довольно часто встречаются задачи теоретического и прикладного характера, сводящиеся к рассмотрению неравенств, в которых необходимо установить их истинность на заданном множестве A.

В простейших случаях, когда набор значений переменных из множества А невелик, задача решается просто подстановкой. Если при каждом наборе значений переменных из A получаем истинное числовое неравенство, то и данное неравенство будет истинным на множестве А. Этот общий вывод является правомерным, ибо он сделан на основе всех возможных частных случаев. В этом случае говорят, что рассуждения проведены методом полной индукции.

Раскроем содержание понятия «доказать неравенство с переменной в общем виде».

Пусть задано неравенство с одной переменной x. Обозначим его В(x). А(x) – определенное условие, которое накладывается на переменную x.

Определение. Доказать неравенство В(x), если выполняется условие А(x), означает показать, что для каждого значения переменной x, которое обращает А(x) в истинное высказывание, неравенство В(x) также обращается в истинное высказывание.

Условие А(x) однозначно определяет некоторое множество М значений переменной, которое является ее множеством истинности. Если неравенство В(x) при выполнении условия А(x) доказано, то это означает, что неравенство В(x) на множестве М истинное. Исходя из определения, задачи на доказательство неравенств можно сформулировать по-разному.

Например.

1. Доказать, что для всех действительных $x \geq 3$ выполняется неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
2. Доказать, что для всех $x \in [3, +\infty)$ справедливо неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
3. Доказать, что если x – любое число из промежутка $[3, +\infty)$, то $2x^2 - 5x - 1 > 0$.
4. Доказать, что если $x \geq 3$, то $2x^2 - 5x - 1 > 0$
5. Доказать неравенство: $2x^2 - 5x - 1 > 0$, если $x \geq 3$.
6. Доказать неравенство: $2x^2 - 5x - 1 > 0$, при $x \geq 3$

Несмотря на различные формулировки суть доказательства остаётся неизменной: необходимо показать, что для каждого $x \in [3,+\infty)$ (множество М) истинно неравенство $2x^2 - 5x - 1 > 0$ (В(x)).

Введенное положение определяет цель поставленной задачи, но не раскрывает путей достижения поставленной цели в самом общем виде, если элементов множества М много или их бесконечное количество, а также не даёт представлений о процессе доказательства.

Аппарат математической логики используется при построении логических математических рассуждений, в том числе и для доказательства неравенств. Понятия логического следования и равносильности, логические операции и законы логики дают возможность строить логические схемы, которые являются основой многих доказательств. При построении рассуждений для доказательства неравенств необходимо найти то истинное утверждение, которое даст возможность убедиться в истинности доказываемого неравенства. Сделать это можно по-разному.

I. Использование свойств неравенств

Пример 1. Доказать, что для всех значений $m \in R$ выполняется неравенство $\frac{(1+m)^2}{2} \geq 2m$.

Доказательство.

1) Составим разность между левой и правой частями данного неравенства и оценим знак этой разности, выполнив определённые преобразования:

$$\frac{(1+m)^2}{2} - 2m = \frac{1+2m+m^2-4m}{2} = \frac{1-2m+m^2}{2} = \frac{(1-m)^2}{2} \geq 0 .$$

2) $\left(\frac{(1+m)^2}{2} \geq 0\right)$ и $\left(\frac{(1-m)^2}{2} = \frac{(1+m)^2}{2} - 2m\right) \Rightarrow \left(\frac{(1-m)^2}{2} - 2m\right) \geq 0.$

3) $\left(\frac{(1-m)^2}{2} - 2m\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{(1+m)^2}{2} \geq 2m.$

Пример 2. Доказать, что

(307 + 317 + … + 397 – 8041) < (–407) + (–417) + … + (–497).

Доказательство.

1) $(307+317+\ldots+397-8041)-((-407)+(-417)+\ldots+(-497))=$

$= 307+317+\ldots+397+407+417+\ldots+497-8041 = \frac{307+497}{2}\cdot 20-8041=$

$= 8040-8041=-1;\ -1<0$.

2) $(307+\ldots+397-8041)-((-407)+(-417)+\ldots+(-497))<0$

$307+\ldots+397-8041<(-407)+\ldots+(-497)$.

II. Применение группировки или разложения

Оценить разность между левой и правой частями неравенства можно с помощью группировки слагаемых или разложением их на множители.

Пример 3. Доказать неравенство:

$2y^2x^3+x^2-x-1>x(2y^2-x^2)$, если $x>1, y \in R$.

Доказательство.

$$2y^2x^3+x^2-x-1-x\left(2y^2-x^2\right)=2y^2x^3+x^2-x-1-2y^2x+x^3=$$
$$=\left(2y^2x^3+x^3\right)+x^2-\left(2y^2x+x\right)-1=x^3\left(2y^2+1\right)+x^2-x\left(2y^2+1\right)+\left(x^2-1\right)=$$
$$=\left(2y^2+1\right)x\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)\left(\left(2y^2+1\right)x+1\right)>0,$$

так как $x^2-1>0$ при $x>1$;

$$2y^2x^3+x^2-x-1>x\left(2y^2-x^2\right).$$

III. Применение тождеств

Применение тождеств в ряде случаев даёт возможность довольно легко оценить знак разности между левой и правой частями неравенства.

Пример 4. Доказать неравенство:

$18a^2+4b^2+c^2\ge 6a(2b+c)$, где $a\in R, b\in R, c\in R$.

Доказательство.

$$18a^2+4b^2+c^2-6a(2b+c)=18a^2+4b^2+c^2-12ab-6ac=$$
$$=\left(9a^2-12ab+4b^2\right)+\left(9a^2-6ac+c^2\right)=(3a-2b)^2+(3a-c)^2\ge 0$$

IV. Использование результатов исследования квадратного трехчлена

V. Доказательство некоторых неравенств значительно упрощается, если использовать результаты исследования квадратного трехчлена

Пример 5. Доказать, что для любого $x\ne 0$ справедливо неравенство $\frac{31}{2x^2}>3-\frac{1}{3}x^2$.

Доказательство.

Составим разность и оценим ее знак:

$$\frac{31}{2x^2}-3-\frac{1}{3}x^2=\frac{31}{2x^2}-3+\frac{1}{3}x^2=\frac{2\left(x^2\right)^2-18x^2+93}{6x^2}>0, \text{ т. к. } 6x^2>0, x\ne 0,$$

$2\left(x^2\right)^2-18x^2+93>0$, т. к. $D=-420<0$.

Имеем: $\frac{31}{2x^2}-3-\frac{1}{3}x^2>0$, а значит,

$\frac{31}{2x^2}>3-\frac{1}{3}x^2$, для всех $x\ne 0$.

VI. Способ, основанный на использовании при доказательстве данного неравенства неравенств, справедливость которых уже доказана

Пример 6. Доказать, что если $a>0, b>0, c>0, d>0$, то $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$.

Доказательство.

Для доказательства данного неравенства воспользуемся неравенством $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a > 0, b > 0$.

Согласно указанному неравенству имеем:

$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}$,

Или $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$. В свою очередь, $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$, или $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$, поэтому по свойству транзитивности $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Пример 7. Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, то $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

В неравенстве $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ положим, что $d = \frac{a+b+c}{3}$, получим $\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$, или $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$.

Возведём обе части полученного неравенства в четвертую степень $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3}$.

Умножим обе части этого неравенства на $\frac{3}{a+b+c}$, получим $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

И, наконец, извлекая кубический корень из обеих частей полученного неравенства, найдем $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Пример 8. Доказать неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d} \geq 3$, где $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

Доказательство.

Воспользуемся неравенством $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ и применим к левой части доказываемого неравенства $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}}{3} \geq \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$, откуда $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d} \geq 3$, что и требовалось доказать.

Пример 9. Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq 16abcd$.

Доказательство:

Применим неравенство $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, получим
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $b+c\ge 2\sqrt{bc}$, $c+d\ge 2\sqrt{cd}$, $d+a\ge 2\sqrt{da}$.

Почленно перемножив последние неравенства, получим
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\ge 16abcd$.

Пример 10. Доказать неравенство $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$, $a>0, b>0, c>0$.

Доказательство.

Применим неравенство $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$.

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$, или $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$.

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$, или $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$.

Перемножим полученные неравенства, т. е. неравенства $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, получим, что $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$.

Пример 11. Доказать, что при $a>0, b>0, c>0$
$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\ge 6abc$.

Доказательство.

Левую часть данного неравенства разделим на abc, получим $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, или $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Воспользуемся тем, что сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, получим
$\frac{a}{c}+\frac{c}{d}\ge 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$; отсюда $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\ge 6$, или $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\ge 6abc$.

Неравенства в математике играют важную роль. Их используют в математическом анализе, в теории функций и в других разделах математики. Поэтому неслучайно, что при изучении элементарной математики необходимо уделить достаточное внимание не только решению различных видов неравенств, но и познакомить будущего учителя математики с основными методами и способами доказательства неравенств.

О. И. Терещенко, В. В. Шкут, М. И. Ефремова

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЙ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ», «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»

В традиционных курсах математического анализа раньше рассматривали три вида пределов: предел переменной, предел числовой последовательности, предел функции. В современных курсах рассматривают лишь два последних. Понятия «предел последовательности», «предел функции» являются не только важнейшими понятиями математического анализа, но и сложнейшими понятиями для восприятия. При изучении теории пределов у студентов возникает ряд трудностей. И это не случайно. Трудности можно объяснить тем, что переход от конечного к бесконечному, от дискретного к непрерывному требуют высокого уровня абстрактно-теоретического мышления. Более того, с понятием предела в повседневном обиходе встречаться не приходится. Это понятие очень глубокое, и возникло оно в результате многостепенного абстрагирования от окружающей действительности. По этой причине усвоить данные понятия студентам первого курса довольно сложно. Чтобы избежать формального заучивания определений предела последовательности, предела функции, формирование данных понятий мы осуществляем поэтапно.

Перед тем как ввести определение предела последовательности, мы формируем у студентов наглядно-интуитивное представление о данном понятии. С этой целью рассматриваем ряд примеров бесконечных последовательностей, включая возрастающие, убывающие, колеблющиеся последовательности, имеющие предел и не имеющие предела. При этом для большей наглядности каждой из последовательностей даём геометрическую интерпретацию.

1. $a_n = 4n; \quad 4,\ 8,\ 12,\ 16, \ldots, 4n, \ldots$
2. $b_n = -3n; \quad -3,\ -6,\ -9,\ -12, \ldots, -3n, \ldots$
3. $y_n = \dfrac{n+1}{n}; \quad 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3}, \ldots$
4. $x_n = \dfrac{2n-1}{n}; \quad 1, \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{4}, \ldots$
5. $z_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n}; \quad 2,\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{13}{4}, \ldots$

Анализируя поведение рассматриваемых последовательностей, первокурсники отмечают особенности каждой из указанных последовательностей: первая – бесконечно возрастающая последовательность, члены которой могут превышать любое наперёд заданное положительное число; вторая – убывающая, члены ее могут стать меньше любого наперёд заданного отрицательного числа; третья – бесконечно убывающая последовательность, члены ее уменьшаются и как угодно близко приближаются к числу 1, оставаясь правее этого числа; четвёртая последовательность возрастающая, и ее члены как угодно близко приближаются к числу 2, оставаясь левее этого числа; пятая – колеблющаяся последовательность, члены которой с обеих сторон как угодно близко приближаются к числу 3. Обращаем внимание на то, что в последних трёх бесконечных последовательностях члены как угодно близко приближаются к определённому числу. Это число и называют пределом последовательности.

Чтобы подвести первокурсников к определению предела последовательности в общем виде, мы предлагаем студентам языком математики записать свойства членов последовательности: как угодно близко приближаются к определенному числу. С этой целью рассматриваем расстояние каждого члена последовательности от числа, к которому стремятся члены последовательности на примере 4.

Так как расстояние между двумя точками на координатной прямой равно модулю разности их координат, то имеем ряд следующих равенств:

$$|x_1 - 2| = |1 - 2| = 1,$$

$$|x_2 - 2| = \left|\frac{3}{2} - 2\right| = \frac{1}{2},$$

$$|x_3 - 2| = \left|\frac{5}{3} - 2\right| = \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|x_{100} - 2| = \left|\frac{199}{100} - 2\right| = \frac{1}{100},$$

$$|x_{101} - 2| = \left|\frac{201}{100} - 2\right| = \frac{1}{101}, \ldots$$

Из данных равенств вытекает, что разность между членами последовательности x_n и числом 2 с возрастанием номера n члена последовательности все время уменьшается и может стать меньше любого наперёд заданного положительного числа ε. Если $\varepsilon = 0{,}01$, номер члена последовательности, с которого выполняется неравенство $|x_n - 2| < 0{,}01$, обозначим через N. Для последовательности x_n, начиная с N = 100, для всех $n > 100$ верно неравенство $|x_n - 2| < 0{,}01$.

Итак, выражение «члены последовательности x_n как угодно близко приближаются к числу 2» означает: каким бы ни было сколь угодно малое положительное число ε, у последовательности найдётся член с номером N, начиная с которого, т. е. для всех $n >$ N, разность по модулю между любым членом последовательности и числом 2 будет меньше ε. Таким свойством обладают числа 1 и 3 последовательностей y_n и z_n и их называют пределом этих последовательностей. Вводим определение.

Число А называют пределом последовательности x_n, при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ такое, что если выполняется неравенство $n >$ N, то при таких n выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$, и записывают в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$.

Этому абстрактному понятию даём геометрическую интерпретацию: неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$.

Геометрически это означает, что бесконечное множество членов последовательности x_n попадает в числовой интервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, а вне его остаётся конечное их число. Любой интервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ числовой прямой называется окрестностью точки А радиуса ε. Поэтому утверждение $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = A$ равносильно утверждению: начиная с некоторого номера N, все члены x_n при $n >$ N принадлежат интервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Одной из важнейших проблем теории пределов является выяснение вопроса о том, какие из числовых последовательностей имеют предел. Дальше формулируем и доказываем два условия существования предела последовательности: необходимое и достаточное.

Понятие предела функции, как и понятие предела последовательности, студенты воспринимают довольно трудно. Поэтому формирование данного понятия начинаем с конкретных примеров и геометрических иллюстраций, т. е. сначала даём студентам наглядно-интуитивное представление о пределе функции. Практика показала, что студенты лучше воспринимают понятие предела функции в терминах $\varepsilon - \delta$.

Обращаем внимание на то, что числовая последовательность – это функция, которая определена на множестве натуральных чисел, а значениями ее являются отдельные числа. В таком случае говорят, что функция изменяется дискретно. Поэтому естественна проблема существования предела функции, областью определения которой является произвольное числовое множество. Разбираем конкретные примеры, которые подводят студентов к пониманию того, что предел функции – это число, к которому как угодно близко приближаются значения функции, если значения аргумента стремятся к определенному числу или $+\infty$, или $-\infty$.

Пример 1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, а множество значений – числовой промежуток $[2,+\infty)$.

Предлагаем студентам проследить за поведением данной функции при условии, что значения аргумента x как угодно близко приближаются к числу 2, символически обозначаем $x \to 2$. Если $x \to 2$, оставаясь слева от точки 2, то соответствующие значения функции, увеличиваясь, как угодно близко приближаются к числу 4. Если $x \to 2$, оставаясь справа от точки 2, то соответствующие значения функции уменьшаются и тоже как угодно близко приближаются к числу 4. Имеем, что, каким бы образом значения аргумента x как угодно близко не приближались к числу 2, соответствующие значения функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ как угодно близко приближаются к числу 4. В этом случае говорят, что число 4 есть предел функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ при $x \to 2$, и записывают $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)=4$.

Пример 2. Дана функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$.

$D(y)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$. Проследим за поведением функции, если $x \to 4$. В отличие от функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ в точке $x=4$ не определена. Изображаем график данной функции (рисунок 1), по которому несложно установить, что если $x \to 4$, то значения функции как угодно близко приближаются к числу 8.

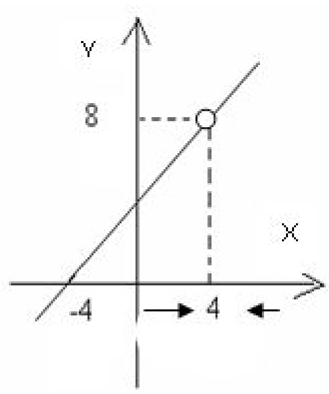


Рисунок 1

В таком случае также считают, что число 8 – предел функции $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ при $x \to 4$, и записывают $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$.

Обобщаем рассмотренные примеры и подводим студентов к следующему выводу: если число m является пределом функции *f(x)*, то значения функции *f(x)* как угодно близко приближаются к числу m, если значения аргумента x как угодно близко приближаются к некоторому числу a, т. е. если $x \to a$. Сформулированное свойство числа m предлагаем записать языком математики (рисунок 2). В примере 1 зададим как угодно малое число $\varepsilon > 0$ и построим ε-окрестность точки 4. Все значения

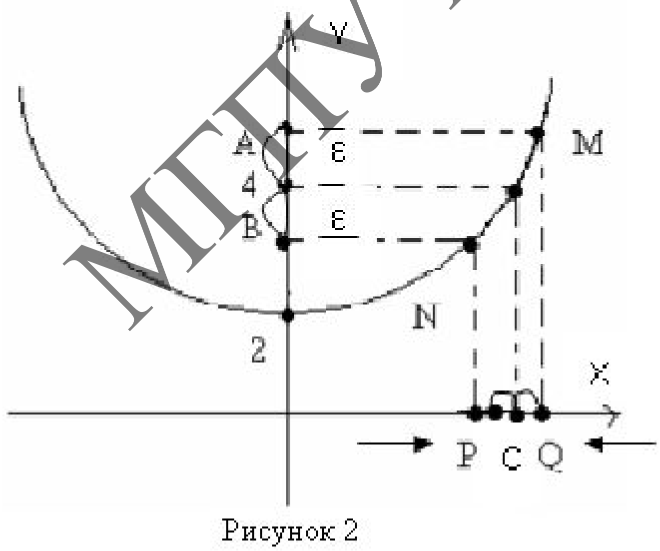


Рисунок 2

функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, которые содержатся в ε-окрестности точки 4, т. е. внутри отрезка AB, удовлетворяют неравенству: $4-\varepsilon<f(x)<4+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<f(x)-4<\varepsilon$, что равносильно неравенству

$$|f(x)-4|<\varepsilon. \quad (1)$$

Но поведение функции зависит от того, какие значения принимает аргумент *x*. Найдём все те значения аргумента *x*, для которых всегда выполняется неравенство (1). С этой целью точки M и N проектируем на ось OX. Отрезок PQ содержит кроме точки 2, все значения аргумента *x*, для которых выполняется неравенство (1). Очевидно, что PC > CQ. Длину меньшего отрезка обозначим через δ и построим δ-окрестность точки 2. Все точки оси OX, которые содержатся в δ-окрестности точки 2, удовлетворяют неравенству

$$2-\delta<x<2+\delta \Leftrightarrow -\delta<x-2<\delta \Leftrightarrow |x-2|<\delta.$$

Имеем, что для тех значений аргумента *x*, которые удовлетворяют неравенству $|x-2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-4|<\varepsilon$.

Геометрически это означает, что только значения аргумента *x*, которые стремятся к числу 2 и попадают в δ-окрестность этой точки, соответствующие значения функции *f*(*x*) попадают в ε-окрестность точки 4.

На примере 2 показываем, что для заданного $\varepsilon>0$ найти δ-окрестность точки 4 можно не только графически, но и аналитически.

После рассмотренных примеров вводим определение предела функции.

Число *b* называется пределом функции *f*(*x*) при $x\to a$ (или в точке *a*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta>0$, зависящее от ε, если для всех $x\neq a$ и таких, которые удовлетворяют неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

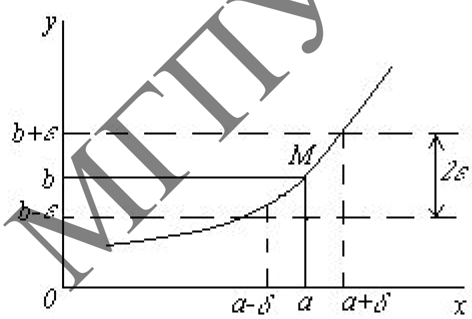


Рисунок 3

Это определение в общем виде для функции демонстрируем на рисунке 3.

Студенты лучше воспринимают данное определение в том случае, если сразу показать, как его применить для доказательства равенства $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=b$.

Как показывает опыт работы с первокурсниками, при таком подходе к формированию понятий предела последовательности, предела функции, они хорошо усваивают данные понятия и в дальнейшем используют их для решения различных задач, связанных с этими понятиями.

С. Д. Шаврей

ОСОБЕННОСТИ ДВОЙНИКОВАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ ВИСМУТА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее время возрос интерес к изучению влияния внешних энергетических воздействий на пластическую деформацию различных материалов. Одним из видов немеханического воздействия на материал является магнитное поле (МП), влияние которого на пластическую деформацию различных материалов получило название магнитопластический эффект (МПЭ). В значительной степени это явление изучено для ионных кристаллов, полупроводников и металлов, где пластическая деформация осуществляется скольжением [1–9]. Большинство исследователей склоняется к выводу, что слабое МП создает условия для открепления дислокаций от локальных магниточувствительных дефектов, а дальнейшее их движение обуславливается полями дальнодействующих внутренних напряжений кристалла. Несмотря на значительное число публикаций по данной проблематике, влияние МП на пластическую деформацию часто подвергается сомнению.

На этом фоне практически не изученным остается вопрос магниточувствительности такого важнейшего вида кристаллографического формоизменения, как двойникование. Важным фактором, определяющим несомненную актуальность исследований в данной области, является то, что скольжение и двойникование являются взаимосвязанными процессами. Это дает возможность изучать влияние МП на оба процесса одновременно. Кроме этого экспериментальное изучение воздействия МП на металлы, где пластическая деформация реализуется перемещением как полных, так и частичных дислокаций, может способствовать углублению представлений о физических механизмах МПЭ.

Трудности управления пластической деформацией двойникованием сдерживают применение некоторых технически перспективных материалов, таких как Ti, Be, Zn, сплавов на их основе, поэтому изучение особенностей двойникования кристаллов в МП целесообразно с точки зрения практического применения исследуемого явления для разработки новых возможностей и способов управления физико-механическими свойствами двойникующихся материалов, а также для прогнозирования поведения таких материалов при эксплуатации в условиях наложения МП. Как показывают многочисленные исследования определяющее влияние на эксплуатационные характеристики оказывает структура и свойства поверхностных слоев материала и непосредственно качество поверхности. В связи с этим изучение характеристик, позволяющих судить о структурном состоянии и свойствах локальных объемов материала в поверхностных слоях с помощью метода микроиндентирования, используемого в данной работе, имеет практическое значение.

Удобным материалом для изучения пластической деформации двойникованием является висмут. Монокристаллические образцы висмута химической чистоты 99,97% имели форму прямоугольных призм и размеры 5×5×15 мм. Для достижения однородности МП образцы закреплялись с помощью специального устройства, изготовленного из неферромагнитных металлов, в геометрическом центре сердечника электромагнита на высоте 10 см от стального столика микротвердомера ПМТ-3. Непосредственные измерения, выполненные с помощь датчика Холла, показали, что неоднородность МП вдоль образца не превышала 2%. С целью устранения инструментальных эффектов стальные детали ПМТ-3, находившиеся в МП (оправка стандартной пирамиды Виккерса, грузы на штоке индентора) заменялись деталями, изготовленными из неферромагнитных металлов. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась перпендикулярно свежесколотой плоскости спайности (111) кристаллов висмута. При таком способе нагружения возникают линзовидные двойники системы {110}<001>, которые легко прорастают вглубь кристалла под действием внешней силы и при выходе на свободную поверхность имеют форму клина. Усреднение проводилось по результатам измерений размеров двойников не менее 20 отпечатков.

В работе [10] впервые обнаружено, что комбинированное приложение МП и сосредоточенной нагрузки приводит к частичному падению размеров двойников и снижению их количества вокруг отпечатка. Приложение и отключение МП после микроиндентирования не меняет картину пластической деформации двойникованием. Эффект магниточувствительности двойникования кристаллов висмута, который заключается в уменьшении размеров двойников и снижении их числа, наблюдался в том случае, когда МП и сосредоточенная нагрузка одновременно прилагались к образцу. Обращение знака поля не вносило изменений в результат пластической деформации двойникованием.

Сравнительный анализ показал, что длина двойников в присутствии МП существенно меньше, чем без поля. Этот факт свидетельствует об уменьшении среднего пробега двойникующих дислокаций при приложении МП к образцу. В интервале времени $t = 0{,}1–5$ часа воздействие сосредоточенной нагрузки практически не изменяет длину двойников L как при приложении МП, так и без него, т. е. средний пробег двойникующих дислокаций не зависит от времени воздействия сосредоточенной нагрузки. В то же время размножение двойникующих дислокаций не прекращается, о чем свидетельствует экспериментальный факт увеличения ширины h клиновидных двойников у устья. При этом приложение МП заметно подавляет этот процесс [11, 12].

Изучение зависимости размеров двойников, образованных воздействием сосредоточенной нагрузки в течение $t = 5$ мин при изменении веса груза на штоке индентора в диапазоне $P = 0{,}09–0{,}3$ Н без поля и при наложении МП с индукцией $B = 0{,}2$ Тл на образцы монокристаллов висмута, показало, что длина и ширина двойников линейно зависит от нагрузки как в МП, так и без него. Установлено, что снижение среднего пробега двойникующих дислокаций в МП не зависит от нагрузки. Число двойникующих дислокаций n, локализованных на границе раздела двойник – материнский кристалл, с увеличением нагрузки увеличивается, при этом в МП n значительно меньше [13].

Обнаружена чувствительность микротвердости H монокристаллов висмута к приложению МП. При этом H слабо зависит от нагрузки. Без приложения МП к образцу H несколько увеличивается с ростом P. Это находится в качественном согласии с законом Мейера [11]. Приложение МП ведет к тому, что H монокристаллов висмута при малых P увеличивается до 10%. В присутствии МП H уменьшается при увеличении P и в области больших нагрузок сравнивается с величиной микротвердости без приложения МП, что указывает на поверхностный характер наблюдаемого эффекта в монокристаллах висмута. Увеличение H в МП сопровождается снижением подвижности двойникующих дислокаций γ при малых нагрузках. При увеличении нагрузки H без МП несколько увеличивается, а γ снижается, т. е. наблюдается вполне закономерная корреляция. В то же время при наличии МП и микротвердость, и подвижность снижаются при увеличении нагрузки. Следовательно, сделать однозначный вывод о том, что подвижность дислокаций отвечает за изменение микротвердости в МП нельзя. Можно предположить, что увеличение H происходит за счет взаимного пересечения дислокаций различных систем скольжения при стимулирующем действии МП. Если этот эффект имеет поверхностный характер, то при увеличении нагрузки, т. е. при более глубоком проникновении индентора в кристалл, уменьшение H можно связать с интенсификацией процессов размножения дислокаций и поперечного скольжения.

В [14] получено, что для кристаллов висмута существует пороговое значение МП с индукцией $B_0 \approx 0{,}1$ Тл, по достижению которого средние размеры двойников начинают уменьшаться. При $B > 0{,}2$ Тл L практически не изменяется, что свидетельствует о насыщении наблюдаемого эффекта.

Учитывая взаимосвязь двойникования и скольжения в [15], удалось выявить различие в размерах дислокационной розетки, возникающей вокруг отпечатка индентора и состоящей из рядов полных дислокаций скольжения с полем и без него. Приложение МП существенно увеличивает размеры упрочненных областей поверхности кристалла (размеры дислокационной розетки, образованной скольжением). Кроме этого, опытные данные, полученные методом избирательного травления, указывают на то, что приложение МП стимулирует работу всех плоскостей скольжения. Возникающее в результате этого деформационное упрочнение объясняет тот факт, что микротвердость не уменьшается при имеющей место пластификации скольжением в МП.

В [16] проведена сравнительная оценка величины объемной упругой энергии двойников W_v и поверхностной энергии двойниковых границ W_s в МП и без приложения МП. Получено, что W_v обнаруживает рост, как без поля, так и в присутствии МП, и испытывает тенденцию к насыщению с увеличением времени выдержки кристалла под нагрузкой. Причиной роста W_v является размножение двойникующих дислокаций при неизменной длине их пробега, что приводит к уменьшению междислокационного расстояния. Последнее является причиной и того, что приложение МП не изменяет W_v при значительном падении сдвойникованного объема. Поверхностная энергия двойниковых границ W_s заметно меньше в присутствии МП по причине снижения площади межфазной границы раздела двойник – материнский кристалл. Из сравнения численных значений замечено, что W_v на два порядка превышает W_s. Это означает, что большая часть работы внешних сил при двойниковании идет на упругую деформацию. Поэтому можно заключить, что приложение МП при изменении геометрических параметров двойникования практически не меняет энергию системы двойник – материнский кристалл. Иными словами энергетический баланс в условиях МПЭ при двойниковании сохраняется. Некоторое уменьшение поверхностной энергии границы двойника, возможно, связано с преодолением периодического потенциального рельефа Пайерлса (силы сухого трения) каждой двойникующей дислокацией при обратном ее движении.

Обсуждая природу наблюдаемого эффекта частичного подавления двойникования приложением МП, прежде всего, необходимо учесть явление магнитострикции. На это указывает неизменность картины двойникования при изменении направления МП, т. к. магнитострикция относится к четным эффектам. С другой стороны, магнитострикция в однородном МП, подобно тепловому расширению, может привести свободный кристалл лишь к изменению его размеров. Напряжения возникают в неоднородном поле. При этом деформации, имеющие магнитострикционную природу, в диамагнитных материалах, к которым относится висмут, могут достигать только величины порядка 10^{-6} (магнитная восприимчивость Bi $\chi = -1{,}5 \cdot 10^{-6}$). Это заметно меньше значения деформации начала размножения дислокаций ($4 \cdot 10^{-4}$) и значения деформации отрыва дислокационных сегментов от стопоров ($8 \cdot 10^{-5}$). Немаловажным является и то, что величина магнитострикционного напряжения с ростом индукции МП должна увеличиваться, в то время как в работе [14] получено, что при увеличении индукции МП наблюдается насыщение эффекта частичного подавления двойникования приложением постоянного МП. Следует отметить то, что в случае действия магнитострикционного механизма снятие МП приводило бы к восстановлению картины двойникования до значения без воздействия МП. Тот факт, что без нагрузки МП не меняет картину пластической деформации двойникованием, также свидетельствует не в пользу магнитострикционного механизма. Аналогичные выводы относительно влияния МП на пластическую деформацию диамагнитных металлов Zn, Cu, Ag сделаны в [17, 18, 19]. Таким образом, эффект частичного подавления двойникования приложением постоянного МП нельзя отнести к изменениям магнитострикционного происхождения.

Как было показано выше, магниточувствительность пластической деформации двойникованием монокристаллов висмута выражается в падении средних размеров двойников при приложении МП. Поскольку двойникование и скольжение являются конкурирующими видами пластической деформации, логично предположить, что повышение интенсивности скольжения может привести к частичному подавлению двойникования. В пользу такой точки зрения говорит тот факт, что скольжение – процесс инерционный, а двойникование – скачкообразный. Как показал эксперимент, при воздействии МП в течение $t = 0{,}3$ мин средняя длина двойников практически совпадает со средней длиной двойников без приложения МП (рисунок 1). Дальнейшее увеличение выдержки кристалла под нагрузкой в МП ($t = 0{,}3$–$1{,}5$ мин.) приводит к плавному уменьшению средней длины двойников. Скорость перемещения конца двойника по порядку величины совпадает со скоростью двойникования монокристаллов висмута, полученной в [20] при изучении температурной зависимости этого процесса. Кроме этого, в [21] при изучении зависимости двойникования от скорости деформирования сосредоточенной нагрузкой получено, что при $V = 10$ мН/с двойники вообще не развиваются и деформация реализуется преимущественно скольжением. В течение последующего времени выдержки кристалла под воздействием сосредоточенной нагрузки вплоть до 5 часов средняя длина двойников постоянна [11]. Картина пластической деформации скольжением в этом случае также остается стабильной.

С целью выяснения возможных причин частичного подавления двойникования активизирующимся в МП скольжением следует рассмотреть схему пластического течения материала при формировании отпечатка. Деформация в этом случае осуществляется двумя способами:

вмятием материала вглубь и его выдавливанием вверх, благодаря чему вокруг отпечатка индентора образуются навалы. По мере углубления в кристалл двойники уменьшаются и ограниченные области заполняются дислокациями. Движение же полных дислокаций вдоль «навальных» плоскостей, по которым происходит вынос материала на поверхность, при низких температурах затруднено скоплениями двойникующих дислокаций, которые представляют собой границы раздела в кристалле. В результате взаимодействия через упругие поля дислокации матрицы будут как бы «вытесняться» движущейся двойниковой границей.

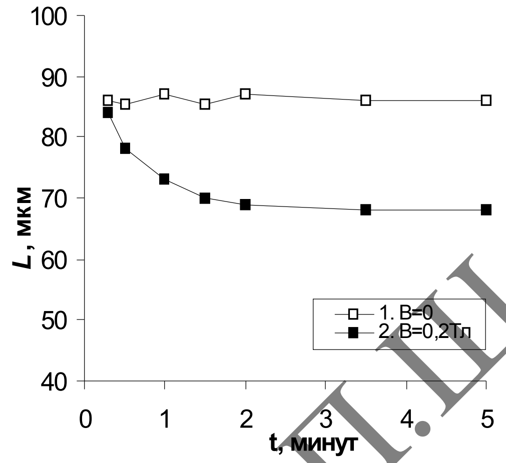


Рисунок 1 – Зависимость средней длины двойника *L* от времени воздействия *t* сосредоточенной нагрузки

В нашем случае ситуация обратная. Двойники, которые на первой фазе своего развития распространяются со скоростью звука [22], уже полностью сформированы до начала реализации скольжения, которое является инерционным процессом. Петли полных дислокаций, лежащих в «навальных» плоскостях, испытывают торможение как со стороны точечных дефектов, так и со стороны скоплений двойникующих дислокаций, краевые компоненты которых при движении двойниковой границы движутся в глубь кристалла. Приложение МП отключает парамагнитные стопоры для дислокаций скольжения. Это приводит к увеличению мощности дислокационных скоплений в «навальных» плоскостях. За счет воздействия индентора концентрация упругих напряжений в головах этих скоплений возрастает, и они движутся к поверхности кристалла, преодолевая упругие отталкивания скоплений двойникующих дислокаций. Очевидно, что в этом случае двойники испытывают «отжатие» упругими полями, что ведет к движению двойникующих дислокаций в обратном направлении и захлопыванию некоторого числа петель двойникующих дислокаций. Иначе говоря, длины двойников и их ширина уменьшаются.

Двойникующие дислокации, по-видимому, в меньшей степени испытывают пластифицирующее влияние МП. В пользу такой точки зрения свидетельствует тот факт, что вектор Бюргерса частичных двойникующих дислокаций в кристаллах висмута равен всего $b = \frac{1}{12}a$, где a – параметр кристаллической решетки [22]. Кроме этого, там нет разорванных межатомных связей. Поэтому в ядрах двойникующих дислокаций имеется меньшее количество парамагнитных центров по сравнению с полными дислокациями. Но полностью исключить чувствительность двойникующих дислокаций к МП нельзя, т. к. при своем движении они взаимодействуют с полными, в результате чего на двойникующих дислокациях образуются ступеньки, являющиеся источниками точечных дефектов. Ступеньки, перегибы служат ловушками для электронов, что обеспечивает в этих случаях наличие в ядрах дислокаций парамагнитных центров.

Установление термодинамического равновесия двойника может быть одной из причин уменьшения его длины. При этом между механически и термодинамически равновесными длинами двойников следует проводить различия. Условие механического равновесия заключается в равенстве нулю суммы сил упругого и неупругого происхождения. Упругая сила действует на двойникующие дислокации со стороны внешнего поля и других дислокационных скоплений. Силы неупругого происхождения обусловлены следующими причинами. Любая дислокация при своем движении испытывает силу торможения подобно силе сухого трения. Сила Пайерлса существует даже в идеальном кристалле и обусловлена дискретностью решетки. Если кристалл дефектен, то существует сила сопротивления, обусловленная дефектами. Дефекты оказывают как непосредственное сопротивление преодолению их дислокациями, так и сопротивление за счет создаваемых ими упругих полей. Другой тип неупругих сил – сила поверхностного натяжения, действующая на двойникующую дислокацию со стороны материнского кристалла и равная нулю везде вне малой окрестности у кончика двойника [22].

Форма механически устойчивого двойника в момент его образования определяется исключительно условиями его возникновения, а не термодинамическим равновесием. При достаточно долгом существовании двойника к требованию механической устойчивости добавляется условие термодинамической устойчивости [23]. Из общих соображений ясно, что термодинамическое равновесие двойника наступает в том случае, когда поверхностная энергия двойниковой границы будет минимальна. При длительном воздействии сосредоточенной нагрузки двойник укорачивается и приобретает термодинамически равновесную форму по мере преодоления силы сухого трения. За счет действия сил поверхностного натяжения двойникующие дислокации начинают обратное движение и останавливаются на более близких расстояниях от индентора. Как отмечается в [24], основным физическим механизмом в преодолении диссипативной силы Пайерлса (силы сухого трения) является перемещение термически активируемых перегибов на дислокациях. При таком механизме дислокации ожидают подходящих термических флуктуаций для преодоления точечных стопоров. По этой причине установление термодинамически равновесной длины двойника происходит в течение десятков часов. Повышение температуры кристалла ведет к дальнейшему укорачиванию двойника после того, как процесс установления его термодинамического равновесия считался завершенным.

В нашем случае приложение МП снижает длительность этого процесса до нескольких минут. Возможной причиной является то, что МП отключает магниточувствительные стопоры, препятствующие обратному движению двойникующих дислокаций. Разблокированная двойниковая граница получает возможность в течение более короткого времени принять термодинамически равновесную форму.

Известно [25], что изучение формы двойника позволяет экспериментально определить линейную плотность $\rho(x)$ таких дислокаций вдоль длины двойника, совпадающей с направлением x. Толщина двойника в некоторой точке x очевидным образом связана с линейной плотностью двойникующих дислокаций соотношением

$$h(x) = a\int_x^L \rho(y)dy,$$

где a – параметр решетки в направлении, перпендикулярном плоскости двойникования,

L – длина двойника.

Тогда линейную плотность двойникующих дислокаций можно найти из соотношения

$$\rho(x) = -\frac{1}{a}\frac{dh(x)}{dx}.$$

Следовательно, по измерениям толщины двойника $h(x)$ можно определить значение функции $\rho(x)$ в каждой точке вдоль длины двойника. Как и в [25], для построения экспериментальной зависимости $\rho(x)$ использовались следующие последовательные действия: строился график зависимости $h(x)$, затем путем графического дифференцирования находилась производная в различных точках полученной кривой, далее умножением производной на коэффициент $1/a$ находились значения линейной плотности. Полученный результат представлен на рисунке 2.

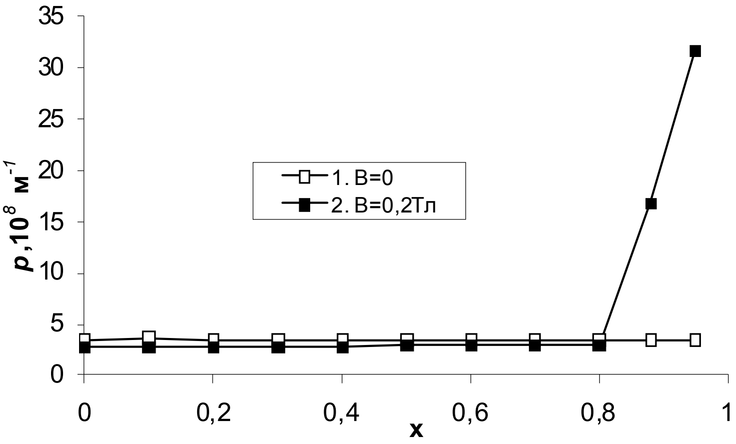
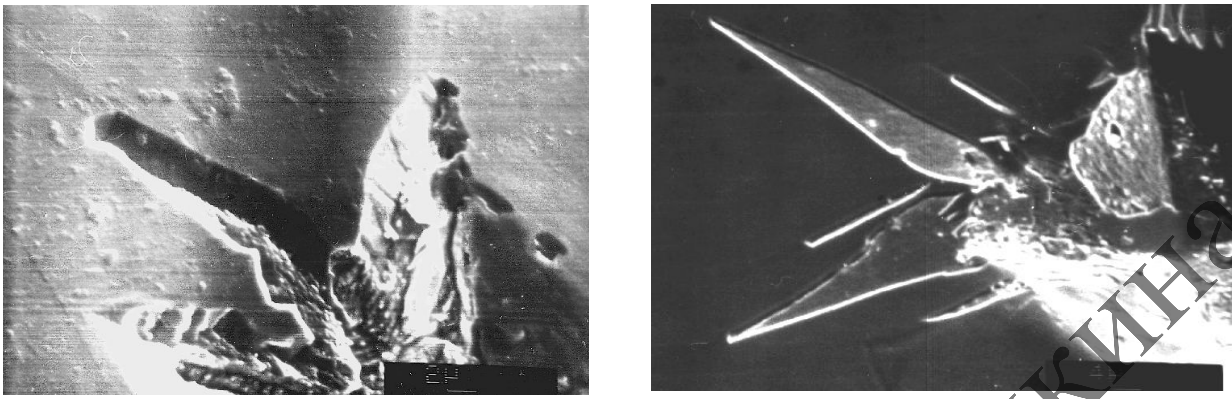


Рисунок 2 – Зависимость линейной плотности двойникующих дислокаций $\rho(x)$ вдоль длины двойника, *t* = 5 мин

Без приложения МП линейная плотность двойникующих дислокаций вдоль длины двойника равна $\rho_0 = 3.5 \cdot 10^8$ м$^{-1}$. На конце двойника, при $x = L$, она обращается в ноль, т. е. $\rho(L) = 0$. В МП численное значение линейной плотности меньше, $\rho = 2.8 \cdot 10^8$ м$^{-1}$. При этом, как видно из рисунка 2, в интервале $0{,}8L \le x \le L$ функция $\rho(x)$ обнаруживает резкий рост и на порядок превышает численное значение ρ_0. В этом случае двойникующие дислокации движутся в обратную сторону. Доказательством этого является экспериментально полученное уменьшение длины клиновидных двойников.

Результаты электронно-микроскопических исследований образцов свидетельствуют в пользу приведенной выше точки зрения. По изменению геометрической формы двойников можно судить о характере протекающих дислокационных процессов. Как видно из микрофотографий на рисунке 3, в МП двойники имеют угол раствора намного больше (близко к 180^0), чем без поля. Возможно, этому способствует разблокирование контура двойника от стопоров парамагнитного типа. Уменьшение площади межфазной границы двойник – материнский кристалл соответствует его форме, когда угол при вершине двойника увеличивается, а его длина уменьшается. Такая форма двойника является термодинамически устойчивой [24]. Кроме этого, при изучении микрофотографий получено, что граница двойника в его конце значительно отклоняется от плоскости двойникования. Увеличенный наклон границы двойника обеспечивается ростом плотности двойникующих дислокаций на линии двойника.



а) – B = 0,2 Тл, t = 5 мин, P = 0,14 Н б) – B = 0, t = 5 мин, P = 0,14 Н
(увеличение 5000×)

Рисунок 3 – Типичная форма двойников при микроиндентировании плоскости (111) монокристалла висмута

Литература

1. О движении дислокаций в кристаллах NaCl под действием постоянного магнитного поля / В.И. Альшиц [и др.] // ФТТ. – 1987. – Т. 29, № 2. – С. 467–471.

2. Исследование магнитопластического эффекта в монокристаллах цинка / В.И. Альшиц [и др.] // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, вып. 4. – С. 1014–1016.

3. Альшиц, В.И. «Insitu» изучение магнитопластического эффекта в кристаллах NaCl методом непрерывного травления / В.И. Альшиц, Е.В. Даринская, Е.А. Петржик // ФТТ. – 1991. – Т. 33, № 10. – С. 3001–3010.

4. Альшиц, В.И. Магнитопластический эффект в монокристаллах алюминия / В.И. Альшиц, Е.В. Даринская, Е.А. Петржик // ФТТ. – 1992. – Т. 34, № 1. – С. 155–158.

5. Альшиц, В.И. Магнитопластический эффект в кристаллах Cs и LiF / В.И. Альшиц, Е.В. Даринская, Е.А. Петржик // ФТТ. – 1993. – Т. 35, № 2. – С. 320–323.

6. Орлов, А.М. Магнитостимулированное изменение независимости дислокаций в пластически деформированном кремнии n-типа / А.М. Орлов, А.А. Скворцов, Л.И. Гончар // ФТТ. – 2001. – Т. 43, вып. 7. – С. 1207–1210.

7. Магнитопластический эффект в InSb / Е.В. Даринская [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 1999. – Т. 70, вып. 4. – С. 298–302.

8. Влияние слабых магнитных полей на динамику изменения микротвердости кремния, индуцируемых малоинтенсивным бета-облучением / Ю.И. Головин [и др.] // ФТТ. – 2007. – Т. 49, вып. 5. – С. 822–823.

9. Песчанская, Н.Н. Скачкообразная ползучесть при сжатии монокристаллов цинка в магнитном поле / Н.Н. Песчанская, Б.И. Смирнов, В.В. Шпейзман // ФТТ. – 2008. – Т. 50, вып 6. – С. 997–1001.

10. Пинчук, А.И. Двойникование в кристаллах висмута при одновременном воздействии постоянного магнитного поля и сосредоточенной

нагрузки / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // Металлофизика. Новейшие технологии. – 2000. – Т. 22, № 12. – С. 43–46.

11. Пинчук, А.И. Магнитопластический эффект в случае двойникования кристаллов висмута под воздействием сосредоточенной нагрузки / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // ФТТ. – 2001. – Т. 43, вып. 1. – С. 39–41.

12. Shavrey, S.D. A Decrease in the Mobility and Multiplication of Twinning Dislocations in Bismuth Crystals Exposed to Constant Magnetic Field / S.D. Shavrey, A.I. Pinchook // Technical Physics Letters. – 2003. – Vol. 29, № 8. – P. 632–633.

13. Шаврей, С.Д. Влияние постоянного магнитного поля и сосредоточенной нагрузки на двойникование в кристаллах висмута / С.Д. Шаврей, А.И. Пинчук // Машиностроение : Республиканский межведомственный сборник научных трудов. Вып.18 / УП «Технопринт» ; под ред. И.П. Филонова. – Минск, 2002. – С. 521–524.

14. Пинчук, А.И. Пороговый характер магнитопластического эффекта при двойниковании в кристаллах висмута / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // ФТТ. – 2004. – Т. 46, вып. 9. – С. 1603–1604.

15. Влияние постоянного магнитного поля и механической нагрузки на скопления полных и частичных дислокаций в кристаллах висмута : Отчет о НИР / Мозырский гос. пед. ун-т ; рук. С.Д. Шаврей. – Мозырь, 2003. – 22 с. – № ГР 20031846.

16. Пинчук, А.И. Объемная упругая энергия двойников кристаллов висмута и поверхностная энергия границы раздела двойник-матрица в магнитном поле / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // ФТТ. – 2005. – Т. 47, вып. 11. – С.1964–1966.

17. Исследование магнитопластического эффекта в монокристаллах цинка / В.И.Альшиц [и др.] // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, вып. 4. – С. 1014–1016.

18. Абраимов, В.В. Влияние магнитного поля на низкотемпературную пластическую деформацию некоторых нормальных ГЦК металлов / В.В. Абраимов // ФНТ. – 1980. – Т. 6, № 10. – С. 1334–1343.

19. Дацко, О.И. Внутреннее трение в магнитообработанном материале с дислокациями / О.И. Дацко, В.И. Алексеенко // ФТТ. – 1997. – Т. 39, № 7. – С. 1234–1236.

20. Грабко, Д.З. Механические свойства полуметаллов типа висмута / Д.З. Грабко, Ю.С. Боярская, М.П. Дынту. – Кишинев : Штиинца, 1982. – 132 с.

21. Остриков, О.М. Влияние скорости нагружения на механизм пластической деформации в висмуте / О.М. Остриков, С.Н. Дуб // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, вып. 5. – С. 44–46.

22. Косевич, А.М. Дислокационная теория упругого двойникования / А.М. Косевич, В.С. Бойко // УФН. – 1971. – Т. 104, вып. 2 – С. 201–255.

23. Лифшиц, И.М. О макроскопическом описании явления двойникования кристаллов / И.М. Лифшиц // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 12. – С. 1134–1143.

24. Бойко, В.С. Силы трения и поверхностного натяжения двойникующих дислокаций / В.С. Бойко, Р.И. Гарбер, Л.Ф. Кривенко // ФТТ. – 1967. – Т. 9, вып. 2. – С. 435–443.

25. Солдатов, В.П. О равновесной форме двойника, затормозившего у препятствия / В.П. Солдатов, В.И. Старцев // ДАН СССР. – 1966. – Т. 166, вып. 3. – С. 588–591.

А. Э. Шмигирев, Э. Ф. Шмигирев

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ С. Н. ЧЕРНИКОВА

Введение

В этой статье мы будем рассматривать только конечные группы. Пусть Σ – некоторое множество подгрупп группы G. Следуя С. Н. Черникову, будем говорить, что Σ плотно в G, если выполняется следующее условие: если A и B – такие подгруппы из G, что $A \subset B$ и A не максимальна в B, то $A \subseteq X \subseteq B$ для некоторой $X \in \Sigma$. В 1974 году С. Н. Черников поставил следующий вопрос: каково строение группы G, в которой множество всех ее субнормальных подгрупп плотно? Ответ на этот вопрос был получен в работе [1]. Заметим, что в теории формаций понятие субнормальности обобщается следующим образом. Говорят, что подгруппа H является F-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_t = H$$

такая, что G_i является F-нормальной максимальной подгруппой в G_{i-1} для любого $i > 1$. Если F совпадает с классом всех нильпотентных групп (который является, конечно, S-замкнутой насыщенной формацией), то F-субнормальная подгруппа оказывается субнормальной. Ясно, что вопрос С. Н. Черникова можно сформулировать в следующей общей форме:

Если F – S-замкнутая насыщенная формация, то каково строение группы, в которой множество всех ее F-субнормальных подгрупп плотно?

В таком виде вопрос С. Н. Черникова был исследован в работе [2] для случая, когда F – класс всех p-нильпотентных групп. В настоящей статье мы исследуем данный вопрос в случае, когда F – *произвольная* S-замкнутая насыщенная формация p-нильпотентных групп. Основной вывод, который вытекает из доказанных ниже теорем 2.1 и 2.2, состоит в том, что *за исключением нескольких вполне обозримых случаев в любой не p-нильпотентной группе G существуют не F-субнормальные подгруппы A и B такие, что $A \subset B$, A не максимальна в B, и из $A \subset X \subset B$ всегда следует, что X не F-субнормальна в G.*

1. Предварительные сведения

Мы используем обозначения из [3], [4]. Класс групп F называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если F – непустая формация, то F-корадикал G – это наименьшая нормальная подгруппа из G, факторгруппа по которой принадлежит F. Формация F называется:

1) насыщенной, если $G/\Phi(G) \in F$ всегда влечет $G \in F$;

2) S-замкнутой, если F замкнута относительно взятия подгрупп.

Максимальная подгруппа M из G называется F-нормальной, если M содержит G^F, и F-абнормальной в противном случае. Группа G называется p-нильпотентной (p – простое число), если она представима в виде полупрямого произведения $G = HP$, где $H \triangleleft G$, $H \cap P = 1$ и P – силовская p-подгруппа из G. Скажем, что формация F p-нильпотентна, если каждая группа из F p-нильпотентна. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых чисел, делящих $|G|$; $\pi(F) = \bigcup_{G \in F} \pi(G)$. Если H – подгруппа из G, то $\pi(G:H)$ – множество всех простых чисел, делящих $|G:H|$. Группа Шмидта – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группа Миллера-Морено – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

Следующая теорема принадлежит Т. Хоуксу.

ТЕОРЕМА 1.1 ([5]; см. также [6], теорема 15.10). *Пусть F – насыщенная формация, G – группа, у которой F-корадикал G^F нильпотентен. Пусть H и M – такие подгруппы из G, что $H \in F$, $H \subseteq M$ и $HF(G) = G$. Если H F-субнормальна в M, то $M \in F$.*

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [3], [7]). (1) *Пусть F – непустая насыщенная формация, G – группа с разрешимым F-корадикалом G^F. Если каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G принадлежит F, то G^F – p-группа для некоторого простого p. Если же каждая F-абнормальная максимальная подгруппа любой F-абнормальной максимальной подгруппы группы G принадлежит F, то $|\pi(G^F)| \leq 2$.*

(2) *Если G – группа Шмидта с нормальной абелевой силовской p-подгруппой $P \neq 1$, то P элементарна.*

ТЕОРЕМА 1.3 (см. [10], теорема IV.7.4). *Группа G разрешима, если она имеет нильпотентную максимальную подгруппу, силовская 2-подгруппа которой имеет класс не более 2.*

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [8], [9]). *При заданных p, α, q существует единственная группа Шмидта G_0 максимального порядка $p^{\alpha}q^{\beta_0}$, где $\beta_0 = b$ при $b \equiv 1 \pmod 2$, $\beta_0 = \frac{3}{2}b$ при $b \equiv 0 \pmod 2$, b – порядок q по модулю p. Все остальные группы Шмидта порядка вида $p^{\alpha}q^{\beta}$ изоморфны факторгруппам группы G_0 по ее центральным нормальным подгруппам.*

ТЕОРЕМА 1.5 (см. [10], с. 350) *Пусть* G *– группа операторов абелевой группы* V*, причем* $(|V|,|G|)=1$. *Тогда* $V=[V,G]\times C_V(G)$.

ЛЕММА 1.1 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация,* H *– подгруппа группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $H^F \subseteq G^F$*;*

2) если H F*-субнормальна в* G*, то* $H\cap N$ F*-субнормальна в* N*, где* N *– произвольная подгруппа из* G*;*

3) если H F*-субнормальна в* G *и* $K \lhd G$*, то* HK F*-субнормальна в* G*;*

4) если H F*-субнормальна в* G *и* F *является подформацией формации* H*, то* H H*-субнормальна в* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Следующая лемма отмечалась в работе [2], ее доказательство осуществляется прямой проверкой.

ЛЕММА 1.2 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация. Если множество всех* F*-субнормальных подгрупп плотно в группе* G*, то справедливы следующие утверждения:*

1) если $K \lhd G$*, то в* G/K *множество всех* F*-субнормальных подгрупп плотно;*

2) если M *– подгруппа из* G*, то множество всех* F*-субнормальных подгрупп из* M *является плотным в* M.

ЛЕММА 1.3 *Если* H *–* F*-субнормальная подгруппа группы* G*, то* $\pi(G:H)\subseteq\pi(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, существует цепь $G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_t=H$ такая, что G_i является F-нормальной максимальной подгруппой в G_{i-1} при любом $i>1$. Таким образом, $G_i\supseteq G_{i-1}^F$, и потому

$$\pi(G_{i-1}:G_i)\subseteq\pi(G_{i-1}:G_{i-1}^F)\subseteq\pi(F)$$

для каждого $i>1$. Следовательно, $\pi(G:H)\subseteq\pi(F)$.

ЛЕММА 1.4 *Пусть* F *– непустая* S*-замкнутая насыщенная формация,* G *– группа, у которой множество всех ее* F*-субнормальных подгрупп плотно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H *–* F*-абнормальная максимальная подгруппа группы* G*, то либо* $H\in F$*, либо каждая* F*-абнормальная максимальная подгруппа из* H *принадлежит* F*;*

2) если $M\subset H\subseteq G$ *и* $H\in F$*, то* M *либо максимальна в* H*, либо* F*-субнормальна в* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение 1). Пусть H – F-абнормальная максимальная подгруппа, не принадлежащая F. Допустим, что H обладает F-абнормальной максимальной подгруппой

H_1, не принадлежащей F. Тогда в H_1 имеется F-абнормальная максимальная подгруппа H_2. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $H_2 \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. По лемме 1.1, $H_1^F \subseteq H^F \subseteq G^F$. Так как N F-субнормальна, то она содержится в F-нормальной максимальной подгруппе, и поэтому $NG^F \neq G$. Значит, $H_2G^F \neq G$. Последнее противоречит следующему:

$$H_2G^F = H_2H_1^F G^F = H_1G^F \quad H_1H^F G^F \quad HG^F \quad G.$$

Докажем 2). Пусть $M \subset H \subset G$ и $H \in F$. Допустим, что M не максимальна в H. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $M \subseteq N \subseteq H$. Так как F S-замкнута, то $N \in F$. Поэтому M F-субнормальна в N. Теперь ясно, что M F-субнормальна в G. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Пусть F – насыщенная S-замкнутая формация, G – группа с нормальной силовской p-подгруппой G_p, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $G \notin F$;

2) холлова p'-подгруппа $G_{p'}$-группы G является максимальной в G и принадлежит F;

3) любая собственная подгруппа из $G_{p'}$ F-субнормальна в G. Тогда G является минимальной не F-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия прямо следует, что G_p совпадает с G^F и является минимальной нормальной подгруппой в G. Понятно, что каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G сопряжена с $G_{p'}$ и поэтому принадлежит F. Пусть L – произвольная F-нормальная максимальная подгруппа из G. Тогда $L = G^F(L \cap G_{p'})$. Так как F S-замкнута, то $L \cap G_{p'} \in F$. Подгруппа $L \cap G_{p'}$ является собственной в $G_{p'}$ и по условию F-субнормальна в G. По теореме 1.1, $L = G^F(L \cap G_{p'}) \in F$. Итак, каждая максимальная подгруппа из G принадлежит F. Лемма доказана.

2. Основные результаты

В настоящем разделе мы изучим вопрос С. Н. Черникова для произвольной S-замкнутой насыщенной формации p-нильпотентных групп. В леммах, которые мы сейчас докажем, F обозначает некоторую произвольным образом выбранную непустую насыщенную S-замкнутую p-нильпотентную формацию, G – группу, которая не принадлежит F и в которой множество всех ее F-субнормальных подгрупп плотно.

ЛЕММА 2.1 *G либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Так как G неразрешима, то она имеет подгруппу H порядка q^2, где q – простое число. По условию, G имеет F-субнормальную подгруппу R такую, что $|R|$ делит q^2. Поэтому в G существует максимальная подгруппа, содержащая G^F. Таким образом, $G^F \neq G$.

По лемме 1.2, множество всех F-субнормальных подгрупп плотно в любой факторгруппе группы G. Поэтому лемма верна для любой нетривиальной факторгруппы группы G. Так как класс всех разрешимых групп и класс всех p-нильпотентных групп – насыщенные формации, то мы получаем, что $\Phi(G)=1$. Очевидно, G имеет минимальную нормальную подгруппу L, содержащуюся в G^F.

1. Рассмотрим случай $p \notin \pi(F)$. Допустим, что G/G^F неразрешима. Тогда G содержит подгруппу Q порядка q^2, где $q \in \pi(G) \cap \pi(F)$. Так как 1 не максимальна в Q, то в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq Q$. По лемме 1.3, $|G:N|$ есть $\pi(F)$-число. Мы получаем, что $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и $p \notin \pi(G)$, т. е. G оказывается p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Противоречие. Следовательно, G/G^F разрешима. Ввиду леммы 1.2, лемма верна для G^F. Значит, G^F либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Так как $p \notin \pi(F)$, то мы видим, что лемма верна и для G.

2. Теперь рассмотрим случай $p \in \pi(F)$. Из леммы 1.2 и индуктивного предположения вытекает, что лемма верна для любой собственной подгруппы группы G. Следовательно, каждая собственная подгруппа группы G либо разрешима, либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой.

2.1. Предположим, что G содержит разрешимую F-нормальную максимальную подгруппу. Тогда G^F разрешима, а G/G^F – неразрешимая p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Из $L \subseteq G^F$ следует, что L является r-группой для некоторого простого r.

Предположим, что $r \neq p$ и $r \notin \pi(F)$. Так как G/L неразрешима, то G имеет подгруппу Q порядка q^2, где $q \in \pi(F)$. По условию, в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq Q$. Так как N – $\pi(F)$-группа, а по лемме 1.3, индекс $|G:N|$ является $\pi(F)$-числом, то мы получаем, что G – p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Противоречие.

Случай $r \neq p$ и $r \in \pi(F)$ невозможен, так как G/L – неразрешимая p-нильпотентная $\pi(F)$-группа. Поэтому остается рассмотреть случай $r = p$. Но тогда G является p-разрешимой $\pi(F)$-группой. Так как G

неразрешима, то в холловой p'-подгруппе $G_{p'}$ из G найдется нециклическая силовская подгруппа S. Пусть S_1 – произвольная максимальная подгруппа из S. Тогда S_1 не максимальна в $G_{p'}$. По условию, в G существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $S_1 \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Обозначим через H формацию всех p-нильпотентных групп. По лемме 1.1, N H-субнормальна в LN. Теперь по теореме 1.1, мы имеем $LN \in H$. Следовательно, $LN = L \times N$, а значит, S_1 централизует L. Получается, что любая нециклическая силовская подгруппа из $G_{p'}$ централизует L. Так как G не принадлежит F, то $G_{p'}$ не централизует L. Итак, в $G_{p'}$ имеется циклическая силовская подгруппа Q, которая не централизует L. Ввиду теоремы 1.3 Q не максимальна в $G_{p'}$. Теперь, применяя к Q те же рассуждения, что и для S_1, получаем, что Q централизует L. Пришли к противоречию.

2.2. Итак, пусть теперь каждая F-нормальная максимальная подгруппа группы G является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. Тогда G оказывается $\pi(F)$-группой, а ее F-корадикал G^F p-нильпотентен. Так как группы Шмидта разрешимы, то отсюда следует, что G имеет F-абнормальную максимальную подгруппу H, которая не является p-нильпотентной. По предположению, H разрешима. По лемме 1.4, каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из H принадлежит F. По теореме 1.2, H^F является q-группой для некоторого простого числа q. Если $q \neq p$, то H p-нильпотентна, противоречие. Таким образом, $q = p$, т. е. H^F есть p-группа. Выберем в H подгруппу Q, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $|Q|$ – степень простого числа; 2) Q не является p-группой; 3) Q не максимальна в H. По условию, в G найдется F-субнормальная подгруппа N такая, что $Q \subseteq N \subseteq H$. По теореме 1.1, $NH^F \in F$, а потому мы имеем $[Q, H^F] = 1$. Так как H не p-нильпотентна, то мы получаем, что $H/C_H(H^F)$ не является p-группой. Мы видим, что в H существует силовская q-подгруппа H_q такая, что H_q максимальна в H, $p \neq q$ и $H_q \not\subseteq C_H(H^F)$. Если H_2 нециклическая, то она имеет две различные максимальные подгруппы Q_1 и Q_2, которые, как мы доказали, централизуют H^F. Отсюда следует, что и $H_q = Q_1 Q_2$ централизует H^F, что невозможно. Следовательно, Q – циклическая максимальная подгруппа в H. Группа G у нас p-разрешима. Будем считать, что H_q содержится в холловой p'-подгруппе $G_{p'}$ группы G. Если Q максимальна в $G_{p'}$, то учитывая, что Q циклическая, мы получаем, что, по теореме 1.3, подгруппа $G_{p'}$ разрешима. Но тогда и G разрешима. Получаем противоречие. Таким образом, H_q не максимальна в $G_{p'}$. По условию, в G найдется такая F-субнормальная подгруппа N, что $H_q \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Так как $N \in F$, мы получаем, что H_q F-субнормальна в H. По теореме 1.1, $H \in F$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2 *Предположим, что* $p \in \pi(F)$, G^F – p*-группа,* G *не* p*-нильпотентна, а все ее* F*-абнормальные максимальные подгруппы* p*-нильпотентны. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) G *– группа Шмидта, и* $|\Phi(G_p)| = p$*;*

2) $\pi(G) \leq 3$*, силовская* p*-подгруппа* G_p *из* G *совпадает с* G^F *и является ее минимальной нормальной подгруппой;*

3) $\pi(G) = \{p, q\}$*,* G^F *– дополняемая минимальная нормальная подгруппа в* G*, имеющая индекс* p *в* G*, а подгруппа* G_q *является циклической, причем* $\Phi(G_q)G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, G разрешима. Пусть H – некоторая F-абнормальная максимальная подгруппа из G. Тогда, по условию, некоторая холлова p'-подгруппа $G_{p'}$ входит в H и нормализует ее силовскую p-подгруппу H_p. Так как G^F – p-группа, то $G_{p'} \in F$. А так как $p \in \pi(F)$ и H p-нильпотентна, то из $H/H \cap G^F \in F$ вытекает, что $H \in F$. Рассмотрим два случая: $H_p \neq 1$ и $H_p = 1$.

Случай 1: $H_p \neq 1$. По лемме 1.4, $G_{p'}$ либо максимальна в H, либо F-субнормальна в G. Пусть вначале $G_{p'}$ F-субнормальна в G. Тогда по теореме 1.1, $G^F G_{p'} \in F$. Так как $HG^F = G$, то получается, что $H_p G^F$ – силовская p-подгруппа из G, нормализующая $G_{p'}$. Это противоречит тому, что G не p-нильпотентна. Пусть теперь $G_{p'}$ максимальна в H. Тогда $|H_p| = p$. Значит, G^F либо совпадает с силовской p-подгруппой G_p, либо $|G_p : G^F| = p$.

Случай 1.1: $G^F = G_p$. Допустим, что в G имеется ненильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа M. Будем считать, что ее холлова p'-подгруппа $M_{p'}$ содержится в $G_{p'}$. Так как $M_{p'}$ не максимальна в H и $H \in F$, то по лемме 1.4, $M_{p'}$ F-субнормальна в G, а значит, и в M. По теореме 1.1, $M \in F$, а значит, M нильпотентна. Итак, G – группа Шмидта. Но тогда H_p нормальна в G, а значит, ввиду теоремы 1.2,

G_p не может быть абелевой. Таким образом, $1 \neq \Phi(G_p) \subseteq H$. Так как $|H_p| = p$, то $\Phi(G_p) = H_p$. Итак, G – группа типа 1).

Случай 1.2: G^F не является силовской p-подгруппой в G. Тогда $G^F H_p = G_p$ и $G^F \cap H_p = 1$. Таким образом, G^F является минимальной нормальной подгруппой в G. Рассмотрим подгруппу $M = G^F G_{p'}$. Подгруппа M нормальна в G и не p-нильпотентна. Подгруппа M^F содержится в G^F и характеристична в M. Так как G^F – минимальная нормальная подгруппа, то $G^F = M^F = M_p$ – силовская p-подгруппа из M. Пусть M_1 – такая строго содержащая $G_{p'}$ подгруппа из M, что $G_{p'}$ максимальна в M_1. Из равенства $N_G(G_{p'}) = H$ следует, что M_1 не является p-нильпотентной группой. Каждая собственная подгруппа из $G_{p'}$ не максимальна в H и по лемме 1.4 является F-субнормальной в G, а значит, и в M_1. Теперь, по лемме 1.5, M_1 – минимальная не F-группа, т. е. M_1 – группа Шмидта. Таким образом, $G_{p'}$ – циклическая q-группа, $q \neq p$. Так как $N_G(\Phi(G_q)) \supseteq \langle M_1, H \rangle = G$, то $\Phi(G_q)G$. Лемма в этом случае доказана.

Случай 2: $H_p = 1$. Таким образом, $H = G_{p'}$ – дополнение к подгруппе G^F, которая является в этом случае силовской подгруппой в G и к тому же минимальной нормальной подгруппой. Если каждая собственная подгруппа из $G_{p'}$ F-субнормальна в G, то, по лемме 1.5, G является группой Шмидта, т. е. G – группа типа 3).

Предположим, что G не является группой Шмидта. Тогда в G имеется не p-нильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа M, холлова p'-подгруппа $M_{p'}$ которой входит в $G_{p'}$, принадлежит F и, ввиду теоремы 1.1, не является F-субнормальной в G (в противном случае по теореме 1.1, подгруппа $G^F M_{p'} = M$ была бы p-нильпотентной). Выберем в M такую подгруппу M_1, что $M \supseteq M_1 \supset M_{p'}$ и $M_{p'}$ максимальна в M_1. Допустим, что в $G_{p'}$ имеется F-субнормальная в G подгруппа K, не содержащаяся в $M_{p'}$. Тогда, по теореме 1.1, $G^F K \in F$, т. е. $G^F K = G^F \times K$. Тогда $N_G(M_p)$ содержит $G^F K$ и M, т. е. $M_p G$. Так как G^F – минимальная нормальная подгруппа, то $M_p = G^F$. Любая собственная подгруппа из $M_{p'}$ не максимальна в $G_{p'}$ и по лемме 1.4, является F-субнормальной в G. По лемме 1.5, примененной к M, получаем, что M – минимальная не F-группа. Таким образом, M – группа Шмидта. Значит, $M_{p'}$ – примарная циклическая группа. Так как G разрешима и G^F – минимальная нормальная подгруппа, то мы видим, что G – группа типа 2).

Итак, каждая подгруппа из $G_{p'}$, F-субнормальная в G, содержится в $M_{p'}$. Пусть q – простой делитель индекса $|G_{p'} : M_{p'}|$. Силовская q-подгруппа G_q из $G_{p'}$ не входит в $M_{p'}$ и потому не является F-субнормальной в G. Поэтому по лемме 1.4, G_q максимальна в $G_{p'}$. Отсюда следует, что $|\pi(G_{p'})| \leq 2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3 *Пусть $p \in \pi(F)$ и каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из G p-нильпотентна. Тогда G либо является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой, либо группой одного из типов:*

1) G – группа Шмидта и $\Phi(G_p) = p$;

2) $|\pi(G)| \leq 3$, силовская p-подгруппа G_p является минимальной нормальной подгруппой в G;

3) $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = P_1(G_q P_2)$, где P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G, $|P_2| = p$, G_q циклическая, $\Phi(G_q)G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G не является p-нильпотентной $\pi(F)$-группой. По лемме 2.1, G разрешима. Пусть H – формация всех p-нильпотентных групп. Так как $G^H \subseteq G^F$, то каждая H-абнормальная максимальная подгруппа является F-абнормальной, а значит, ввиду условия, и p-нильпотентной. По тереме 1.2, G^H – p-группа, и теперь мы применяем лемму 2.2 в случае $F = H$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4 *Пусть G не p-нильпотентна и $p \in \pi(G) \subseteq \pi(F)$. Тогда любая F-абнормальная максимальная подгруппа из G либо p-нильпотентна, либо является бипримарной группой Миллера–Морено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2, G разрешима. Пусть H – не p-нильпотентная F-абнормальная максимальная подгруппа группы G. По лемме 1.2, множество всех F-субнормальных подгрупп в H плотно. По лемме 1.4, каждая F-абнормальная максимальная подгруппа из H принадлежит F. По теореме 1.2, H^F – p-группа. Значит, H – группа типа 1), 2) или 3) леммы 2.2. В дальнейшем H обозначает формацию всех p-нильпотентных групп. Пусть H – группа типа 1), т. е. H – группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой H_p и $|\Phi(H_p)| = p$. Тогда $H_{p'}$ не максимальна в H. По условию, в G имеется F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_{p'} \subseteq N \subset H$. Кроме того, $N \in F$. Получается, что

$H_{p'}$ F-субнормальна в G, а значит, и в H. По теореме 1.1, $H \in F$, что невозможно. Итак, H либо типа 2), либо типа 3) из леммы 2.2.

Случай 1: $|G:H| = r^{\alpha}$, $r \neq p$. Тогда холлова p'-подгруппа $G_{p'}$ группы G строго содержит некоторую $H_{p'}$.

Предположим, что H – типа 2). Пусть S – произвольная собственная подгруппа из $H_{p'}$. Так как S не максимальна в $G_{p'}$, то существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $S \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Подгруппа N будет H-субнормальна в G. Поэтому и S будет H-субнормальна в G. По теореме 1.1, $H_p S \in H$, т. е. $H_p S = H_p \times S$. Таким образом, каждая собственная подгруппа из H p-нильпотентна, а значит, H – группа Шмидта, в которой H_p – минимальная нормальная подгруппа. Значит, в этом случае лемма верна.

Итак, H–группа типа 3), т. е. $\pi(H) = \{p, q\}$, H^F – дополняемая минимальная нормальная подгруппа в H, силовская q-подгруппа H_q из H циклическая и $\Phi(H_q) \lhd H$. Если H_q F-субнормальна в H, то по теореме 1.1, $H^F H_q$ нильпотентна, следовательно $H_q \lhd H$, что невозможно. Значит, H_q не F-субнормальна в G. Если H_q не максимальна в $N_G(H_q)$, то по условия, в G найдется F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq N_G(H_q)$. Получается, что H_q – нормальная подгруппа F-субнормальной разрешимой $\pi(F)$-подгруппы N, а потому H_q будет F-субнормальной в G. Итак, H_q максимальна в $N_G(H_q)$, а значит $r \neq q$. Пусть P – силовская p-подгруппа из $N_H(H_q)$, являющейся дополнением к H^F в H. Очевидно, $|P| = p$. Так как H_q не максимальна в H, то $H_q \subseteq N \subseteq H$ для некоторой F-субнормальной подгруппы N из G. Тогда $H_q G^F \subseteq NG^F \neq G$. Так как $G = G^F H \quad G^F H^F N_H(H_q) \quad G^F P H_q$, то мы видим, что P не содержится в G^F. Ввиду леммы 1.4, F-абнормальные максимальные подгруппы F-абнормальных максимальных подгрупп из G принадлежат F, поэтому по теореме 1.2 имеем $|\pi(G^F)| = 2$. Получается, что $G^F = H^F G_r$. Вспоминая, что H^F – минимальная нормальная подгруппа в H, мы получаем, что содержащаяся в G^F минимальная нормальная подгруппа группы G совпадает с H^F либо с G_r. Случай $H^F \lhd G$ не возможен, так как $r \neq p$ и G не p-нильпотентна. Значит, $G_r \lhd G$. Рассмотрим p-нильпотентную подгруппу $M = PH_q G_r$. По условию, H_q содержится в некоторой подгруппе из M, которая F-субнормальна в G. Так как $M \in H$, то H_q будет

H-абнормальна в G, а значит, и в H. Тогда, по теореме 1.1, $H^F H_q$ p-нильпотентна, что противоречит тому, что H не p-нильпотентна. Случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2: $|G:H|=p^{\alpha}$. Будем доказывать этот случай по индукции, используя доказанный нами факт, что для F-абнормальных максимальных подгрупп, индекс которых не является степенью p, утверждение леммы выполняется. Нам надо рассмотреть две возможности: H – либо типа 2), либо типа 3) из леммы 2.2.

Рассмотрим сначала случай, когда H типа 2), т. е. $|\pi(H)|\leq 3$, силовская p-подгруппа из H совпадает с H^F и является минимальной нормальной подгруппой в H. Ясно, что G^F содержит силовскую p-подгруппу G_p группы G, а H^F нормальна в G; кроме того, холлова p'-подгруппа $H_{p'}$ из H является холловой p'-подгруппой в G. Подгруппа H/H^F является F-абнормальной максимальной подгруппой в G/H^F; кроме того, H/H^F – холлова p'-подгруппа в G/H^F. Если L/H^F – любая F-абнормальная максимальная подгруппа из G/H^F, не сопряженная с H/H^F, то индекс $|G/H^F:L/H^F|$ не делится на p. Но тогда L – F-абнормальная максимальная подгруппа в G с индексом, не делящимся на p. По доказанному, L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Будем считать, что $G_p\subseteq L$. Заметим, что $H^F L$. Если L – p-замкнутая группа Миллера-Морено, то G_p – минимальная нормальная подгруппа в L и, значит, $H^F=G_p$, что невозможно. Таким образом, в G/H^F все F-абнормальные максимальные подгруппы p-нильпотентны. По теореме 1.2, G^F/H^F – p-группа. Вспоминая, что $G^F\supseteq G_p$, получаем $G^F=G_p$. Допустим, что в $H_{p'}$ имеется максимальная подгруппа K такая, что $H^F K$ не p-нильпотентна. По теореме 1.1, K не F-субнормальна в G. Так как K не максимальна в H, то $K\subseteq N\subseteq H$ для некоторой собственной F-субнормальной подгруппы N из G. Значит, $G^F N\neq G$. Подгруппа $M=G^F K$ максимальна в G и содержится в $G^F N$. Поэтому $M=G^F N=G^F K$. Так как $N\subseteq H$ и $H\neq M$, то N является собственной F-субнормальной подгруппой в M, и поэтому M^F является собственной подгруппой в G^F. Так как $M\cap H=H^F K$ не p-нильпотентна, то $M^F\neq 1$. Подгруппа K содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе T из M. По индукции, T либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Предположим, что T – группа Миллера-Морено. Тогда $T=T^F K$, где K максимальна в T, а T^F – минимальная нормальная подгруппа в T. Так как $TM^F=M=G^F K$ и $T^F\subseteq M^F\subseteq G^F=G_p$, то $M^F=G^F$, что невозможно, так как M^F – собственная подгруппа в G^F. Значит, T

p-нильпотентна и, более того, принадлежит F. Если K не максимальна в T, то, по условию, $K \subseteq N_1 \subseteq T$, где N_1 F-субнормальна в G. Но тогда K F-субнормальна в G, что невозможно. Таким образом, K максимальна в T и, значит, $T = P \times K$, где $|P| = p$. Так как $M = M^F T$, а T максимальна в M и имеет силовскую p-подгруппу P порядка p, то M^F – максимальная нормальная подгруппа в M, а значит, $G_p = G^F = P \times M^F$ – тоже элементарная абелева p-группа.

Случай 2.1: $P \not\subseteq H^F$, $H^F \subseteq M^F$. Так как M^F – минимальная нормальная подгруппа в M, то $H^F = M^F G$. По теореме Машке, $G^F = P_1 \times M^F$, где $P_1 G$. Так как $M / M^F \in F$, то M-главные факторы PM^F / M^F и $P_1 M^F / M^F$ центральны. Но тогда P и P_1 содержатся в $Z(M)$. Если $P \neq P_1$, то из $G^F = PP_1 M^F$ вытекает, что $PP_1 \cap M^F \neq 1$, а это противоречит тому, что M^F – F-эксцентральный главный фактор в M. Значит, $P = P_1 G$. Рассмотрим подгруппу $T_1 = PH_{p'}$. Подгруппа K не максимальна в T_1, поэтому $K \subseteq N_1 \subseteq T_1$, где N_1 – некоторая F-субнормальная подгруппа из G. Так как $G^F T_1 = G$, то T_1 не может быть F-субнормальной в G. Поэтому $N_1 \neq T_1$. Из максимальности K в $H_{p'}$ выводим, что N_1 совпадает либо с $H_{p'}$, либо с $PK = P \times K$. В обоих случаях $N_1 \in F$. Отсюда и из F-субнормальности подгруппы N_1 следует, что K F-субнормальна в G, и мы приходим к противоречию.

Случай 2.2: $P \not\subseteq H^F$, $H^F \not\subseteq M^F$. Так как $H^F \cap M^F = 1$, то главные факторы $H^F M^F / M^F$ и PM^F / M^F изоморфны, откуда выводим, что H^F содержится в $Z(M)$. Но тогда $PH^F \cap M^F$ – неединичная подгруппа из $Z(M)$, что невозможно, так как M^F F-эксцентральна. Получили противоречие.

Случай 2.3: $P \subseteq H^F$. Так как $G^F = PM^F$, то из $P \subset H^F$ следует, что $H^F \cap M^F \neq 1$, а это противоречит минимальности M^F в M. Поэтому остается принять, что $P = H^F$. Это означает, что $T = PK = H^F K$ p-нильпотентна. Но K была выбрана ранее так, что $H^F K$ не p-нильпотентна. Снова получили противоречие.

Таким образом, в $H_{p'}$ нет максимальных подгрупп K таких, что $H^F K$ не p-нильпотентна. Получается, что H – минимальная не p-нильпотентная группа с минимальной нормальной подгруппой H^F, т. е. H – группа Миллера-Морено.

Пусть теперь H – группа типа 3), т. е. $\pi(H) = \{p, q\}$, H^F – дополняемая минимальная нормальная подгруппа в H, не являющаяся силовской в H, а силовская q-подгруппа H_q из H является циклической и $\Phi(H_q)H$. Если H_q F-субнормальна в H, то $H^F H_q$ p-нильпотентна по теореме 1.1 и, кроме того, дополнение к H^F в H тоже p-нильпотентно. А это противоречит тому, что H не p-нильпотентна. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь в виду, что H_q не F-субнормальна в H.

Если H_q не максимальна в $N_G(H_q)$, то по условию, $H_q \subseteq N \subseteq N_G(H_q)$, где N F-субнормальна в G. Так как $N_G(H_q) \in F$, то получается, что H_q F-субнормальна в G, что невозможно. Итак, H_q максимальна в $N_G(H_q)$. Пусть PH_q – дополнение к H^F в H, а P – дополнение к H^F в силовской p-подгруппе H_p из H. Тогда $G = G^F PH_q$, $PH_q = N_G(H_q)$. Подгруппа H_q не максимальна в H, но максимальна в $PH_q \in F$, т. е. $|P| \neq p$. Поэтому, по условию, существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq H$. Значит, N содержится в максимальной подгруппе группы G, содержащей G^F. Равенство $G = G^F PH_q$ показывает теперь, что P не содержится в G^F. Подгруппа $M = G^F H_q$ максимальна в G, поскольку ее индекс равен $|P| = p$. Так как N –собственная F-субнормальная подгруппа в G, то $G^F N$ не равна G, но содержит $G^F H_q = M$. Значит, $G^F N = G^F H_q = M$. Но N – собственная F-субнормальная подгруппа в M, поэтому $M^F N \neq M$. Получается, что M^F – собственная подгруппа из G^F. Ясно, что H_q содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе L группы M. Для M лемма верна по индукции, поэтому L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Если L p-нильпотентна, то из $N_M(H_q) = H_q$ выводим, что $L = H_q$ и поэтому $G^F = M$, что невозможно. Таким образом, L – группа Миллера-Морено, у которой L^F – силовская p-подгруппа. Но тогда ввиду того, что $L^F \subseteq M^F$ и $M = M^F L = G^F H_q$, мы получаем $M^F = G^F$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1 *Пусть F – непустая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, G – группа, в которой множество всех F-субнормальных подгрупп плотно, $\pi(G) \not\subseteq \pi(F)$. Тогда G – группа одного из следующих типов:*

1) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1 q$, $q \notin \pi(F)$;

2) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1 q^2$, G_{p_1} *максимальна в* G, $p_1 \in \pi(F)$, $q \notin \pi(F)$;

3) $\pi(G) = \{q\}$, $|G| \leq q^2$, $q \notin \pi(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1, G разрешима. Так как $\pi(G) \notin \pi(F)$, то ясно, что $G^F \neq 1$. Положим $\pi = \pi(F)$ и рассмотрим холлову π-подгруппу G_π группы G. Если единичная подгруппа не является максимальной в G_π, то существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq G_\pi$. По лемме 1.3, $\pi(G:N) \subseteq \pi$ и, значит, G – π-группа. Получили противоречие. Таким образом, $|G_\pi|$ равен либо 1, либо является простым числом.

Рассмотрим теперь холлову π'-подгруппу $G_{\pi'}$ группы G. Пусть H – нормальная максимальная подгруппа из $G_{\pi'}$. Пусть $q = |G_{\pi'} : H|$, $q \in \pi'$. Если 1 не максимальна в H, то между 1 и H можно вставить F-субнормальную подгруппу, индекс которой по лемме 1.3 является π-числом. Понятно, что этот индекс делится на $q \in \pi'$. Получаем противоречие. Значит, $|G_{\pi'}|$ равен либо квадрату простого числа, либо простому числу, либо произведению двух различных простых чисел.

Если $|G_\pi| = 1$, то ясно, что G либо типа 1), либо типа 3). Пусть $|G_\pi| = p_1$ – простое число. Если $|G_{\pi'}|$ – простое число, то G – группа типа 1). Пусть $|G_{\pi'}| = qq_1$, где q, q_1 – простые числа. Предположим, что в G существует подгруппа T порядка $p_1 q$. Так как 1 не максимальна в T, то между 1 и T существует, по условию, F-субнормальная подгруппа, индекс которой по лемме 1.3 является π-числом. Но этот индекс делится и на $q_1 \in \pi'$. Остается принять, G_p – максимальная подгруппа группы G. Но тогда $q = q_1$ и G – группа типа 2). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2 *Пусть F – непустая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, G – $\pi(F)$-группа, у которой множество всех F-субнормальных подгрупп плотно. Тогда G либо p-нильпотентна, либо является группой одного из следующих типов:*

1) G – группа Шмидта, $|\Phi(G_p)| \leq p$;

2) $G = G_p G_q$, G_q нециклическая, $G_p = G^F$ – минимальная нормальная подгруппа в G, $C_G(G_p)$ является нильпотентной максимальной подгруппой в G, а любая другая максимальная подгруппа из G, содержащая G_p, является группой Миллера-Морено;

3) $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = G_p G_q$, $G_p = G^F$, $G_q = N_G(G_q)$ в G имеется нильпотентная F-нормальная максимальная подгруппа, а также F-абнормальная максимальная подгруппа, являющаяся группой Миллера-Морено;

4) $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = P_1(G_q P_2)$, где $P_1 P_2 = G_p$, $|P_2| = p$, $\Phi(G_q) \lhd G$, G_q циклическая, P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются $P_1 G_q$, $P_2 G_q$ и $G_p \Phi(G_q)$;

5) $\pi(G)=\{p,q\}$, $G^F=G_p$ *– минимальная нормальная подгруппа в* G, G_q *является циклической максимальной подгруппой в* G, $G_p\Phi(G_q)$ *– либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3),* $\Phi(G)$ $\Phi(\Phi(G_q))$ *и* $G/\Phi(G)$ *– группа Фробениуса;*

6) $\pi(G)=\{p,q,r\}$ *и если* G_p, $G_q\,G_r$ *– силовская база группы* G, *то* $G_pG_r \lhd G$, $\Phi(G_q)\lhd G$, *одна из подгрупп* G_p, G_r *нормальна в* G, G_q *максимальна в* G_qG_r, *имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп в* G, *представителями которых являются* $G_pG_q=G_pG_q$ *– группа Миллера-Морено,* G_qG_r *и* $G_pG_r\Phi(G_q)$*;*

7) $\pi(G)=\{p,q,r\}$, $G=G_p(G_rG_q)$ *– группа порядка* $p^\alpha qr$, *не являющаяся группой Фробениуса и имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются:* G_pG_r *– либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3),* G_pG_q *– группа типа 4),* G_rG_q*;*

8) $\pi(G)=\{p,q,r\}$ $G=G_p(G_r\times G_q)$ *– группа Фробениуса порядка* $p^\alpha qr$, *имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются:* G_pG_r *– либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3),* G_pG_q *– либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3),* G_rG_q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G не p-нильпотентна. Тогда по лемме 2.1, G разрешима.

1. Допустим, что G обладает не p-нильпотентной F-абнормальной максимальной подгруппой H. По лемме 2.3, H – бипримарная группа Миллера-Морено, а значит, $|\pi(G)|\le 3$. Заметим еще, что $H=H_pH_q$, где $H_p=H^F$ – минимальная нормальная подгруппа в H.

1.1 Рассмотрим вначале случай $\pi(G)=\{p,q\}$. Тогда $|G:H|$ есть степень либо простого p, либо q. Пусть $|G:H|=q^\beta$. Пусть G_q – силовская q-подгруппа из G, содержащая H_q. Если H_q не максимальна в G_q, то $H_q\subseteq N\subseteq G_q$, где N – некоторая F-субнормальная в G подгруппа. Тогда H_q F-субнормальна в G, а значит, и в H (напомним, что из $\pi(G)\subseteq\pi(F)$ следует, что $G_q\in F$). Но тогда по теореме 1.1, $H\in F$, противоречие. Значит, $|G_q:H_q|=q$ и $G^FG_q=G$. Пусть L – максимальная подгруппа из G, содержащая G_q. Так как L F-абнормальна, то, по лемме 2.3, L либо p-нильпотентна, либо является группой Миллера-Морено. Но H_p – минимальная нормальная подгруппа в H, поэтому ясно, что L не может быть p-замкнутой группой. Таким образом, L p-нильпотентна. Если

$L \neq G_q$, то из $L \supset G_q \supset H_q$ и из условия вытекает, что существует F-субнормальная в G подгруппа N такая, что $L \supseteq N \supseteq H_q$. Так как $L \neq G$, то $NG^F \neq G$, что противоречит равенству $G_qG^F = G$. Итак, мы должны рассмотреть только случай $L = G_q$. Подгруппа H_q является циклической и максимальна в G_q. Поэтому очевидно, что максимальная подгруппа Q из H_q нормальна в G. Пусть S/Q –минимальная нормальная подгруппа в G/Q. Так как H_pQ/Q – минимальная нормальная подгруппа в H/Q, то S/Q – q-группа, не входящая в H/Q, а значит, $|S/Q| = q$. Так как G_q/Q максимальна и не нормальна в G/Q, то $C_{G/Q}(S/Q) = G/Q$. Ясно теперь, что $H_pQ/Q \lhd G/Q$, а значит, H_pQ нормальна в G. Таким образом, получается, что $G^F \subseteq H_pQ$, что противоречит равенству $G = HG^F$. Итак, теперь надо рассмотреть случай $|G:H| = p^{\alpha}$, т. е. H_q – силовская q-подгруппа в G, а H_p – минимальная нормальная подгруппа в G. Допустим, что силовская p-подгруппа P из $N_G(H_q)$ не равна 1. Так как $P \not\subseteq H_p$, то $H_pN_G(H_q) = G$. Тогда G/H_p p-нильпотентна, а значит, силовская p-подгруппа из G^F содержится в H_p. Но это противоречит равенству $G = HG^F$. Итак, $H_q = G_q = N_G(G_q)$. По теореме Бернсайда, G q-нильпотентна и, значит, G^F – силовская p-подгруппа в G. Максимальная подгруппа Q из H_q не максимальна в H, поэтому $Q \subseteq N \subset H$ для некоторой F-субнормальной в G подгруппы N. Так как N – абелева $\pi(F)$-группа, то $N \in F$. Значит, Q оказывается F-субнормальной в G. По теореме 1.1, $QG_p \in F$. Мы получаем, что G – группа типа 3).

1.2. Рассмотрим теперь случай $\pi(G) = \{p, q, r\}$. Тогда ясно, что H – холлова подгруппа в G; будем полагать, что $|H|$ делится на p и q. Пусть G_p, G_q и G_r – попарно перестановочные силовские подгруппы из G такие, что $H = G_pG_q$. Так как $G_p = H^F \subseteq G^F$ и $HG^F = G$, то $G_pG_r = G^F$. Рассмотрим максимальную подгруппу M из G, содержащую G_qG_r. Если G_q не максимальна в M, то ввиду условия $G_q \subseteq N \subseteq M$, где N – F-субнормальная собственная подгруппа группы G, а значит, $NG^F \neq G$, что противоречит равенству $G_qG^F = G$. Значит, G_q максимальна в M и поэтому $M = G_qG_r$, где G_rM, так как $G_r = G^F \cap M$. Понятно, что содержащаяся в G^F минимальная нормальная подгруппа группы G совпадает либо с G_p, либо с G_r. Пусть T – максимальная подгруппа из G, содержащая G_pG_r. Так как H – группа Миллера-Морено, то холлова

$\{p,q\}$-подгруппа из T нильпотентна. Таким образом, если G_rG, то T p-нильпотентна и $|G:T|=q$. Если G_r не максимальна в G_qG_r, то существует F-субнормальная подгруппа N такая, что $G_r \subseteq N \subseteq G_qG_r$. Тогда G_r H-субнормальна в G, где H – формация всех p-нильпотентных групп, а G_pG_r p-нильпотентна по теореме 1.1, т. е. $G_r \lhd G$. Следовательно, если G_r не нормальна в G, то $|G_p|=q$, $T=G_pG_r$ максимальна в G и G_pG. В любом случае, силовская q-группа T_q из T нормальна в G. Пусть R – еще одна максимальная подгруппа индекса q. Тогда $R_q=T_q$, так как G_q циклическая. Понятно теперь, что T и R сопряжены. Итак G – группа типа 6).

2. Теперь будем полагать, что каждая F-абнормальная максимальная подгруппа группы G p-нильпотентна. Тогда G – группа одного из типов 1)–3) леммы 2.3. Если G – группа типа 1), то доказывать нечего. Пусть G – группа типа 3), т. е. $\pi(G)=\{p,q\}$, $G=P_1(G_qP_2)$, где $P_1P_2=G_p$, $|P_2|=p$, $\Phi(G_q)G$, G_q циклическая, а P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим, что G q-сверхразрешима. Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если M содержит G_q^x и не содержит P_1, то $M=N_G(G_q^x)$. Если M содержит G_q^x и P_1, то $M=P_1G_q^x$. А если M содержит G_p^x, то $|G:M|=q$ и $M=G_p^x\Phi(G_q)$. Таким образом, G имеет точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\Phi(G_q)$. Значит, в этом случае группа G – группа типа 4). Пусть $|\pi(G)|\le 3$ и G_p – минимальная нормальная подгруппа в G. Рассмотрение этого случая разобьем на две части: $|\pi(G)|=2$ и $|\pi(G)|=3$.

2.1. Пусть вначале $\pi(G)=\{p,q\}$. Пусть $G=G_pG_q$. Очевидно, $G_p=G^F$. Предположим, что G_p имеет максимальную подгруппу Q, являющуюся F-субнормальной в G. По теореме 1.1, $QG_p \in F$. Очевидно, $Q \lhd G$. Ясно, что любая максимальная подгруппа из G_p, отличная от Q, не является F-субнормальной в G. Если G_p – циклическая, то G – группа типа 1). Поэтому считаем, что G_p – нециклическая. Пусть Q_1 – максимальная подгруппа из G_q, отличная от Q. Рассмотрим подгруппу $M=G_pQ_1$, являющуюся F-субнормальной в G. Так как Q_1 не F-субнормальна, то $M \notin F$. Пусть M^* – F-абнормальная максимальная подгруппа из M. Так как $M^F \subseteq G_p$, то $|M:M^*|$ – степень p, т. е. Q_1 содержится в подгруппе, сопряженной с M^* в M. Будем считать, что $M^* \supseteq Q_1$. Силовская p-подгруппа M_p^* из M^* нормальна в M^* и в M_p^*Q, т. е. M_p^* нормальна в G. Но G_p –минимальная нормальная подгруппа. Поэтому M^* – q-группа, т. е.

$M^* = Q_1$ максимальна в M. По лемме 1.4, каждая собственная подгруппа из Q_1 будет F-субнормальной в G (мы применяем утверждение 2) леммы 1.4, для случая $H = G_q$). Теперь по лемме 1.5, M является минимальной не F-группой, откуда следует, что M – группа Миллера-Морено, т. е. G – группа типа 2). Предположим теперь. что любая максимальная подгруппа из G_q не является F-субнормальной в G. Пусть $M = G_pQ$ – максимальная подгруппа из G, причем $Q \subset G_q$. Подгруппа M не принадлежит F, иначе Q была бы F-субнормальной. Если Q максимальна в M, то M – группа Миллера-Морено. Если Q не максимальна в M, то Q строго содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Подгруппа M_1 не p-нильпотентна, так как в противном случае $N_G(Q) \supseteq \langle G_q, M_1 \rangle = G$, что противоречит тому, что Q не F-субнормальна. Итак, $M = G_p\, Q \notin F$, в M существует не p-нильпотентная F-абнормальная максимальная подгруппа, $\pi(M) = \{p, q\} \subseteq \pi(F)$. Но этот случай уже рассмотрен, т. е. M – группа типа 3) нашей теоремы. Таким образом, максимальная подгруппа Q_1 из Q нормальна в G. Рассмотрим группу G/Q_1, ее порядок равен $|G_p| \cdot q^2$. Понятно, что если A_1/Q_1 и A_2/Q_2 – две различные подгруппы из G/Q, то $A_1 \cap A_2 G$, и значит, $A_1 \cap A_2 = Q$, так как каждая максимальная подгруппа из G_q не нормальна в G. Следовательно, G/Q_1 – группа Фробениуса с циклической подгруппой G_q/Q_1 порядка q^2. Так как $Q_1 \subseteq \Phi(G_q)$, то получается, что G_q циклическая. Так как $M = G_pQ$ – единственная максимальная подгруппа, содержащая G_p, то $Q_1 = \Phi(G)$. Итак, G – группа типа 5).

2.2. Пусть теперь $\pi(G) = \{p, q, r\}$. По лемме 2.3, G_p – минимальная нормальная подгруппа группы G. Если собственная подгруппа S из $G_{p'}$ не является максимальной в $G_{p'}$, то по условию, существует F-субнормальная в G p'-группа N, содержащая S. По теореме 1.1, $NG_p \in F$, а значит, $NG_p = N \times G_p$. Итак, каждая собственная немаксимальная подгруппа из $G_{p'}$ поэлементно перестановочна с G_p. Так как G не p-нильпотентна, то ясно, что силовская q-подгруппа G_p и силовская r-подгруппа G_r из $G_{p'}$ не могут одновременно быть не максимальными в $G_{p'}$, т. е. либо обе они максимальны в $G_{p'}$, либо только одна из них максимальна в $G_{p'}$. Эти два случая мы рассмотрим.

2.2.1. Пусть G_p максимальна в $G_{p'}$. Тогда, как отмечалось, G_pG_r нильпотентна, а G_pG_q ненильпотентна. Пусть Q – произвольная максимальная подгруппа из G_q. Тогда Q не максимальна в $G_{p'}$ и, по условию, содержится в некоторой F-субнормальной p'-подгруппе, которая, по теореме 1.1, будет поэлементно перестановочна с G_p. Отсюда следует, что G_pG_q – группа Миллера-Морено. Если G_q нормальна в $G_{p'}$, то $|G_r| = r$. Пусть M – максимальная подгруппа из $G_{p'}$, содержащая G_r. Каждая собственная подгруппа из M, как отмечалось, поэлементно перестановочна с G_p. Значит, каждая собственная подгруппа из G_pM будет p-нильпотентна. Но $G_r \neq M$. Поэтому G_pM не может быть группой Шмидта. Значит, G_pM p-нильпотентна и $C_G(G_p) = G_pM \quad G_p \times G$. Значит, MG. Получается, что каждая максимальная подгруппа из $G_{p'}$ нормальна в $G_{p'}$, т. е. $G_{p'}$ нильпотентна. Итак, если G_q нормальна в $G_{p'}$, то G – группа типа 6).

Пусть теперь G_p не нормальна в $G_{p'}$. По теореме Бернсайда, $G_{p'}$ q-нильпотентна, т. е. $G_rG_{p'}$. Учитывая, что G_pG_r нильпотентна, получаем, что G_r нормальна в G, т. е. G оказывается группой типа 6).

2.2.2. Пусть теперь подгруппы G_q и G_r являются максимальными в G. Тогда одна из них нормальна в $G_{p'}$. Пусть $G_rG_{p'}$. Тогда $|G_q| = q$. В этом случае G_pG_q, G_pG_r и G_qG_r – максимальные подгруппы в G. Если одна G_pG_q, G_pG_r нильпотентна, то G – группа типа 6). Предположим, что G_pG_q и G_pG_r не нильпотентны. Поскольку каждая собственная подгруппа из G_r поэлементно перестановочна с G_p, а подгруппа G_pG_r ненильпотентна, то G_r является циклической. Но тогда $|G_r| = r$, так как G_q максимальна в сверхразрешимой подгруппе G_qG_r. Рассмотрим подгруппу G_pG_r. Так как $N_G(G_r) = G_{p'}$, то $N_{G_pG_r}(G_r) = G_r$. Если G_r максимальна в G_pG_r, то G_pG_r – группа Миллера-Морено. Пусть G_r не максимальна в G_pG_r. Так как $G_pG_pG_r$ и $G_r \in F$, то F-корадикал подгруппы G_pG_r является неединичной p-группой. Ясно, что G_r содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе M из G_pG_r, причем $M \notin F$, так как G_r самонормализуема в G_pG_r. Мы видим, что G_pG_r – группа типа 3).

Возможны два случая: G_q нормальна в $G_{p'}$ и G_q ненормальна в $G_{p'}$.

Пусть G_q не нормальна в $G_{p'}$. Если $G_q = N_G(G_q)$, то G – группа Фробениуса с нильпотентной нормальной подгруппой G_pG_r, что противоречит нашему допущению. Пусть $N_G(G_q) = P_1 \times Q$, где $P_1 \neq 1$, $P_1N_G(G_q)$. Так как G_p элементарная абелева, то существует такая p-подгруппа P, что

$G_pG_q = PN_G(G_q)$. Мы видим, что G_pG_q – группа типа 4), а сама G – группа типа 7).

Предположим теперь, что G_q нормальна в $G_{p'}$, т. е. G_qG_r нильпотентна и имеет порядок qr. Очевидно, что в этом случае G является группой Фробениуса с ядром G_p, а G_pG_r – группа типа 3), либо группа Миллера-Морено. Рассмотрим G_pG_q. Если G_q максимальна в G_pG_q, то G_pG_q – группа Миллера-Морено. Пусть G_q не максимальна в G_pG_q. Так как $(G_pG_q)^F \subseteq G_p$, то G_q содержится в некоторой F-абнормальной максимальной подгруппе H из G_pG_q, причем $H \notin F$, так как G_q самонормализуема в G_pG_q. Получается, что G_pG_q – группа типа 3). В этом случае G оказывается группой типа 8).

Примеры

Приведем примеры, показывающие, что классы групп, перечисленные в теоремах 2.1 и 2.2, не пусты.

ПРИМЕР 3.1. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная формация p-нильпотентных групп, что $\pi(F)$ не совпадает с множеством всех простых чисел. Пусть q – любое простое число, не входящее в $\pi(F)$. Тогда всякая группа порядка p_1q, где p_1 – любое простое число, является группой типа 1), а всякая группа порядка q или q^2 является группой типа 3) теоремы 2.1. Предположим, что $F \neq$ и существует такое простое число $p_1 \in \pi(F)$, что $q^2 \equiv 1(\bmod p_1)$ и $q \not\equiv 1(\bmod p_1)$ (в частности, можно взять $q = 5$ и $p_1 = 3$). В сплетении $Q \wr P_1$ группы Q порядка q с группой P_1 порядка p_1 возьмем подгруппу Шмидта G. Тогда G имеет порядок p_1q^2 и является группой типа 2) теоремы 2.1.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $\{p,q\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Будем считать, что p и q таковы, что $p^2 \equiv 1q$, но $p \not\equiv 1q$. Так же, как и в примере 3.1, строим группу Шмидта H порядка p^2q. По теореме 1.4, существует группа Шмидта G порядка p^3q. Очевидно, $|\Phi(G)| = p$. Таким образом, группы G и H – группы типа 1) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.3. Пусть $\{p,q\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Будем считать, что $q \equiv 1p$. Пусть H – неабелева группа порядка pq. Тогда $H = PQ$, где PH, $|P| = p$, $|Q| = q$. Рассмотрим группу $G = H \times Q_1$, где $|Q_1| = q$. Ясно, что $G^F = P$, $C_G(P) = P \times Q_1$. Таким образом, G – группа типа 2) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.4. Пусть $p \in \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Пусть P – циклическая группа порядка p^2, Q – такая подгруппа из $\mathrm{Aut}(P)$, что $|Q| = q$ – простое число, делящее $p-1$ и входящее в $\pi(F)$. Пусть $G = PQ$. Так как P циклическая, то из теоремы 1.5 вытекает, что $Q = C_G(Q)$ и $P = [P,Q]$. Отсюда следует, что $P = G^F$ – F-нормальная нильпотентная максимальная подгруппа, а любая подгруппа порядка pq является группой Миллера-Морено. Значит, G – группа типа 3) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.5. Пусть P_1 – нециклическая группа порядка p^2, A – неабелева неприводимая группа автоморфизмов порядка pq группы P_1, где p и q – простые числа из $\pi(F)$, F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Тогда $G = P_1P_2G_q$, где $P_2G_q = A$ – группа типа 4) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.6. Пусть P – группа порядка $p > 2$ такая, что $\mathrm{Aut}(P)$ имеет силовскую q-подгруппу Q порядка q^2. Пусть $\{q, p\} \subseteq \pi(F)$, где F – S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация. Тогда $G = PQ$ – группа типа 5) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.7. Пусть p и r – нечетные простые числа, G_p – группа простого порядка p, G_r – группа порядка r. В $\mathrm{Aut}(G_p \times G_r)$ существует элемент α порядка 2, который действует нетривиально на G_p и G_r. Циклическую группу G_2 порядка 4 превратим в группу операторов группы $G_p \times G_r$ с помощью гомоморфизма $G_2 \to \langle \alpha \rangle$ с ядром порядка 2. Пусть $G = (G_p \times G_r)G_2$. Очевидно, что G_pG_2 и G_rG_2 – группы Миллера-Морено, а $G_pG_r\Phi(G_2)$ – нильпотентная максимальная подгруппа. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{2, p, r\} \subseteq \pi(F)$. Тогда группа G – группа типа 6) теоремы 2.2.

ПРИМЕР 3.8. Пусть p, q, r – различные простые числа и порядок p по модулю r равен 3. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{p, q, r\} \subseteq \pi(F)$. Пусть $G = P_1P_2G_q$ – группа из примера 3.5. Допустим, что существует неабелева группа автоморфизмов G_rG_q порядка rq группы G_p. Тогда G_pG_r – группа Миллера-Морено. Ясно, что группа $G_pG_rG_q$ – группа типа 7) теоремы 2.2. Эта ситуация реализуется, например, в случае $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$.

ПРИМЕР 3.9. Пусть G_p – группа простого порядка p. Тогда $\mathrm{Aut}(G_p)$ имеет порядок $p-1$, и можно подобрать p так, что в ней найдется подгруппа $G_q \times G_r$ порядка qr, где q и r – различные простые числа. Рассмотрим группу $G = G_p(G_q \times G_r)$. Подгруппа G_qG_r будет максимальной самонормализуемой подгруппой, а подгруппы G_pG_q и G_pG_r – максимальными подгруппами Миллера-Морено. Пусть F – такая S-замкнутая насыщенная p-нильпотентная формация, что $\{p,q,r\}\subseteq\pi(F)$. Тогда группа G – группа типа 8) теоремы 2.2.

Литература

1. Пылаев, В. В. Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп/ В. В. Пылаев // Исследования по теории групп, Институт мат-ки АН УССР, Киев. – 1975. – С.197–217.

2. Закревская, Л. Н. Конечные группы с плотной системой F-субнормальных подгрупп / Л. Н. Закревская // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп, Наука и техника. – Минск, 1984. – С. 71–88.

3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 901 c.

4. Шеметков, Л. А. Формации алгебрачеських систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 256 с.

5. Hawkes, T. O. On formation subgroups of a finite soluble group / T. O. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1968. – № 2. – С. 243–250.

6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

7. Семенчук, В. Н. Минимальные не F-группы / В. Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – № 3.– С. 348–382.

8. Гольфанд, Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю. А. Гольфанд // Докл. АНСССР. – 1948. – № 8. – С. 1313–1315.

9. Rédei, L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen / L. Rédei // Publ. Math. Debrecen. – 1965. – № 4. – С. 303–324.

10. Huppert, B. EndlicheGruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1967. – 808 c.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кафедра математики и методики преподавания математики

Кралевич Ирина Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, проректор по научной работе
Ковальчук Инесса Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, декан физико-математического факультета
Ефремова Марина Ивановна – кандидат физико-маематических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и МПМ
Иваненко Лариса Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и МПМ
Пакштайте Виолетта Валентиновна – кандидат педагогических наук, доцент
Терещенко Ольга Игнатьевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и МПМ
Шмигирев Эдуард Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и МПМ
Повх Елена Николаевна – лаборант 1-ой категории кафедры математики и МПМ

Кафедра общей физики и методики преподавания физики

Савенко Владимир Семенович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики и МПФ
Кулак Геннадий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей физики и МПФ
Астрейко Елена Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и МПФ
Басаргин Валентин Павлович – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и МПФ
Бежанова Александра Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и МПФ
Николаенко Татьяна Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и МПФ
Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и МПФ, зам. декана по научной работе физико-математического факультета
Равуцкая Жанна Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и МПФ, зам. декана по учебной работе физико-математического факультета

Ребко Анатолий Трофимович – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и МПФ
Ивашко Татьяна Федоровна – старший преподаватель кафедры общей физики и МПФ
Шаврей Сергей Дмитриевич – ассистент кафедры общей физики и МПФ
Анисимова Анастасия Евгеньевна – аспирант
Чемрова Наталья Николаевна – лаборант кафедры общей физики и МПФ

Кафедра теоретической физики

Шепелевич Василий Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики
Дорошева Лилия Валерьевна – старший преподаватель кафедры теоретической физики
Горбач Елена Анатольевна – аспирант
Колядко Жанна Владимировна – аспирант

Кафедра математического анализа

Шкут Василий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа
Гуцко Наталия Викторовна – кандидат физико-математических наук, начальник научно-исследовательского сектора университета
Коршиков Федор Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа
Игнатович Снежана Владимировна – старший преподаватель кафедры математического анализа
Старовойтова Олеся Владимировна – ассистент кафедры математического аназа

Кафедра информатики и методики преподавания информатики

Шмигирев Андрей Эдуардович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и МПИ
Загорский Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и МПИ
Сергиевич Николай Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и МПИ
Бирук Сергей Михайлович – ассистент кафедры информатики и МПИ

Германович Виталина Александровна – ассистент кафедры информатики и МПИ
Дегтяр Светлана Николаевна – старший преподаватель кафедры информатики и МПИ
Ефимчик Ирина Анатольевна – старший преподаватель кафедры информатики и МПИ
Полоз Михаил Иванович – старший преподаватель кафедры информатики и МПИ
Аноприенко Людмила Михайловна – лаборант кафедры информатики и МПИ

Студенты

Андреенко О.И., Астрейко Н.С., Фещенко О.Н.