О. И. Терещенко, В. В. Шкут, М. И. Ефремова

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЙ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ», «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»

В традиционных курсах математического анализа раньше рассматривали три вида пределов: предел переменной, предел числовой последовательности, предел функции. В современных курсах рассматривают лишь два последних. Понятия «предел последовательности», «предел функции» являются не только важнейшими понятиями математического анализа, но и сложнейшими понятиями для восприятия. При изучении теории пределов у студентов возникает ряд трудностей. И это не случайно. Трудности можно объяснить тем, что переход от конечного к бесконечному, от дискретного к непрерывному требуют высокого уровня абстрактно-теоретического мышления. Более того, с понятием предела в повседневном обиходе встречаться не приходится. Это понятие очень глубокое, и возникло оно в результате многоступенного абстрагирования от окружающей действительности. По этой причине усвоить данные понятия студентам первого курса довольно сложно. Чтобы избежать формального заучивания определений предела последовательности, предела функции, формирование данных понятий мы осуществляем поэтапно.

Перед тем как ввести определение предела последовательности, мы формируем у студентов наглядно-интуитивное представление о данном понятии. С этой целью рассматриваем ряд примеров бесконечных последовательностей, включая возрастающие, убывающие, колеблющиеся последовательности, имеющие предел и не имеющие предела. При этом для большей наглядности каждой из последовательностей даём геометрическую интерпретацию.

1. $a_n = 4n;\quad 4,\ 8,\ 12,\ 16, \ldots, 4n, \ldots$
2. $b_n = -3n;\quad -3,\ -6,\ -9,\ -12, \ldots, -3n, \ldots$
3. $y_n = \dfrac{n+1}{n};\quad 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3}, \ldots$
4. $x_n = \dfrac{2n-1}{n};\quad 1, \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{4}, \ldots$
5. $z_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n};\quad 2,\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{13}{4}, \ldots$

Анализируя поведение рассматриваемых последовательностей, первокурсники отмечают особенности каждой из указанных последовательностей: первая – бесконечно возрастающая последовательность, члены которой могут превышать любое наперёд заданное положительное число; вторая – убывающая, члены ее могут стать меньше любого наперёд заданного отрицательного числа; третья – бесконечно убывающая последовательность, члены ее уменьшаются и как угодно близко приближаются к числу 1, оставаясь правее этого числа; четвёртая последовательность возрастающая, и ее члены как угодно близко приближаются к числу 2, оставаясь левее этого числа; пятая – колеблющаяся последовательность, члены которой с обеих сторон как угодно близко приближаются к числу 3. Обращаем внимание на то, что в последних трёх бесконечных последовательностях члены как угодно близко приближаются к определённому числу. Это число и называют пределом последовательности.

Чтобы подвести первокурсников к определению предела последовательности в общем виде, мы предлагаем студентам языком математики записать свойства членов последовательности: как угодно близко приближаются к определенному числу. С этой целью рассматриваем расстояние каждого члена последовательности от числа, к которому стремятся члены последовательности на примере 4.

Так как расстояние между двумя точками на координатной прямой равно модулю разности их координат, то имеем ряд следующих равенств:

$$|x_1-2|=|1-2|=1,$$

$$|x_2-2|=\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{1}{2},$$

$$|x_3-2|=\left|\frac{5}{3}-2\right|=\frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|x_{100}-2|=\left|\frac{199}{100}-2\right|=\frac{1}{100},$$

$$|x_{101}-2|=\left|\frac{201}{100}-2\right|=\frac{1}{101},\ldots$$

Из данных равенств вытекает, что разность между членами последовательности x_n и числом 2 с возрастанием номера n члена последовательности все время уменьшается и может стать меньше любого наперёд заданного положительного числа ε. Если $\varepsilon=0{,}01$, номер члена последовательности, с которого выполняется неравенство $|x_n-2|<0{,}01$, обозначим через N. Для последовательности x_n, начиная с N = 100, для всех n > 100 верно неравенство $|x_n-2|<0{,}01$.

Итак, выражение «члены последовательности x_n как угодно близко приближаются к числу 2» означает: каким бы ни было сколь угодно малое положительное число ε, у последовательности найдётся член с номером N, начиная с которого, т. е. для всех n > N, разность по модулю между любым членом последовательности и числом 2 будет меньше ε. Таким свойством обладают числа 1 и 3 последовательностей y_n и z_n и их называют пределом этих последовательностей. Вводим определение.

Число А называют пределом последовательности x_n, при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ такое, что если выполняется неравенство $n > N$, то при таких n выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$, и записывают в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$.

Этому абстрактному понятию даём геометрическую интерпретацию: неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$.

Геометрически это означает, что бесконечное множество членов последовательности x_n попадает в числовой интервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, а вне его остаётся конечное их число. Любой интервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ числовой прямой называется окрестностью точки А радиуса ε. Поэтому утверждение $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = A$ равносильно утверждению: начиная с некоторого номера N, все члены x_n при $n > N$ принадлежат интервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Одной из важнейших проблем теории пределов является выяснение вопроса о том, какие из числовых последовательностей имеют предел. Дальше формулируем и доказываем два условия существования предела последовательности: необходимое и достаточное.

Понятие предела функции, как и понятие предела последовательности, студенты воспринимают довольно трудно. Поэтому формирование данного понятия начинаем с конкретных примеров и геометрических иллюстраций, т. е. сначала даём студентам наглядно-интуитивное представление о пределе функции. Практика показала, что студенты лучше воспринимают понятие предела функции в терминах $\varepsilon - \delta$.

Обращаем внимание на то, что числовая последовательность – это функция, которая определена на множестве натуральных чисел, а значениями ее являются отдельные числа. В таком случае говорят, что функция изменяется дискретно. Поэтому естественна проблема существования предела функции, областью определения которой является произвольное числовое множество. Разбираем конкретные примеры, которые подводят студентов к пониманию того, что предел функции – это число, к которому как угодно близко приближаются значения функции, если значения аргумента стремятся к определенному числу или $+\infty$, или $-\infty$.

Пример 1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, а множество значений – числовой промежуток $[2,+\infty)$.

Предлагаем студентам проследить за поведением данной функции при условии, что значения аргумента x как угодно близко приближаются к числу 2, символически обозначаем $x \to 2$. Если $x \to 2$, оставаясь слева от точки 2, то соответствующие значения функции, увеличиваясь, как угодно близко приближаются к числу 4. Если $x \to 2$, оставаясь справа от точки 2, то соответствующие значения функции уменьшаются и тоже как угодно близко приближаются к числу 4. Имеем, что, каким бы образом значения аргумента x как угодно близко не приближались к числу 2, соответствующие значения функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ как угодно близко приближаются к числу 4. В этом случае говорят, что число 4 есть предел функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ при $x \to 2$, и записывают $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)=4$.

Пример 2. Дана функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$. $D(y)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$. Проследим за поведением функции, если $x \to 4$. В отличие от функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ в точке $x=4$ не определена. Изображаем график данной функции (рисунок 1), по которому несложно установить, что если $x \to 4$, то значения функции как угодно близко приближаются к числу 8.

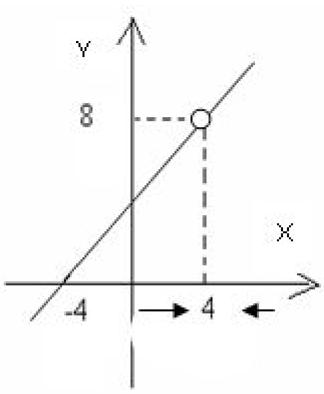

Рисунок 1

В таком случае также считают, что число 8 – предел функции $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ при $x \to 4$, и записывают $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$.

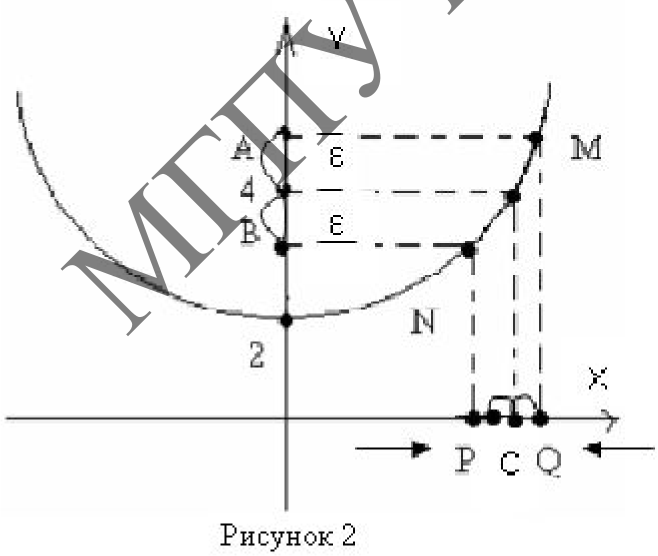

Рисунок 2

Обобщаем рассмотренные примеры и подводим студентов к следующему выводу: если число m является пределом функции $f(x)$, то значения функции $f(x)$ как угодно близко приближаются к числу m, если значения аргумента x как угодно близко приближаются к некоторому числу a, т. е. если $x \to a$. Сформулированное свойство числа m предлагаем записать языком математики (рисунок 2). В примере 1 зададим как угодно малое число $\varepsilon > 0$ и построим ε-окрестность точки 4. Все значения функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, которые содержатся в ε-окрестности точки 4, т. е. внутри отрезка АВ, удовлетворяют неравенству: $4-\varepsilon < f(x) < 4+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-4 < \varepsilon$, что равносильно неравенству

$$|f(x)-4| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Но поведение функции зависит от того, какие значения принимает аргумент *x*. Найдём все те значения аргумента *x*, для которых всегда выполняется неравенство (1). С этой целью точки M и N проектируем на ось OX. Отрезок PQ содержит кроме точки 2, все значения аргумента *x*, для которых выполняется неравенство (1). Очевидно, что PC > CQ. Длину меньшего отрезка обозначим через δ и построим δ-окрестность точки 2. Все точки оси OX, которые содержатся в δ-окрестности точки 2, удовлетворяют неравенству

$$2-\delta < x < 2+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-2 < \delta \Leftrightarrow |x-2| < \delta.$$

Имеем, что для тех значений аргумента *x*, которые удовлетворяют неравенству $|x-2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-4| < \varepsilon$.

Геометрически это означает, что только значения аргумента *x*, которые стремятся к числу 2 и попадают в δ-окрестность этой точки, соответствующие значения функции *f*(*x*) попадают в ε-окрестность точки 4.

На примере 2 показываем, что для заданного $\varepsilon > 0$ найти δ-окрестность точки 4 можно не только графически, но и аналитически.

После рассмотренных примеров вводим определение предела функции.

Число *b* называется пределом функции *f*(*x*) при $x \to a$ (или в точке *a*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, если для всех $x \neq a$ и таких, которые удовлетворяют неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

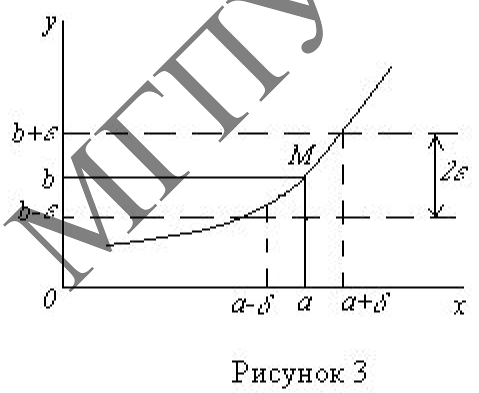

Рисунок 3

Это определение в общем виде для функции демонстрируем на рисунке 3.

Студенты лучше воспринимают данное определение в том случае, если сразу показать, как его применить для доказательства равенства $\lim_{x\to 0} f(x) = b$.

Как показывает опыт работы с первокурсниками, при таком подходе к формированию понятий предела последовательности, предела функции, они хорошо усваивают данные понятия и в дальнейшем используют их для решения различных задач, связанных с этими понятиями.