М. В. ФЕДОРЕНКО, М. И. ЕФРЕМОВА
МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Теория линейных алгебраических групп в настоящее время занимает одно из важных мест в современной математике. Ее чрезвычайно интенсивное развитие в последние годы характеризуется глубокими связями с различными разделами математики, в частности с алгебраической геометрией, теорией чисел, функциональным анализом и топологией. Она возникла из потребностей решения линейных дифференциальных уравнений в квадратурах, и первоначальное изучение линейных алгебраических групп над полем комплексных чисел проводилось по аналогии с теорией групп Ли методом алгебр Ли. Идеи и техника линейных алгебраических групп были применены к изучению произвольных линейных групп, что привело к созданию одного из основных методов в теории линейных групп.

Данная работа посвящена построению примеров алгебр Ли и идеалов алгебр Ли.

Пусть I – двусторонний идеал в алгебре U.

Фактор-алгеброй алгебры U по идеалу I, согласно [1], будем называть фактор-пространство $U/I = \{u + I,\ u \in U\}$, умножение в котором определяется по правилу $(u_1 + I)(u_2 + I) = u_1 u_2 + I$.

Следуя [2], отображение $\varphi: U \to U'$ алгебры U в алгебру U' называется гомоморфизмом, если

1) $\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2),\ \ u_1, u_2 \in U, \alpha_1 \alpha_2 \in K$;
2) $\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2),\ \ u_1, u_2 \in U$.

Если отображение φ биективно, то оно называется изоморфизмом. Условие изоморфности алгебр U и U' обозначается $U \cong U'$.

Алгебра L над полем K с билинейной операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \to [x, y]$ и называемой коммутатором элементов x и y, называется алгеброй Ли [3], если выполняются следующие аксиомы:

1. $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;
2. $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0\ \ (x, y, z \in L)$.

Последняя аксиома называется [3] тождеством Якоби.

Заметим, что из аксиомы 1, примененной к элементу $[x + y, x + y]$, следует соотношение антикоммутативности:

$1'$). $[x, y] = -[y, x]$.

Если характеристика поля K отлична от 2, то из $1'$ следует 1.

Приведем примеры алгебр Ли:

1. Пусть V – конечномерное векторное пространство над K. Тогда $End\,V$ будет обозначать множество линейных преобразований $V \to V$. Оно имеет размерность n^2 как векторное пространство над K, где $n = dim_K V$. Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx,\ x, y \in End\,V$. С этой операцией $End\,V$ становится алгеброй Ли над K: аксиома 1 очевидна, проверим тождество Якоби. Имеем:

$$[[x, y], z] = [x, y]z - z[x, y] = xyz - yxz - zxy + zyx =$$
$$= (xyz - zxy) + (zyx - yxz).$$

Ясно, что, $(xyz - zxy) + cycl = 0,\ (zyx - yxz) + cycl = 0$, то есть $[[x, y], z] + cycl = 0$. Эта алгебра Ли называется [3] полной линейной алгеброй и обозначается $gl(V)$.

2. Пространство $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения есть алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

3. Произвольное векторное пространство с тождественно нулевой операцией коммутатора.

4. Трехмерное векторное пространство является алгеброй Ли относительно операции векторного произведения.

Пусть U – K-алгебра с билинейной операцией $U \times U \to U$, то есть $(x, y) \to xy$. Дифференцированием в алгебре U будем называть [3] линейное отображение $D: U \to U$ со свойством

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy).$$

Совокупность всех дифференцирований $DerU$ алгебры U является векторным пространством над K. Кроме того, коммутатор $[D_1, D_2]$ двух дифференцирований снова является дифференцированием. Действительно,

$$D_1D_2(xy) = (D_1D_2x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_1D_2y),$$
$$D_2D_1(xy) = (D_2D_1x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_2D_1y).$$

Поэтому

$$[D_1, D_2](xy) = ([D_1, D_2]x)y + x([D_1, D_2]y).$$

Таким образом, $DerU$ – подалгебра в $gl(U)$. В частности, для любой алгебры Ли L определена алгебра $DerU$. Некоторые элементы последней возникают вполне естественным образом. Если $x \in L$, то отображение $ad\,x: y \to [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L. В действительности $ad\,x \in DerL$, поскольку тождество Якоби можно переписать в виде $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y[x, z]]$.

Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом, согласно [3], если $[x, a] \in I$ для любого $x \in I$ и любого $a \in L$. В отличие от общего случая, в алгебре Ли в силу ее антикоммутативности все идеалы двусторонние.

Примерами идеалов алгебры Ли L являются

1) ее центр $Z(L) = \{x \in L,\ [x, a] = 0,\ a \in L\}$,

2) ее коммутант $[L, L] = \{\sum_{k \in S}[x_k y_k],\ x_k y_k \in L, S$ – любое конечное множество$\}$.

Заметим, что, как и в общем случае, сумма и пересечение двух идеалов являются идеалами. Более того, для алгебры Ли и произведение $[I,J]=\{\sum_{k\in S}[x_k,y_k],\ \ x_k\in I,\ y_k\in J\}$ двух идеалов I и J является идеалом. Коммутант $[L,L]$ – частный случай этой конструкции.

Если в алгебре Ли L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L,L]\neq 0$, то L называется [3] простой алгеброй. Ясно, что если L – простая алгебра, то $Z(L)=0$ и $L=[L,L]$.

Пусть $L=sl(2,k)=\{x\in gl(2,k),\ trx=0\}$, $char k\neq 2$.
Выберем стандартный базис в L в виде трех матриц
$e=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \ f=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \ h=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$
Умножение в алгебре полностью определяется равенствами
$[e,f]=h,\ \ [h,e]=2e,\ \ [h,f]=-2f.$
Пусть I – ненулевой идеал в L и $ae+bf+ch$ – ненулевой элемент в I. Дважды применяя к этому элементу оператор $ad\,f$, получаем $-2af\in I$. Поэтому, если a или b отлично от нуля, то I содержит e или f и, значит, $I=L$. С другой стороны, если $a=b=0$, то $0\neq ch\in I$, то есть $h\in I$, что снова влечет $I=L$. Заключаем, что L – простая алгебра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 355 с.
2. Корешков, Н.А. Алгебры Ли и ассоциативные алгебры: учебное пособие / Н.А. Корешков, С.М. Скрябин. – Казань: Казанский государственный университет, 2007. – 24 с.
3. Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфрис. – М.: МЦМНО, 2003. – 216 с.