В. А. Германович

МЕТОД ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ «ЦЕНТРА-ФОКУСА»

В работе предлагается и обосновывается новый метод решения проблемы «центра-фокуса», основанный на понятии отражающей функции [1]. Этот метод сводится к вычислению бесконечной последовательности чисел $m_i(i=\overline{1,\infty})$. Система имеет центр, если все эти числа равны нулю. Сама же последовательность (m_i), вообще говоря, не совпадает с Ляпуновской последовательностью $g_i(i=\overline{1,\infty})$. Благодаря этому мы имеем возможность комбинировать эти два метода. Кроме того иногда конечное число m_i даёт нам возможность построить отражающую функцию и тем самым полностью решить проблему «центра-фокуса».

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha y + P(x,y),\ \ \dot{y} = \alpha x + Q(x,y), \tag{1}$$

где P, Q – ряды вида

$$P(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x,y),\ Q(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(x,y), \tag{2}$$

(p_k, q_k – однородные многочлены степени k).

Точка $O(0,0)$ является состоянием равновесия данной системы. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$ чисто мнимые $\lambda = \pm\alpha\, i$. В этом случае состояние равновесия $O(0,0)$ может быть либо центром, либо фокусом.

Для решения проблемы «центра-фокуса» обычно применяют метод Ляпунова [2], который состоит в следующем. В системе (1) переходят к полярным координатам ρ, φ. Далее составляют дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\rho,\varphi), \tag{3}$$

решение которого $\rho(\varphi)$ может быть представлено в виде ряда

$$\rho(\varphi) = c + c^2 h_1(\varphi) + c^3 h_2(\varphi) + c^4 h_3(\varphi) + \ldots \tag{4}$$

где $h_1(0) = h_2(0) = \ldots = 0.$

Подставив (4) в (3), сравнивают члены при одинаковых степенях c и выписывают последовательность дифференциальных уравнений:

$h_1'(\varphi) = \sigma_1(\varphi, h_1)$

$h_2'(\varphi) = \sigma_2(\varphi, h_1, h_1', h_2)$

$h_3'(\varphi) = \sigma_3(\varphi, h_1, h_1', h_2, h_2', h_3)$

$h_4'(\varphi) = \sigma_4(\varphi, h_1, h_1', h_2, h_2', h_3, h_3', h_4)$

……………………………………….

Интегрируя правые части по φ на отрезке $[0, 2\pi]$ и приравнивая нулю полученные выражения, находят необходимые условия центра заданной системы (1)

$$g_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_i d\varphi = 0. \qquad (5)$$

Для полиномиальных систем количество таких условий конечно и, начиная с некоторого $i = k$, все последующие условия $g_k = g_{k+1} = g_{k+2} = ... = 0$ будут выполняться автоматически при тех же допущениях, при которых $g_1 = g_2 = ... = g_{k-1} = 0$. К сожалению, неизвестно, как велико должно быть k.

Мы докажем, что необходимые условия действительно являются достаточными, если докажем, что все последующие g будут равны нулю. Обычно доказательство достаточности полученных условий проводится с помощью отыскания некоторого рода симметрий в системе (1). Поэтому естественно использовать для решения проблемы центра-фокуса отражающую функцию Мироненко В.И.

Идея ее использования для решения проблемы «центра-фокуса» неоднократно высказывалась самим Мироненко В.И. (см. [3]).

Приведём необходимые для дальнейшего изложения сведения об отражающей функции уравнения (3). Пусть решения этого уравнения есть $\rho = S(\varphi; \varphi_0, \rho_0)$. Тогда ОФ $F(\varphi, \rho)$ определяется формулой $F(\varphi, \rho) = S(-\varphi; \varphi, \rho)$. Дифференцируемая функция $F(\varphi, \rho)$ является ОФ уравнения (3) тогда и только тогда, когда для неё выполнено основное соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \rho}R(\varphi, \rho) + R(-\varphi, F) = 0, \; F(0, \rho) \equiv \rho. \qquad (6)$$

Все продолжимые на $[-\pi; \pi]$ решения 2π-периодического по φ уравнения (3) являются 2π-периодическими, тогда и только тогда, когда $F(\pi, \rho) \equiv \rho$ (см.[1, 62–69]).

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) имела центр в т. (0,0), необходимо и достаточно, чтобы ОФ уравнения (3) имела вид*

$$F = \rho + l_2[\varphi]\rho^2 + l_3[\varphi]\rho^3 + ..., \qquad (7)$$

где $l_2[\varphi], l_3[\varphi], ...$ *суть* 2π*-периодические функции.*

Доказательство.

В нашем случае ОФ удовлетворяет соотношениям (6). Уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\rho, \varphi) = R_1(\varphi)\rho^2 + R_2(\varphi)\rho^3 + R_3(\varphi)\rho^4 + R_4(\varphi)\rho^5 + ... \qquad \text{(см. [2,6]).}$$

Для уравнения (3) с аналитической правой частью отражающая функция, как следует из её определения, аналитична по ρ и по φ

и, значит, представима в виде ряда по степеням ρ:

$$F(\rho,\varphi) = l_0(\varphi) + l_1(\varphi)\rho + l_2(\varphi)\rho^2 + l_3(\varphi)\rho^3 + \dots \qquad (8)$$

Поэтому справедливо тождество

$$\begin{aligned}&\left(l_0'+l_1'\rho + l_2'\rho^2 + \dots\right) + \left(l_1 + 2l_2\rho + 3l_3\rho^3 + \dots\right)\left(R_1\rho^2 + R_2\rho^3 + \dots\right) + \\ &+\left[\left(l_0 + l_1\rho + \dots\right)^2\overline{R_1} + \left(l_0 + l_1\rho + \dots\right)^3\overline{R_2} + \left(l_0 + l_1\rho + \dots\right)^4\overline{R_3} + \dots\right] = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

Откуда коэффициент при нулевой степени ρ: $l_0'+l_0{}^2\overline{R_1} + l_0{}^3\overline{R_2} + l_0{}^4\overline{R_3} + \dots = 0$ или $l_0' = -R(-\varphi, l_0)$. Тогда, учитывая, что $l_0(0) = 0$, получаем $l_0(\varphi) \equiv 0$ и, значит, (8) принимает вид $F(\rho,\varphi) = l_1(\varphi)\rho + l_2(\varphi)\rho^2 + l_3(\varphi)\rho^3 + \dots$

После этого (9) запишется в виде

$$\begin{aligned}&\left(l_1'\rho + l_2'\rho^2 + \dots\right) + \left(l_1 + 2l_2\rho + 3l_3\rho^3 + \dots\right)\left(R_1\rho^2 + R_2\rho^3 + \dots\right) + \\ &+\left[\left(l_1\rho + \dots\right)^2\overline{R_1} + \left(l_1\rho + \dots\right)^3\overline{R_2} + \left(l_1\rho + \dots\right)^4\overline{R_3} + \dots\right] = 0\end{aligned}$$

Для коэффициента при первой степени ρ имеем $l_1' = 0$, причем $l_1(0) = 1$. Поэтому $l_1(\varphi) \equiv 1$. Видим, что ОФ уравнения (3) действительно имеет вид (7). Т. к. для системы с центром уравнение (3) имеет только 2π-периодические решения, то согласно определению ОФ она и, значит, её коэффициенты должны быть 2π-периодическими функциями. **Теорема доказана.**

Из этой теоремы следует, что для решения проблемы «центра-фокуса» с использованием ОФ Мироненко В.И. необходимо выполнить следующее. В системе (1) перейти к полярным координатам и составить уравнение (3). Правую часть $R(\rho,\varphi)$ уравнения (3) разложить в ряд по степеням ρ. Отражающую функцию $F(\rho,\varphi)$ уравнения (3) искать в виде ряда (7) как решение уравнения (6) с начальным угловым коэффициентом.

Отражающая функция (7) характеризуется свойствами (6).

Необходимо подставить (7) в (6) и выписать члены при одинаковых степенях ρ. Получим, что коэффициенты ряда (7) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$l_2'(\varphi) = \sigma_2(\varphi, l_2),\ l_2(0) = 0,$

$l_3'(\varphi) = \sigma_3(\varphi, l_2, l_2', l_3),\ l_3(0) = 0,$

$l_4'(\varphi) = \sigma_4(\varphi, l_2, l_2', l_3, l_3', l_4),\ l_4(0) = 0,$

……………………………………………..

Из доказанной выше теоремы, следует, что для того, чтобы система (1) имела центр в точке $O(0,0)$, необходимо и достаточно, чтобы все функции $l_i(\varphi)$ были 2π-периодическими по φ. Каждая из функций $l_i(\varphi)$ является 2π-периодической, если и только если числа

$$m_i = \int_0^{2\pi} \sigma_i d\varphi = 0.$$

Т. о. для решения проблемы необходимо найти бесконечную последовательность m_i, приравнять их нулю, полученные равенства будут необходимыми и достаточными условиями центра данной системы. По теореме Гильберта о базисе, чтобы доказать, что указанные условия являются необходимыми и достаточными, нужно указать такой номер $i=k$, что все $m_k, m_{k+1}, m_{k+2}...$ будут автоматически равняться нулю, если равны нулю все $m_i,\ i=\overline{1,\ k-1}$.

В этой работе показано, что последовательности чисел g_i и m_i, вообще говоря, не совпадают между собой. В связи с этим мы вправе надеяться на то, что эффективность рассматриваемых методов для разных систем различна, т. е. для некоторых систем эффективен первый метод, для некоторых – второй.

Так как отражающая функция описывает симметрии решений уравнения (3) по φ, то мы вправе надеяться (это подтверждают соответствующие примеры), что наличие, может быть скрытых, симметрий уравнения (3) приведет решение проблемы «центра-фокуса» для таких систем вторым методом быстрее, чем первым.

В подтверждение этих слов приведем систему, сводящуюся к уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{\rho\cos\varphi+\cos 2\varphi-\rho^2(\sin\varphi-2)}{1+\rho^2\sin\varphi}+\frac{\rho\,(1+\lambda_1\rho)\cos\varphi+\cos 2\varphi-\rho^2(\lambda_2\sin\varphi+\lambda_0)}{-1+\rho^2\sin\varphi} \qquad (10)$$

Задача 1. Требуется выяснить, при каких значениях $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ система, записанная в полярных координатах уравнением (10), будет иметь центр, и доказать, наличие центра при полученных условиях.

Методом ОФ.

Вычислим коэффициенты ряда (7) описанным выше способом и составим необходимые условия центра.

$$l_2=2(-2\varphi+\lambda_0\varphi+\lambda_1\sin\varphi)$$

$$m_2=\int_0^{2\pi}(4-2\lambda_0-2\lambda_1\cos\varphi)d\varphi=-4\pi(\lambda_0-2)=0$$

Из первого условия $\lambda_0=2$.

$$l_3=-2\left(-\lambda_1^2+\lambda_1^2\cos 2\varphi\right)$$

$$m_3=\int_0^{2\pi}\left(-8\lambda_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=0$$

$$l_4=\varphi-\lambda_2\varphi+\lambda_1\sin\varphi-6\lambda_1^3\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\lambda_2\sin 2\varphi-\frac{1}{3}\lambda_1\sin 3\varphi+2\lambda_1^3\sin 3\varphi$$

$$m_4=\int_0^{2\pi}\Big(2\lambda_1^2(\cos 2\varphi-1)(5\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi)+$$
$$+2\sin^2\varphi\left(1-\lambda_2-2\lambda_1\left(\lambda_1^2-1\right)\cos\varphi+2\lambda_1^2\lambda_2\sin\varphi+2\lambda_1^2\sin 3\varphi\right)\Big)d\varphi=-2\pi(\lambda_2-1)=0$$

Отсюда следует $\lambda_2=1$.

$$l_5=\frac{1}{9}\Big(-63\lambda_1^{\ 2}+126\lambda_1^{\ 4}-78\lambda_1\varphi+\left(72\lambda_1^{\ 2}-144\lambda_1^{\ 4}\right)\cos^2\varphi+\left(18\lambda_1^{\ 4}-9\lambda_1^{\ 2}\right)\cos 4\varphi-$$
$$-9\lambda_1^{\ 2}\sin\varphi+4\lambda_1\cos 3\varphi\sin^3\varphi+39\lambda_1\sin 2\varphi+3\lambda_1^{\ 2}\sin 3\varphi\Big)$$

$$m_5=-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(\lambda_1\sin^2\varphi\left(-13-3\lambda_1\cos\varphi+\cos 4\varphi-12\lambda_1\sin 2\varphi+24\lambda_1^{\ 3}\sin 2\varphi\right)\right)d\varphi=$$
$$=\frac{52}{3}\pi\lambda_1=0$$

Находим, что $\lambda_1=0$.

Оказывается, что при найденных значениях $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ коэффициенты ОФ l_2,l_3,l_4,l_5 обращаются в нуль. Более того, видим, что вычисление каждого последующего m_i сводится к вычислению интеграла $\int_0^{2\pi}0\,d\varphi$. Не трудно убедиться, что именно $F(\rho,\varphi)=\rho$ является ОФ уравнения (10). Следовательно, при $\lambda_0=2,\lambda_1=0,\lambda_2=1$, система, записанная в полярных координатах в виде (10) имеет центр в точке (0, 0).

Методом Ляпунова.

Будем искать решение уравнения (10) в виде $\rho=c+c^2h_1(\varphi)+c^3h_2(\varphi)+...$ Вычислим коэффициенты ряда и найдем необходимые условия центра.

$$h_1=\frac{1}{3}\left(1+3\lambda_2+6\varphi-3\lambda_0\varphi-3\lambda_2\cos\varphi-\cos 3\varphi-3\lambda_1\sin\varphi\right)$$

$$g_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-2+\lambda_0+\lambda_1\cos\varphi-\sin\varphi-\lambda_2\sin\varphi-2\cos 2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=\lambda_0-2=0$$

Отсюда $\lambda_0=2$.

$$h_2=\frac{1}{18}\Big(12+9\lambda_1^{\ 2}+12\lambda_2+27\lambda_2^{\ 2}-(12\lambda_2+36\lambda_2^{\ 2})\cos\varphi-$$
$$-(9+9\lambda_1^{\ 2}-6\lambda_2-9\lambda_2^{\ 2})\cos 2\varphi-(4+12\lambda_2)\cos 3\varphi+6\lambda_2\cos 4\varphi+\cos 6\varphi-$$
$$-12\lambda_1(1+3\lambda_2)\sin\varphi-6\lambda_1(1-3\lambda_2)\sin 2\varphi+6\lambda_1\sin 4\varphi)$$

$$g_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\left(-1-3\lambda_2+3\lambda_2\cos\varphi+\cos 3\varphi+3\lambda_1\sin\varphi\right)\left(-\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi\right)\right)d\varphi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=0$$

$$h_3=\frac{1}{540}\Big(2552+135\lambda_1+270\lambda_1^{\ 2}+720\lambda_2+810\lambda_1^{\ 2}\lambda_2+810\lambda_2^{\ 2}+1350\lambda_2^{\ 3}+270\varphi-270\lambda_2\varphi+$$
$$+(-2160+135\lambda_1^{\ 2}-270\lambda_2-405\lambda_1^{\ 2}\lambda_2-1215\lambda_2^{\ 2}-2025\lambda_2^{\ 3})\cos\varphi-(270+135\lambda_1+270\lambda_1^{\ 2}+630\lambda_2+$$
$$+810\lambda_1^{\ 2}\lambda_2-810\lambda_2^{\ 2}-810\lambda_2^{\ 3})\cos 2\varphi-(255+270\lambda_1^{\ 2}-405\lambda_1^{\ 2}\lambda_2+810\lambda_2^{\ 2}+135\lambda_2^{\ 3})\cos 3\varphi+$$
$$+(180\lambda_2+540\lambda_2^{\ 2})\cos 4\varphi+(108+135\lambda_1^{\ 2}-45\lambda_2-135\lambda_2^{\ 2})\cos 5\varphi+(30+90\lambda_2)\cos 6\varphi-45\lambda_2\cos 7\varphi-$$
$$-5\cos 9\varphi-(1350\lambda_1+405\lambda_1^{\ 3}+810\lambda_1\lambda_2+2025\lambda_1\lambda_2^{\ 2})\sin\varphi-(135+180\lambda_1-135\lambda_2-1620\lambda_1\lambda_2^{\ 2})\sin 2\varphi+$$
$$+(360\lambda_1+135\lambda_1^{\ 3}-405\lambda_1\lambda_2^{\ 2})\sin 3\varphi+(180\lambda_1+540\lambda_1\lambda_2)\sin 4\varphi+(45\lambda_1-270\lambda_1\lambda_2)\sin 5\varphi-45\lambda_1\sin 7\varphi)$$

$$g_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\lambda_1\cos\varphi\sin\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi\big(-1-3\lambda_2+3\lambda_2\cos\varphi+\cos 3\varphi+3\lambda_1\sin\varphi\big)^2 - 4\sin\varphi -$$

$$-\sin^2\varphi - \frac{1}{9}\big(-\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi\big)\big(-1-3\lambda_2+3\lambda_2\cos\varphi+\cos 3\varphi+3\lambda_1\sin\varphi\big)^2 + \frac{4}{9}\sin^2\frac{\varphi}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{4}{9}\sin^2\frac{\varphi}{2}(-12-9\lambda_1{}^2-6\lambda_2-9\lambda_2{}^2-3(4+3\lambda_1{}^2-3\lambda_2{}^2)\cos\varphi+(3+6\lambda_2)\cos 3\varphi+2\cos 4\varphi+\cos 5\varphi+\right.$$

$$+12\lambda_1\sin\varphi+18\lambda_1\lambda_2\sin\varphi+12\lambda_1\sin 2\varphi+6\lambda_1\sin 3\varphi\big)(-\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi+\sin 3\varphi))\Big)d\varphi = \lambda_2 - 1 = 0$$

Получили $\lambda_2 = 1$.

$$h_4 = \frac{1}{12960}\big(475111 + 10368\,\lambda_1 + 98010\,\lambda_1{}^2 + 4860\,\lambda_1{}^4 - 47520\,\lambda_1\varphi +$$

$$+(-569856\,\cos\varphi + 2160\,\lambda_1 - 34560\,\lambda_1{}^2)\cos\varphi +$$

$$+(130176\; - 17280\,\lambda_1 - 96120\,\lambda_1{}^2 - 6480\,\lambda_1{}^4)\cos 2\varphi +$$

$$+(-101632\; + 3240\,\lambda_1 + 17280\,\lambda_1{}^2)\cos 3\varphi + (72558\; + 3510\,\lambda_1{}^2 + 1620\,\lambda_1{}^4)\cos 4\varphi -$$

$$+(-9216\; + 1512\,\lambda_1 + 17280\,\lambda_1{}^2)\cos 5\varphi + (8408\; - 4320\,\lambda_1{}^2)\cos 6\varphi - 5760\cos 7\varphi +$$

$$+(591 - 1080\,\lambda_1{}^2)\cos 8\varphi - 640\cos 9\varphi + 240\cos 10\varphi + 20\cos 12\varphi -$$

$$-(379776\,\lambda_1 + 16200\,\lambda_1{}^2 + 51840\,\lambda_1{}^3)\sin\varphi + (381600\,\lambda_1 + 12960\,\lambda_1{}^3)\sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+(-5760\,\lambda_1 + 5400\,\lambda_1{}^2 + 17280\,\lambda_1{}^3)\sin 3\varphi + 54792\,\lambda_1\sin 4\varphi - 28800\,\lambda_1\sin 5\varphi +$$

$$+(1728\,\lambda_1 - 2160\,\lambda_1{}^3)\sin 6\varphi - 5760\,\lambda_1\sin 7\varphi + 1920\,\lambda_1\sin 8\varphi + 240\,\lambda_1\sin 10\varphi\;\big)$$

$$g_4 = \frac{1}{1080\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}(-8648\lambda_1 - 675\lambda_1{}^2 - 1080\lambda_1{}^3 - 2\lambda_1(7658+675\lambda_1+1080\lambda_1{}^2)\cos\varphi -$$

$$-\lambda_1(675\lambda_1 - 2488)\cos 2\varphi + (4392\lambda_1 + 1620\lambda_1{}^3)\cos 3\varphi + (7016\lambda_1 + 1080\lambda_1{}^3)\cos 4\varphi +$$

$$+(508 + 540\lambda_1{}^3)\cos 5\varphi - 940\lambda_1\cos 7\varphi - 200\lambda_1\cos 8\varphi - 100\lambda_1\cos 9\varphi + (14938 + 630\lambda_1 +$$

$$+4545\lambda_1{}^2 + +270\lambda_1{}^4)\sin\varphi + (6132 + 1350\lambda_1)\sin 2\varphi + (8174 + 630\lambda_1 + 2745\lambda_1{}^2 + 270\lambda_1{}^4)\sin 3\varphi -$$

$$-(2488 - 315\lambda_1)\sin 4\varphi - (1057 + 2160\lambda_1{}^2)\sin 5\varphi - (1546 + 720\lambda_1)\sin 6\varphi + (67 - 360\lambda_1{}^2)\sin 7\varphi +$$

$$+130\sin 9\varphi + 20\sin 10\varphi + 10\sin 11\varphi\Big)d\varphi = \frac{11}{3}\lambda_1 = 0$$

Следовательно $\lambda_1 = 0$.

Необходимые условия центра $\lambda_0 = 2, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ для заданной системы получены также после вычисления четырех коэффициентов ряда, однако проводимые вычисления более громоздкие. А так как вычислительные машины ограничены в скорости производимых вычислений в единицу времени, то, сократив число операций на каждом шаге в два и более раз, мы увеличим возможное количество шагов метода.

Задача 2. Требуется выяснить, при каких значениях λ система (11) будет иметь центр, и доказать наличие центра при полученных условиях.

$$\begin{cases} \overset{*}{x} = 2y + x^2 + 6xy - x^2y - 2y^2 - 6xy^2 + 2xy^3 + \lambda y^4, \\ \overset{*}{y} = -2x + 3xy + 6y^2 - xy^2 - 6y^3 + 2y^4. \end{cases} \qquad (11)$$

Методом ОФ.

Вычислим коэффициенты ряда (7) описанным выше способом и составим необходимые условия центра.

$$l_2 = \sin\varphi$$

$$m_2 = -\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$$

$$l_3 = \sin^2\varphi$$

$$m_3 = -2\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = 0$$

$$l_4 = -\frac{1}{10}(-10 - \lambda + \lambda\cos 2\varphi)\sin^3\varphi$$

$$m_4 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-6 - \lambda + \lambda\cos 2\varphi)\cos\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi = 0$$

$$l_5 = \frac{1}{320}(120 - 160\cos 2\varphi + 40\cos 4\varphi) +$$

$$+\frac{\lambda}{320}(60 - 180\varphi - 90\cos 2\varphi + 36\cos 4\varphi - 6\cos 6\varphi + 135\sin 2\varphi - 27\sin 4\varphi + 3\sin 6\varphi)$$

$$m_5 = -\frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left(-9\lambda\sin\varphi + 9\lambda\cos^2\varphi\sin\varphi + 20\cos\varphi + 18\lambda\sin^2\varphi\cos\varphi\right)\sin^3\varphi \, d\varphi = \frac{9\pi\lambda}{8} = 0.$$

На четвертом шаге метода получено условие $\lambda = 0$.

При $\lambda = 0$ получим $l_4 = \sin^3\varphi$, $l_5 = \sin^4\varphi$, $l_6 = \sin^5\varphi$, $l_7 = \sin^6\varphi$ и т. д. Разложение отражающей функции в ряд по степеням ρ имеет вид:

$$F(\rho,\varphi) = \rho + \rho^2\sin\varphi + \rho^3\sin^2\varphi + \rho^4\sin^3\varphi + \rho^5\sin^4\varphi + \rho^6\sin^5\varphi + \ldots = \frac{\rho}{1-\rho\sin\varphi} \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться, что функция (12) является отражающей функцией системы (11). Согласно Теореме 1 система (11) имеет в т. O(0,0) центр.

Методом Ляпунова.

Будем искать решение системы (11) в виде $\rho = c + c^2 h_1(\varphi) + c^3 h_2(\varphi) + \ldots$ Вычислим коэффициенты ряда и найдем необходимые условия центра.

$$h_1 = \frac{1}{2}(-6 + 6\cos\varphi - \sin\varphi)$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{2} + 3\sin\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$h_2 = \frac{1}{8}(109 - 144\cos\varphi + 35\cos 2\varphi + 24\sin\varphi - 12\sin 2\varphi)$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(-6 + 6\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos\varphi + 6\sin\varphi)d\varphi = 0$$

$$h_3 = \frac{1}{480}\big(-33260 + 49230\cos\varphi - 18900\cos 2\varphi + 2930\cos 3\varphi - (8145 + 30\lambda)\sin\varphi +$$
$$+ 6480\sin 2\varphi + (15\lambda - 1605\sin 3\varphi) - 3\lambda\sin 5\varphi\big)$$

$$g_3 = \frac{1}{64\pi}\int_0^{2\pi}\big((543 + 2\lambda)\cos\varphi - 864\cos 2\varphi + (321 - 3\lambda)\cos 3\varphi + \lambda\cos 5\varphi +$$
$$+ 3282\sin\varphi + 2520\sin 2\varphi + 586\sin 3\varphi\big)d\varphi = 0$$

$$h_4 = \frac{1}{3840}\big(1430490 + 170\lambda + 1080\lambda\varphi - 2253120\cos\varphi +$$
$$+ (1073160 - 255\lambda)\cos 2\varphi - 281280\cos 3\varphi + (30750 + 102\lambda)\cos 4\varphi +$$
$$+ 17\lambda\cos 6\varphi + (369760 + 2880\lambda)\sin\varphi - (365920 + 1530\lambda)\sin 2\varphi +$$
$$+ (154080 - 1440\lambda)\sin 3\varphi + (738\lambda - 25040)\sin 4\varphi +$$
$$+ 288\lambda\sin 5\varphi - 162\sin 6\varphi\big)$$

$$g_4 = \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sin^4\varphi\big(8 - 6\lambda + 6\lambda\cos 2\varphi + \lambda\sin 2\varphi\big) + 4\big(-6 + 6\cos\varphi - \sin\varphi\big)\times$$
$$\times\Big(1/4\big(6 - 6\cos\varphi + \sin\varphi\big)^2\big(\cos\varphi + 6\sin\varphi\big) + \sin^3\varphi\big(4 + \lambda\sin 2\varphi\big)\Big) +$$
$$+ 1/60\big(\cos\varphi + 6\sin\varphi\big)\big(-33260 + 49230\cos\varphi + 18900\cos 2\varphi + 2930\cos 3\varphi -$$
$$-(8145 + 30\lambda)\sin\varphi + 6480\sin 2\varphi + (15\lambda - 1605)\sin 3\varphi - 3\lambda\sin 5\varphi\big)d\varphi = -\frac{9\lambda}{32} = 0$$

Необходимое условие центра $\lambda = 0$ найдено на четвертом шаге метода Ляпунова.

Аналогично, как и с использованием отражающей функции, достаточно четырех шагов метода для нахождения необходимого условия центра системы (11). Однако достаточность этого условия не является очевидной.

Доказанная нами теорема дает новый подход к решению проблемы различения центра и фокуса.

Поставим перед собой задачу выяснить, при каких условиях функция (7) является отражающей функцией уравнения (3).

Решение этой задачи сводится к следующему: необходимо проверить выполнимость основного соотношения (6) для отражающей функции (7) и уравнения (3). Полученные условия того, что заданная функция (7) является отражающей функцией уравнения (3), являются достаточными условиями центра системы (1).

Рассмотрим, например, функцию

$$F(\varphi,\rho) = \frac{\rho}{1 + s(\varphi)\rho} = \rho + s(\varphi)\rho^2 + s(\varphi)^2\rho^3 + s(\varphi)^3\rho^4 +, \text{ где } s(0) = 0$$

и выясним, при каких условиях она может быть отражающей функцией для уравнения (3). Уравнение (3) построим при переходе к полярным координатам в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3 + \\ \quad + a_8x^4 + a_9x^3y + a_{10}x^2y^2 + a_{11}xy^3 + a_{12}y^4, \\ \dot{y} = -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x^3 + b_5x^2y + b_6xy^2 + b_7y^3 + \\ \quad + b_8x^4 + b_9x^3y + b_{10}x^2y^2 + b_{11}xy^3 + b_{12}y^4. \end{cases} \tag{13}$$

Перейдем к полярным координатам в системе (13), получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\varphi,\rho) = \frac{f_2(\varphi)\rho^2 + f_3(\varphi)\rho^3 + f_4(\varphi)\rho^4}{-1 + g_1(\varphi)\rho + g_2(\varphi)\rho^2 + g_3(\varphi)\rho^3} \tag{14}$$

где

$$f_2(\varphi) = a_1\cos^3\varphi + (a_2+b_1)\cos^2\varphi\sin\varphi + (a_3+b_2)\cos\varphi\sin^2\varphi + b_3\sin^3\varphi,$$

$$f_3(\varphi) = a_4\cos^4\varphi + (a_5+b_4)\cos^3\varphi\sin\varphi + (a_6+b_5)\cos^2\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ (a_7+b_6)\cos\varphi\sin^3\varphi + b_7\sin^4\varphi,$$

$$f_4(\varphi) = a_8\cos^5\varphi + (a_9+b_8)\cos^4\varphi\sin\varphi + (a_{10}+b_9)\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ (a_{11}+b_{10})\cos^2\varphi\sin^3\varphi + (a_{12}+b_{11})\cos\varphi\sin^4\varphi + b_{12}\sin^5\varphi,$$

$$g_1(\varphi) = b_1\cos^3\varphi + (-a_1+b_2)\cos^2\varphi\sin\varphi + (-a_2+b_3)\cos\varphi\sin^2\varphi - a_3\sin^3\varphi,$$

$$g_2(\varphi) = b_4\cos^4\varphi + (-a_4+b_5)\cos^3\varphi\sin\varphi + (-a_5+b_6)\cos^2\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ (-a_6+b_7)\cos\varphi\ \sin^3\varphi - a_7\sin^4\varphi,$$

$$f_4(\varphi) = b_8\cos^5\varphi + (-a_8+b_9)\cos^4\varphi\sin\varphi + (-a_9+b_{10})\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ (-a_{10}+b_{11})\cos^2\varphi\sin^3\varphi + (-a_{12}+b_{21})\cos\varphi\sin^4\varphi - a_{12}\sin^5\varphi.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы уравнение (12) имело дробно-линейную 2π-периодическую отражающую функцию, необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$-f_3(-\varphi) - f_3(\varphi) - f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi) - f_2(\varphi)\,g_1(\varphi) = 0$$

$$-f_4(-\varphi) - f_4(\varphi) + f_3(\varphi)\,g_1(-\varphi) + f_3(-\varphi)\,g_1(\varphi) + f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi)\,g_1(\varphi) +$$
$$+ f_2(\varphi)\,g_1(-\varphi)\,g_1(\varphi) - f_2(-\varphi)\,g_2(-\varphi) - f_2(\varphi)\,g_2(\varphi) - 2f_3(-\varphi)\,s(\varphi) -$$
$$-3f_3(\varphi)\,s(\varphi) - 2f_2(-\varphi)\,g_1(-\varphi)\,s(\varphi) - 3f_2(\varphi)\,g_1(\varphi)\,s(\varphi) = 0$$

$$-(f_2(-\varphi) + f_2(\varphi)\,g_3(\varphi) + (f_4(\varphi) + (f_2(-\varphi) + f_2(\varphi))\,g_2(\varphi))\,(g_1(-\varphi) - 3\,s(\varphi))) +$$
$$+ (f_3(-\varphi) + 2f_2(-\varphi)\,s(\varphi))\,(g_2(\varphi) + g_1(\varphi)\,s(\varphi)) + f_2(-\varphi)\,(g_3(\varphi) + g_2(\varphi)\,s(\varphi)) +$$
$$+ (f_3(\varphi) + (f_2(-\varphi) + f_2(\varphi))\,g_1(\varphi))\,(g_2(-\varphi) + (2\,g_1(-\varphi) - 3\,s(\varphi))\,s(\varphi)) +$$
$$+ (g_1(\varphi) - s(\varphi))\,(f_4(-\varphi) + s(\varphi)\,(f_3(-\varphi) + f_2(-\varphi)\,s(\varphi))) - f_2(-\varphi)\,(g_3(-\varphi) +$$
$$+ s(\varphi)\,(g_2(-\varphi) + (g_1(-\varphi) - s(\varphi))\,s(\varphi))) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\, g_3(\varphi)\, (g_1(-\varphi)-3\, s(\varphi))+f_2(-\varphi)\, g_3(\varphi)\, s(\varphi)+(f_3(-\varphi)+\\
&+2\, f_2(-\varphi)\, s(\varphi))\, (g_3(\varphi)+g_2(\varphi)\, s(\varphi))+(f_4(\varphi)+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\, g_2(\varphi))\\
&(g_2(-\varphi)+(2\, g_1(-\varphi)\text{-}3\, s(\varphi))\, s(\varphi))+(g_2(\varphi)+g_1(\varphi)\, s(\varphi))\, (f_4(-\varphi)+s(\varphi)\\
&(f_3(-\varphi)+f_2(-\varphi)\, s(\varphi)))+(f_3(\varphi))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\, g_1(\varphi))\, (g_3(-\varphi)+\\
&+s(\varphi)\, (g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\, s(\varphi)))=0
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(\varphi)\, s(\varphi)\, (f_3(-\varphi)+2\, f_2(-\varphi)\, s(\varphi))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\, g_3(\varphi)\, (g_2(-\varphi)+\\
&+(2\, g_1(-\varphi)\text{-}3\, s(\varphi))\, s(\varphi)+(g_3(\varphi)+g_2(\varphi)\, s(\varphi))\, (f_4(-\varphi)+s(\varphi)(f_3(-\varphi)+\\
&+f_2(-\varphi)\, s(\varphi)))+(f_4(\varphi)+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\, g_2(\varphi))(g_3(-\varphi)+\\
&+s(\varphi)\, (g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\, s(\varphi)))=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(\varphi)\, (s(\varphi)\, (f_4(-\varphi)+s(\varphi))\, (f_3(-\varphi)+f_2(-\varphi)\, s(\varphi)))+(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi))\times\\
&\times\, (g_3(-\varphi)+s(\varphi)\, (g_2(-\varphi)+(g_1(-\varphi)-s(\varphi))\, s(\varphi))))=0
\end{aligned}
$$

где $s(\varphi)=-\int_0^{\varphi}\big(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\big)d\varphi$.

При этом сама отражающая функция будет иметь вид $F=\dfrac{\rho}{1-\rho\int_0^{\varphi}\big(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\big)d\varphi}$.

Доказательство. Будем рассматривать дробно-линейную отражающую функцию вида $F(\varphi,\rho)=\dfrac{n(\varphi)\rho+r(\varphi)}{s(\varphi)\rho+n(-\varphi)}$. В нашем случае она должна раскладываться в ряд $F(\varphi,\rho)=\rho+z(\varphi)\rho^2+z(\varphi)^2\rho^3+z(\varphi)^3\rho^4+\ldots$ с периодическими по φ коэффициентами. Поэтому $F(\varphi,0)\equiv 0$, откуда следует, что $r(\varphi)\equiv 0$. Следовательно $F(\varphi,\rho)=\dfrac{n(\varphi)\rho}{s(\varphi)\rho+n(-\varphi)}=\dfrac{n(\varphi)\rho}{s_1(\varphi)\rho+1}$, видим, что $n(\varphi)\equiv 1$.

Составим основное соотношение (6), приведем к общему знаменателю полученное выражение, числитель разложим по степеням ρ. Приравняв коэффициент при ρ^2 нулю, получили дифференциальное уравнение, решив которое, выяснили, что если $F(\varphi,\rho)=\dfrac{\rho}{1+s_1(\varphi)\rho}$ является отражающей функцией уравнения (14), то $s_1(\varphi)=-\int_0^{\varphi}\big(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\big)d\varphi$. Согласно теореме 1 система (13) будет иметь центр тогда и только тогда, когда $s_1(\varphi)-2\pi$ -периодическая. А это значит, что

$$\int_0^{2\pi}\big(f_2(-\varphi)+f_2(\varphi)\big)d\varphi=0 \tag{16}$$

Видим, что коэффициенты при $\rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \rho^8, \rho^9$ не обращаются в нуль при любых $f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$. Приравнивая нулю каждое выражение при указанных степенях ρ, получим систему условий (15). Условия (15), (16) являются необходимыми и достаточными условиями 2π-периодичности отражающей функции уравнения (14).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для дифференциального уравнения (14) выполнены условия (15) и (16). Тогда все решения уравнения (14), продолжимые на* $[0,2\pi]$, *являются* 2π*-периодическими, а автономная система (13) имеет в точке (0,0) центр.*

Доказательство. Согласно теореме 2 уравнение (13) имеет дробно-линейную отражающую функцию, с 2π-периодическими по φ коэффициентами. Поэтому продолжимые на $[0,2\pi]$ решения этого уравнения являются 2π-периодическими. А по теореме 1 этого достаточно для того, чтобы автономная система (13) имела центр в начале координат.

Теорема доказана.

Запишем теперь условия (15), (16) через коэффициенты системы (13). Разложим полученные выражения в тригонометрические ряды Фурье. Эти выражения обращаются в нуль, когда коэффициенты при каждом тригонометрическом слагаемом обращаются в нуль. Т. о. получим 103 выражения, которые при некоторых условиях обратятся в тождества. Как было отмечено выше, эти условия являются достаточными условиями центра системы (13). Для отыскания этих условий воспользуемся понятием базиса Грёбнера [4, 5].

Теорема 4. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2, \\ \dot{y} = -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2. \end{cases} \tag{17}$$

имеет центр в начале координат, если коэффициенты системы (17) удовлетворяют следующим соотношениям.

$b_1b_2 = 0,\ a_1b_1 = 0,\ -2a_1^3 + 3a_1^2b_2 - a_1b_2^2 = 0,\ -2a_1a_2b_2 + a_2b_2^2 = 0,\ 4a_1^2a_2 - a_2b_2^2 = 0,$
$-2a_1a_2^2 + a_2^2b_2 = 0,\ 2a_1a_2 - a_3b_1 - a_2b_2 = 0,\ a_1b_2^4 - a_3b_2^4 - b_2^5 = 0,\ -a_1a_2 - a_2a_3 = 0,$
$16a_1^2a_3 + 8a_1^2b_2 - 16a_1a_3b_2 - 11a_1b_2^2 + 3a_3b_2^2 + 3b_2^3 = 0, -a_1^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1b_2^3 + a_3b_2^3 = 0,$
$-2a_1^2b_2^2 + 2a_1a_3b_2^2 + 3a_1b_2^3 - a_3b_2^3 - b_2^4 = 0, -16a_3^3 - 24a_3^2b_2 + a_1b_2^2 - 9a_3b_2^2 - b_2^3 = 0,$
$-8a_1a_3^2 - 8a_1a_3b_2 + 4a_3^2b_2 - a_1b_2^2 + 5a_3b_2^2 + b_2^3 = 0.$

При этом отражающая функция этой системы имеет вид $F(\varphi,\rho) = \dfrac{3\rho}{3 - \rho\sin\varphi\,(5a_1 + a_3 + b_2 + (a_1 - a_3 - b_2)\cos 2\varphi)}$.

Пример 1. Рассмотрим следующие системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_2 xy, \\ \dot{y} = -x + b_1 x^2 + b_3 y^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y - b_2 y^2, \\ \dot{y} = -x + b_2 xy + b_3 y^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2} b_2 x^2 + a_2 xy - \frac{1}{2} b_2 y^2, \\ \dot{y} = -x + b_2 xy. \end{cases}$$

Не трудно убедиться, что коэффициенты каждой из этих систем удовлетворяют условиям теоремы 4, т. е. указанные системы имеют центр в начале координат.

Теорема 5. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3 + \\ \quad + a_8 x^4 + a_9 x^3 y + a_{10} x^2 y^2 + a_{11} xy^3 + a_{12} y^4, \\ \dot{y} = -x + b_4 x^3 + b_5 x^2 y + b_6 xy^2 + b_7 y^3 + \\ \quad + b_8 x^4 + b_9 x^3 y + b_{10} x^2 y^2 + b_{11} xy^3 + b_{12} y^4 \end{cases} \tag{18}$$

имеет центр в начале координат, если коэффициенты системы (18) удовлетворяют следующим соотношениям.

$$b_7 = 0,\ a_4 = 0,\ -a_6 a_7 - a_6 b_6 = 0,\ a_6 + b_5 = 0,\ -a_5 a_6 - a_6 b_4 = 0,$$
$$-a_7^2 b_9 - 2a_7 b_6 b_9 - b_6^2 b_9 = 0,\ a_5 a_7 b_9 + a_7 b_4 b_9 + a_5 b_6 b_9 + b_4 b_6 b_9 = 0,$$
$$a_5^2 b^9 + 2a_5 b_4 b_9 + b_4^2 b_9 = 0,\ a_5 b_9^2 + b_4 b_9^2 = 0,\ a_7 b_9^3 + b_6 b_9^3 = 0,$$
$$-a_7^2 b_{11} - 2a_7 b_{11} b_6 - b_{11} b_6^2 = 0,\ -a_5 a_7 b_{11} - a_7 b_{11} b_4 - a_5 b_{11} b_6 - b_{11} b_4 b_6 = 0,$$
$$a_5^2 b_{11} + 2a_5 b_{11} b_4 + b_{11} b_4^2 = 0,\ -2a_5 b_{11} b_9 - 2b_{11} b_4 b_9 - a_7 b_9^2 - b_6 b_9^2 = 0,$$
$$-a_7 b_{11} b_9^2 - b_{11} b_6 b_9^2 = 0,\ -a_7 b_{11}^2 - b_{11}^2 b_6 = 0,\ -a_7 b_{11} + a_6 b_{12} - b_{11} b_6 = 0,$$
$$-a_5 b_{11}^2 - b_{11}^2 b_4 - 2a_7 b_{11} b_9 - 2b_{11} b_6 b_9 = 0,\ a_7 b_{12} b_9 + b_{12} b_6 b_9 = 0,\ b_{12} b_9^3 = 0,$$
$$b_{11} b_{12} = 0,\ b_{12}^2 b_9 = 0,\ a_8 = 0,\ a_6 a_9 + a_6 b_8 - a_5 b_9 - b_4 b_9 = 0,\ -a_9 b_9 - b_8 b_9 = 0,$$
$$-a_7 a_9 b_{11} - a_9 b_{11} b_6 - a_7 b_{11} b_8 - b_{11} b_6 b_8 + a_5 b_{12} b_9 + b_{12} b_4 b_9 = 0,$$
$$a_5 a_9 b_{11} + a_9 b_{11} b_4 + a_5 b_{11} b_8 + b_{11} b_4 b_8 = 0,\ -a_9^2 b_{11} - 2a_9 b_{11} b_8 - b_{11} b_8^2 = 0,$$
$$a_{11} a_6 + a_6 b_{10} - a_5 b_{11} - b_{11} b_4 - a_7 b_9 - b_6 b_9 = 0,\ a_{11} b_{11} + b_{10} b_{11} + b_{12} b_9 = 0,$$
$$a_9 b_{11} + b_{11} b_8 + a_{11} b_9 + b_{10} b_9 = 0, a_9 b_{11}^2 + b_{11}^2 b_8 - b_{12} b_9^2 = 0,\ a_{10} + b_9 = 0,\ a_{12} + b_{11} = 0.$$

Отражающая функция системы (18) в этом случае имеет вид $F(\varphi, \rho) = \rho$.

Пример 2. Система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a_5 x^2 y + a_7 y^3 + a_9 x^3 y + a_{11} xy^3, \\ \dot{y} = -x + b_4 x^3 + b_6 xy^2 + b_8 x^4 + b_{10} x^2 y^2 + b_{12} y^4, \end{cases}$$

имеет центр в начале координат, т. к. для коэффициентов этой системы выполняются все условия теоремы 5.

Приведенные примеры доказывают эффективность использования метода отражающей функции для доказательства наличия центра некоторых двумерных дифференциальных систем.

Применение метода отражающей функции для решения проблемы «центра-фокуса» дало нам возможность сформулировать и доказать следующую теорему о достаточных условиях наличия центра системы (1).

Теорема 6. *Пусть имеем уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 \frac{B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + B_4\rho^4 + B_5\rho^5}{A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 + A_4\rho^4 + A_5\rho^5 + A_6\rho^6} \tag{19}$$

где A_0 *чётная функция,* $A_3 = 0$. *И пусть функции* $b = -\frac{A_4}{A_2}$ *и*

$$a = \Big(-4A_0A_1B_0 + 2A_1^2B_0 + 4A_0A_2B_0 + 4A_0^2B_1 - 2A_0A_1B_1 - 4A_0^2B_2 + 7A_1^2\overline{B_0} - 4A_0A_2\overline{B_0} -$$
$$-11\overline{A_1}^2\overline{B_0} + 8A_0A_2B_0 + 4A_0^2b(\varphi)\big(B_0 + \overline{B_0}\big) + 4A_0^2\overline{B_1} - 4A_0A_1\overline{B_1} - 4A_0^2\overline{B_2} +$$
$$+\big(6A_0^2 - 4A_0^3\big)b'(\varphi) + 2A_1(A_1B_0 - A_0B_1 + 2(A_0 - A_1)\overline{B_0} - 2A_0\overline{B_1} + A_0^2b'(\varphi))\Big)/$$
$$/\Big(8A_0\big(A_1B_0 - A_0B_1 + \overline{A_1}\,\overline{B_0} - A_0\overline{B_1} + A_0^2b'(\varphi)\big)\Big)$$

доопределяются до дифференцируемых на всем R функций. Тогда, если для этого уравнения выполнены условия: $A_6 = -b^3A_0$, $B_5 = b^2b'A_0$, $A_5 = -b^2A_1$, *и функции* $a_1 = A_1 + 2aA_0$, $a_0 = A_2 - A_1a + A_0b + A_0a^2$ – *чётные, а функции* $\alpha_0 = B_2 - A_2a' + a^2\big(B_0 - A_0a'\big) - b\big(2B_0 + A_0a'\big) - A_1b' + a\big(A_1a' + A_0b' - B_1\big)$, $\alpha_2 = B_0 - A_0a'$, $\alpha_1 = B_1 - 2B_0a + 3A_0a'a - A_1a' - A_0b'$ – *нечётные, то система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах сводится к уравнению (19), имеет центр в начале координат.*

Доказательство. Для функции $U = \frac{1}{\rho} + a + b\rho$ найдем полную производную

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial\rho}R = \rho^2\frac{B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + B_4\rho^4 + B_5\rho^5}{A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 + A_4\rho^4 + A_5\rho^5 + A_6\rho^6} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1U + \alpha_2U^2}{a_0 + a_1U + a_2U^2}.$$

Из этого соотношения, согласно [1, 65], следует, что $U(\varphi, \rho(\varphi))$ чётная функция для любого решения $\rho(\varphi)$ уравнения (18). Поэтому отражающая функция уравнения (19) удовлетворяет соотношению $U\big(-\varphi, F\big) \equiv U(\varphi, \rho(\varphi))$.

Из вышесказанного, в силу 2π-периодичности коэффициентов уравнения (18), следует 2π-периодичность отражающей функции F. Тогда по теореме 1 система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах записывается уравнением (19), будет иметь центр в начале координат.

Литература

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем : монография / В.И. Мироненко ; Мин. образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.
2. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и проблема различения «центра-фокуса» / В.И. Мироненко // «Еругинские чтения – XI» : тез. докладов Междунар. математической конф. ; Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2006. – С. 55.
4. Кокс, Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. – М. : Мир, 2000. – 688 с.
5. Аржанцев, И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений / И.В. Аржанцев. – М. : МЦЭНМО, 2003. – 68 с.