С.Г. КОЛЕСНЫЙ, М.И. ЕФРЕМОВА
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Системы компьютерной математики находят все более широкое применение в целом ряде как естественных, так и экономико-социальных областей. Эти системы являются достаточно важным инструментарием для ученых, преподавателей, исследователей и инженеров, хорошо сочетая символьные методы с продвинутыми вычислительными методами. Активное использование компьютерных систем для проведения трудоемких вычислений существенно сократило время реализации научных и технических проектов. Одним из лидеров среди средств этого класса, несомненно, является пакет Mathematica. Mathematica является универсальной технической компьютерной системой, обладающей возможностями компьютерной математики, имеющей свой язык программирования, инструменты публикации, разнообразные графические возможности, а также высокий уровень интеграции между всеми этими компонентами.

Матрицы являются основным математическим аппаратом линейной алгебры и применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных уравнений. Матрицы полезны в представлении многомерных данных при моделировании и изучении абстрактных и реальных систем (в математике, технике, экономике и т.п.), описание которых требует большого количества информации. Эту информацию удобно представлять при помощи матриц. Тогда анализ систем сводится к анализу свойств матриц. Особое значение в теории матриц занимают всевозможные нормальные формы, то есть канонический вид, к которому можно привести матрицу заменой координат.

Напомним, что *полиномиальной матрицей* или *λ-матрицей* над кольцом $P[\lambda]$ называется $n \times n$–матрица $A(\lambda)$, элементы которой суть многочлены от λ, т.е. матрица вида:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) f_{12}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) f_{22}(\lambda) & \dots & f_{2n}(\lambda) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) f_{n2}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad f_{ij}(\lambda) \in P[\lambda].$$

Произведем операции умножения, сложения над полиномиальными матрицами A и B, найдем обратную матрицу полиномиальной матрицы B и выполним операцию умножения полиномиальной матрицы с многочленом.

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + 2x + 1 & x^2 + x & 3x^2 + 6x + 3 \\ x^2 + x & 3x^2 + 5x + 2 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^2 + 3x + 2 & x^2 + 3x + 2 & 3x^2 + 9x + 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x - 2 & x^2 - 2 & x \\ 5x - 6 & 5x^2 - 12 & x^2 + 4x \\ x + 2 & x^2 + 4 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$C = x^2 + 4x + 8.$$

Будем использовать функции системы Mathematica Dot [A, B], и Inverse[B]. Первая функция Dot [A, B] перемножает полиномиальные матрицы A и B. Вторая функция Inverse[B] находит обратную матрицу полиномиальной матрицы B. Сложение двух полиномиальных матриц и умножение полиномиальной матрицы на многочлен выполняется соответствующей операцией «+» и «*». Все вычисления в системе Mathematica приведены на рисунках 1, 2.

```
A = {{x^2 + 2 x + 1, x^2 + x, 3 x^2 + 6 x + 3}, {x^2 + x, 3 x^2 + 5 x + 2, x^3 + x^2 + x + 1},
   {x^2 + 3 x + 2, x^2 + 3 x + 2, 3 x^2 + 9 x + 6}};

B = {{x - 2, x^2 - 2, x}, {5 x - 6, 5 x^2 - 12, x^2 + 4 x}, {x + 2, x^2 + 4, x^2}};
A // MatrixForm
B // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1+2x+x^2 & x+x^2 & 3+6x+3x^2 \\ x+x^2 & 2+5x+3x^2 & 1+x+x^2+x^3 \\ 2+3x+x^2 & 2+3x+x^2 & 6+9x+3x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+x & -2+x^2 & x \\ -6+5x & -12+5x^2 & 4x+x^2 \\ 2+x & 4+x^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

```
Dot[A, B]
```

$$\begin{aligned}
&\{\{(-6+5x)(x+x^2)+(-2+x)(1+2x+x^2)+(2+x)(3+6x+3x^2),\\
&(-2+x^2)(1+2x+x^2)+(4+x^2)(3+6x+3x^2)+(x+x^2)(-12+5x^2),\\
&x(1+2x+x^2)+(x+x^2)(4x+x^2)+x^2(3+6x+3x^2)\},\\
&\{(-2+x)(x+x^2)+(-6+5x)(2+5x+3x^2)+(2+x)(1+x+x^2+x^3),\\
&(-2+x^2)(x+x^2)+(2+5x+3x^2)(-12+5x^2)+(4+x^2)(1+x+x^2+x^3),\\
&x(x+x^2)+(4x+x^2)(2+5x+3x^2)+x^2(1+x+x^2+x^3)\},\\
&\{(-2+x)(2+3x+x^2)+(-6+5x)(2+3x+x^2)+(2+x)(6+9x+3x^2),\\
&(-2+x^2)(2+3x+x^2)+(4+x^2)(6+9x+3x^2)+(2+3x+x^2)(-12+5x^2),\\
&x(2+3x+x^2)+(2+3x+x^2)(4x+x^2)+x^2(6+9x+3x^2)\}\}
\end{aligned}$$

```
Dot[A, B] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} (-6+5x)(x+x^2)+(-2+x)(1+2x+x^2)+(2+x)(3+6x+3x^2) & (-2+x^2)(1+2x+x^2)+(4+ \\ (-2+x)(x+x^2)+(-6+5x)(2+5x+3x^2)+(2+x)(1+x+x^2+x^3) & (-2+x^2)(x+x^2)+(2+5x+ \\ (-2+x)(2+3x+x^2)+(-6+5x)(2+3x+x^2)+(2+x)(6+9x+3x^2) & (-2+x^2)(2+3x+x^2)+(4+x \end{pmatrix}$$

Рисунок 1. – Вычисления в системе Mathematica

A + B

$$\{\{-1+3x+x^2,\ -2+x+2x^2,\ 3+7x+3x^2\},\ \{-6+6x+x^2,\ -10+5x+8x^2,\ 1+5x+2x^2+x^3\},\ \{4+4x+x^2,\ 6+3x+2x^2,\ 6+9x+4x^2\}\}$$

A + B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1+3x+x^2 & -2+x+2x^2 & 3+7x+3x^2 \\ -6+6x+x^2 & -10+5x+8x^2 & 1+5x+2x^2+x^3 \\ 4+4x+x^2 & 6+3x+2x^2 & 6+9x+4x^2 \end{pmatrix}$$

Inverse[B]

$$\left\{\left\{\frac{-16x-16x^2-4x^3+4x^4}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{4x+2x^2+x^3-x^4}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{4x-2x^2-x^3+x^4}{16x+24x^2-8x^3}\right\},\ \left\{\frac{8x+12x^2-4x^3}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{-2x-3x^2+x^3}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{2x+3x^2-x^3}{16x+24x^2-8x^3}\right\},\ \left\{\frac{32x-16x^2}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{4-6x+4x^2}{16x+24x^2-8x^3},\ \frac{12-2x-4x^2}{16x+24x^2-8x^3}\right\}\right\}$$

Inverse[B] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{-16x-16x^2-4x^3+4x^4}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{4x+2x^2+x^3-x^4}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{4x-2x^2-x^3+x^4}{16x+24x^2-8x^3} \\ \frac{8x+12x^2-4x^3}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{-2x-3x^2+x^3}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{2x+3x^2-x^3}{16x+24x^2-8x^3} \\ \frac{32x-16x^2}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{4-6x+4x^2}{16x+24x^2-8x^3} & \frac{12-2x-4x^2}{16x+24x^2-8x^3} \end{pmatrix}$$

c = {x^2 + 4 x + 8} // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 8+4x+x^2 \end{pmatrix}$$

A * c // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} (1+2x+x^2)(8+4x+x^2) & (x+x^2)(8+4x+x^2) & (3+6x+3x^2)(8+4x+x^2) \\ (x+x^2)(8+4x+x^2) & (2+5x+3x^2)(8+4x+x^2) & (1+x+x^2+x^3)(8+4x+x^2) \\ (2+3x+x^2)(8+4x+x^2) & (2+3x+x^2)(8+4x+x^2) & (6+9x+3x^2)(8+4x+x^2) \end{pmatrix}$$

Рисунок 2. – Вычисления в системе Mathematica

Использование компьютерной математики во время практических занятий по алгебре активизирует деятельность студентов по усвоению учебного материала, помогает производить контроль и самоконтроль правильности решения производимых операций над полиномиальными матрицами, достигается существенная экономия времени. Вышеуказанные возможности можно также демонстрировать в ходе чтения лекций с использованием мультимедийных средств обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
2. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
3. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 4.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.И. Кравчук, А.С. Кравчук. – Минск, 2002. – 150 с.