МАТЭМАТЫКА І ФІЗІКА

УДК 519.854

О. В. Голубева, И. П. Купцевич, М. И. Ефремова

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ НА СЕТИ

В статье представлено точное, полное, наглядное решение прикладной задачи о формировании максимального потока на сети, основанное на доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона и состоящее из двух этапов: насыщение потока и последующее его перераспределение. На примере конкретной сети с большим количеством вершин аналитически и графически проиллюстрирована эффективность предложенного алгоритма. При изучении практического программирования приведенная методика позволяет сформировать четкое понимание происходящего в сети процесса. Ее можно также применять при разработке прикладного программного обеспечения. Она может быть использована в преподавательской деятельности и быть полезна аспирантам, студентам и лицам, занимающимся самообразованием.

Введение

Дисциплина «Дискретная математика» изучается во всех университетах, где осуществляется подготовка специалистов в области программирования, информационных технологий, математики, а также по техническому и экономическому направлениям. Одним из подразделов этой дисциплины является тема «Потоки в сетях». В частности, рассматривается задача о формировании максимального потока на сети, которая имеет различные применения: в транспортной сети часто приходится определять наибольший поток грузов, перевозимых из одного города в другой; аналогичные вопросы решаются для систем нефтепроводов, водопроводной сети; сети почтовой службы и т. п. Этим обусловлена актуальность рассматриваемой задачи.

Методы решения, которые предлагаются в изданиях соответствующей тематики, являются различными модификациями алгоритма Форда-Фалкерсона [1], [2]. Сам алгоритм основывается на доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона. Авторы статьи предлагают наиболее полную, точную, последовательную и наглядную методику решения рассматриваемой задачи. При этом учтена возможность перераспределения потока, которой некоторые авторы вообще не уделяют внимания (см., например, [3]).

Результаты исследований и их обсуждение

Приведем необходимые основные определения, понятия и требования.

Сетью называется связный ориентированный граф без петель, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое натуральное число – **пропускная способность дуги**. Пропускная способность дуги $(x; y)$ равна максимальному количеству вещества, которое она может пропустить за единицу времени. На рисунке 1 изображена сеть, на которой в круглых скобках записана пропускная способность дуги.

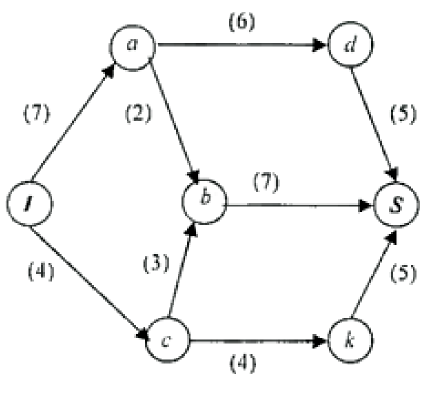

Рисунок 1

Поток в сети определяет способ пересылки некоторых объектов из одной вершины графа в другую по направлению дуги. Число объектов $f(x;y)$, пересылаемых вдоль дуги $(x;y)$ (величина потока), не может превышать пропускной способности $c(x;y)$ этой дуги: $0 \le f(x;y) \le c(x;y)$. В сети выделяют особые вершины I и S, которые называются соответственно **истоком** и **стоком** сети. Из вершины I дуги только выходят, в вершину S дуги только входят.

На сети формулируют **задачу о максимальном потоке**, в результате решения которой находят максимальную пропускную способность сети $F_{\max}$ между ее истоком и стоком.

Задача о максимальном потоке в сети должна удовлетворять следующим условиям:

– сумма величин потоков дуг, выходящих из истока сети, должна быть равна сумме величин потоков дуг, входящих в сток (сохранение потока);

– для вершины, не являющейся стоком или истоком, сумма величин потоков дуг, входящих в вершину, должна быть равна сумме величин потоков дуг, выходящих из нее;

– максимальный поток на пути от истока к стоку определяется той дугой, которая имеет наименьшую пропускную способность из всех дуг, принадлежащих этому пути.

Если пропускная способность $c(x;y)$ дуги $(x;y)$ равна величине идущего через нее потока $f(x;y)$ (на сети $f(x;y)$ обозначается числом без скобок), то дуга называется **насыщенной**, а любой путь, в который она включена, называется **насыщенным путем**. Поток называется **насыщенным**, если любой путь из I в S содержит дугу $(x;y)$, для которой $f(x;y) = c(x;y)$. Первая часть решения задачи о максимальном потоке как раз и состоит в нахождении насыщенного потока. Но насыщенный поток не всегда является максимальным.

Поток в сети будет максимальным, если величина этого потока $F_{\max}$ больше величины любого другого потока в этой сети. В таком случае поток $F_{\max}$ будет равным минимальной пропускной способности $C_{\min}$ разреза, отделяющего сток от истока.

В связи с последним замечанием рассмотрим понятие разреза сети. **Разрезом** является множество дуг сети, удаление которых блокирует все пути из источника в сток.

Разрез на сети производят следующим образом. Разбивают множество вершин сети на два непересекающихся подмножества A и B так, чтобы исток I попал в подмножество A, а сток S – в подмножество B. Совокупность дуг, начальные вершины которых принадлежат подмножеству A, а конечные – подмножеству B, составляют разрез сети A/B. На рисунке 2 показан разрез A/B, при котором вершины сети разбиты на подмножества $A = \{I, p\}$ и $B = \{k; d; S\}$, а разрез состоит из дуг $(I; d)$, $(p; d)$, $(p; S)$, $(p; k)$.

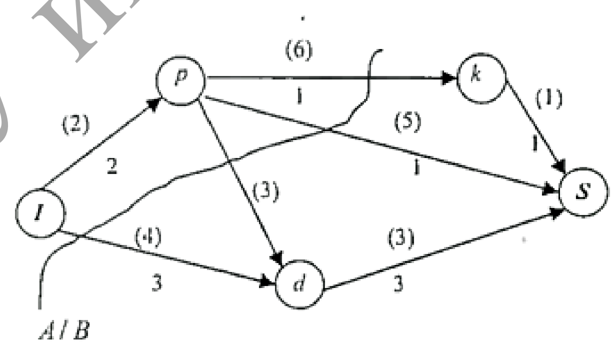

Рисунок 2

Пропускной способностью разреза A/B называется сумма пропускных способностей входящих в него дуг: $C(A/B) = \sum_{x \in A,\ y \in B} c(x,y)$.

Пропускная способность разреза A/B на рисунке 2 равна $C(A/B) = 4 + 3 + 5 + 6 = 18$, а величина потока через него составляет $F(A/B) = 3 + 0 + 1 + 1 = 5$. Разрез, для которого число $C(A/B)$ – наименьшее на сети, называется **минимальным**.

Сформулируем **теорему Форда-Фалкерсона** [4]: максимальный поток по сети равен пропускной способности минимального разреза:

$$F_{max} = C_{min}(A/B).$$

Алгоритм определения максимального потока по сети, который основан на доказательстве теоремы, состоит из двух частей.

1. **Насыщение потока.** Задача первой части алгоритма состоит в насыщении потока.

1.1 Формируется произвольный начальный поток.

1.2. Находятся оставшиеся пути из I в S, имеющие только ненасыщенные дуги. Если такие пути найдены, то переход к пункту 1.3, иначе – переход к пункту 1.4.

1.3. Поток по найденному пути увеличивается таким образом, чтобы одна из дуг стала насыщенной.

1.4. Поток насыщен.

2. **Перераспределение потока.** Рекурсивно помечаются все вершины сети.

2.1. Вершина I помечается $-I$.

2.2. Пусть m – любая из уже помеченных вершин; n – произвольная непомеченная вершина, смежная с вершиной m. Вершина n помечается $+m$, если эти вершины соединены дугой с направлением $m \to n(+m)$, и помечается $-m$, если соединены ненасыщенной дугой с направлением $m \leftarrow n(-m)$. После пометки вершин вершина S оказалась либо помеченной, либо непомеченной.

2.3. Вершина S оказалась помеченной. Значит, существует последовательность помеченных вершин от I к S. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена буквой предыдущей вершины. На дугах последовательности определяется новый поток: увеличивается на δ единиц поток на дугах, имеющих направление от I к S, и уменьшается на δ единиц поток на дугах, имеющих обратное направление. Число δ равно наименьшей разнице между пропускной способностью и величиной потока дуг, входящих в последовательность. Заметим, что поток можно увеличивать (уменьшать) на прямых (обратных) дугах до тех пор, пока одна из дуг не станет насыщенной (пустой). Далее снова переход к пометке вершин (пункт 2.1). Перераспределение потока сохраняет все его свойства и увеличивает поток на δ единиц в вершину S.

2.4. Вершина S осталась непомеченной. Пусть A – множество всех помеченных вершин, B – множество всех непомеченных вершин. Тогда дуги, входящие в вершины множества B, насыщенные (они определяют разрез A/B), а выходящие – пустые. Таким образом, найден поток F и разрез A/B, для которых выполняется условие $F_{max} = C_{min}(A/B)$.

Покажем применение алгоритма на конкретной сети с одним истоком и одним стоком (рисунок 3), на которой нужно сформировать максимальный поток и определить минимальный разрез.

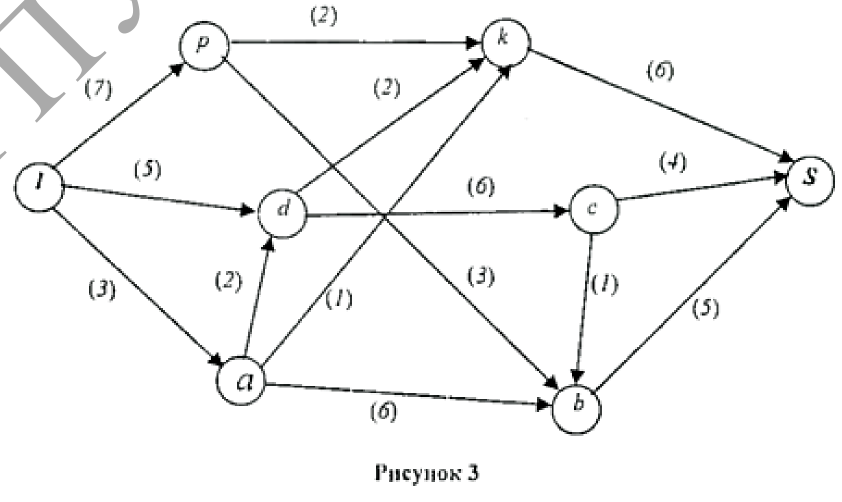

Рисунок 3

Сформируем на сети какой-либо начальный поток. Рассмотрим путь $I \to p \to k \to S$. Поскольку $\min\{7; 2; 6\} = 2$, по этому пути пропускаем поток в 2 единицы. На сети значение потока обозначим числами без скобок. По пути $I \to d \to c \to S$ пропускаем поток в 4 единицы, т. к. $\min\{5; 6; 4\} = 4$. По пути $I \to a \to b \to S$ пропускаем поток в 3 единицы, так как $\min\{3; 6; 5\} = 3$. Таким образом, начальный поток имеет вид (рисунок 4):

$I \xrightarrow{2} p \xrightarrow{2} k \xrightarrow{2} S$, $I \xrightarrow{4} d \xrightarrow{4} c \xrightarrow{4} S$, $I \xrightarrow{3} a \xrightarrow{3} b \xrightarrow{3} S$.

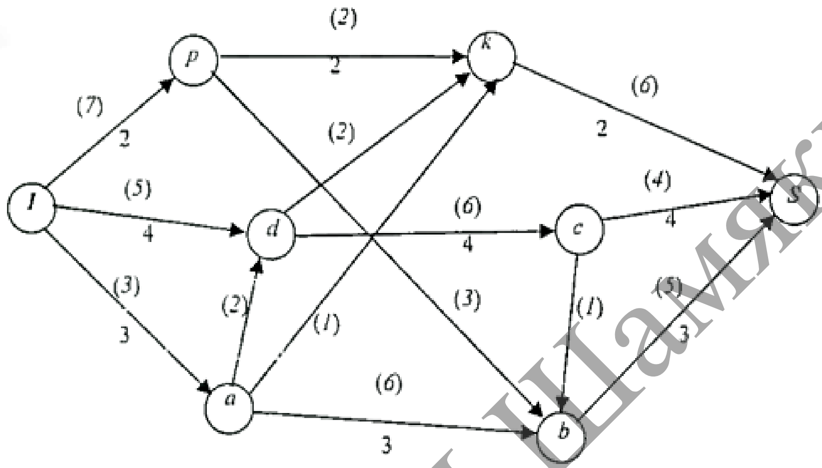

Рисунок 4

Проверим, является ли сформированный поток насыщенным. Анализ имеющейся ситуации оформим в виде таблицы (таблица 1).

Таблица 1

Дуги	c(x;y)	f(x;y)	c(x;y) – f(x;y) = = q(x;y)	Предшествующие ненасыщенные дуги, если q(x;y) > 0
$(I;p)$	7	2	5	–
$(I;d)$	5	4	1	–
$(I;a)$	3	3	0	–
$(p;k)$	2	2	0	–
$(p;b)$	3	0	3	$(I;p)$
$(d;k)$	2	0	2	$(I;d)$
$(d;c)$	6	4	2	$(I;d)$
$(a;d)$	2	0	2	–
$(a;k)$	1	0	1	–
$(a;b)$	6	3	3	–
$(k;S)$	6	2	4	$(I;d)$, $(d;k)$
$(c;b)$	1	0	1	$(I;d)$, $(d;c)$
$(c;S)$	4	4	0	–
$(b;S)$	5	3	2	$(I;p)$, $(p;b)$ или $(I;d)$, $(d;c)$, $(c;b)$.

На сети имеются пути от I к S, содержащие только ненасыщенные дуги, а именно: $I \to p \to b \to S$, $I \to d \to k \to S$ и $I \to d \to c \to b \to S$. Для первого пути дополнительно увеличим поток на 2 единицы, т. к. $\min\{7-2; 3; 5-3\} = 2$. Второй и третий пути содержат одну и ту же дугу

$(I;d)$ с минимальной для них оставшейся разностью $q(I;d)=1$. Поэтому для увеличения потока на 1 единицу выберем, например, путь $I \to d \to k \to S$.

Теперь каждый из этих путей содержит насыщенную дугу, следовательно, полученный поток – насыщенный (рисунок 5).

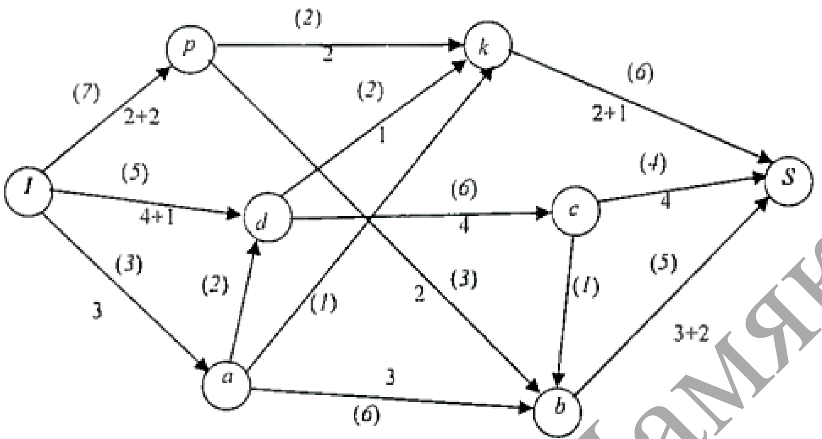

Рисунок 5

Выясним, является ли построенный поток максимальным. Изобразим сеть (рисунок 6), на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги. На этой сети разность пропускной способности дуги и проходящего по ней потока обозначим числом в квадратных скобках. Пропускную способность дуги, по которой поток не проходит, оставим в круглых скобках.

Как видно из рисунка 6, исток I и сток S связаны дугами. Значит, можно добавить какое-то количество потока по ненасыщенным дугам путем перераспределения потока.

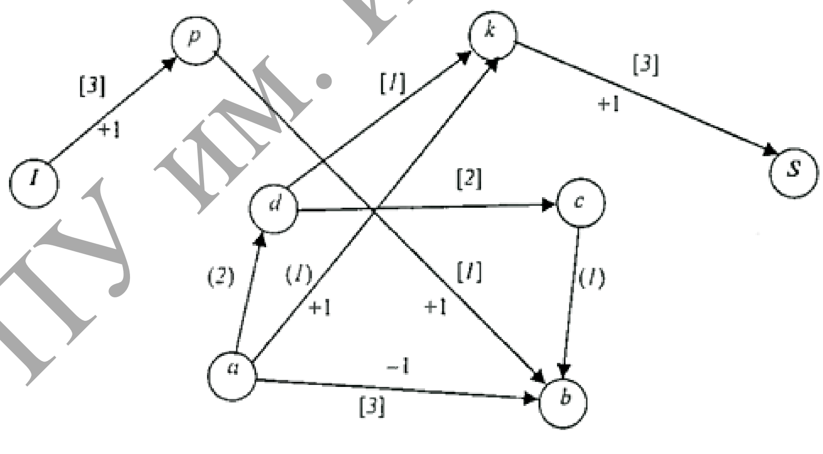

Рисунок 6

Помечаем вершины (рисунок 7). Вершину I пометим $-I$; смежную ей вершину p помечаем $+I$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I \to p$. Вершину b помечаем $+p$, так как вершины p и b соединяет ненасыщенная дуга $p \to b$. Вершину a помечаем $-b$, так как вершины b и a соединяет непустая дуга $b \leftarrow a$. Вершины d и k помечаем $+a$, так как они соединены с вершиной a ненасыщенными дугами $a \to d$ и $a \to k$. Вершины c и d – смежные, они соединены ненасыщенной дугой $d \to c$, поэтому c помечаем $+d$. Вершины S и k также смежные, они соединены ненасыщенной дугой $k \to S$, поэтому S помечаем $+k$.

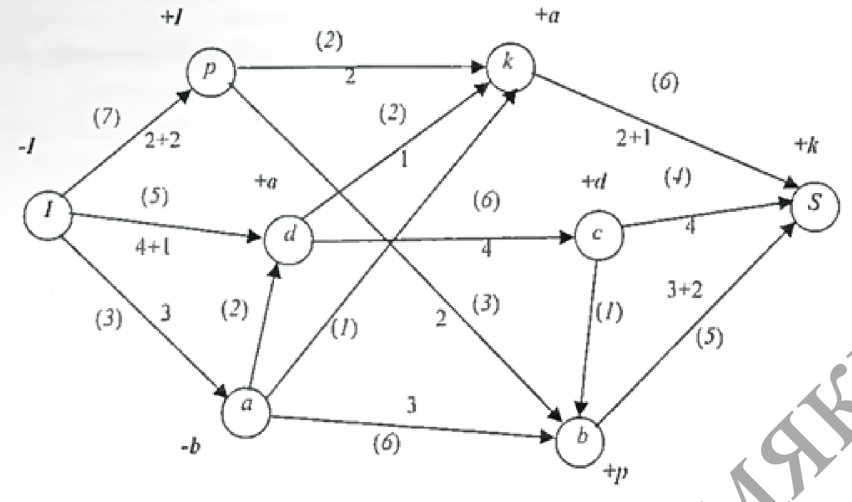

Рисунок 7

Вершина S оказалась помеченной. Значит, существует последовательность помеченных вершин от I к S: $I \to p \to b \leftarrow a \to k \to S$. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена буквой предыдущей вершины. Перераспределим поток на этом пути. Определим число δ: $\delta = \min\{7-4;\ 3-2;\ 6-3;\ 1;\ 6-3\} = \min\{3;\ 1;\ 3;\ 1;\ 3\} = 1$. Увеличиваем на 1 единицу поток на дугах, имеющих направление от I к S: $(I;p)$, $(p;b)$, $(a;k)$, $(k;S)$. Уменьшаем на 1 единицу поток на дугах, имеющих обратное направление: $(a;b)$. Получаем следующую сеть с новым сформированным потоком, который изображен на рисунок 8.

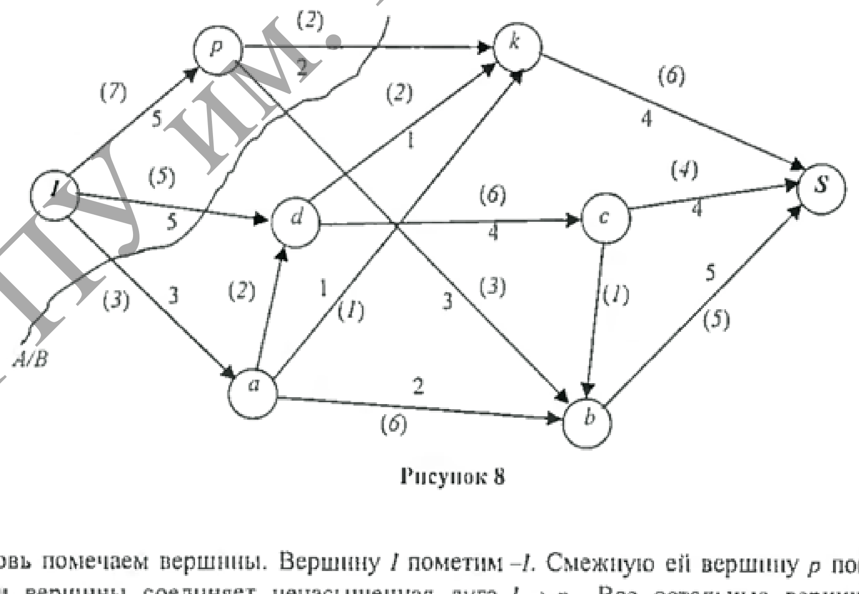

Рисунок 8

Вновь помечаем вершины. Вершину I пометим $-I$. Смежную ей вершину p помечаем $+I$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I \to p$. Все остальные вершины, в том числе и S, остаются непомеченными. Значит, поток на рисунок 8 максимальный. Этот вывод можно сделать, если рассмотреть сеть, на которой отмечены все вершины и ненасыщенные дуги (рисунок 9).

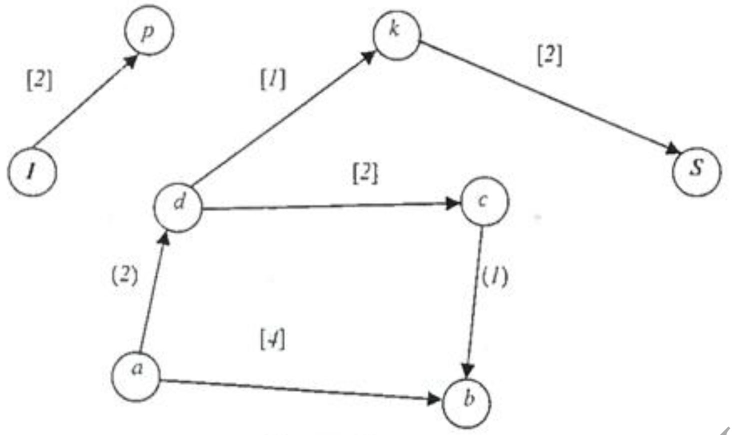

Рисунок 9

Как видно из рисунка 9, исток I и сток S не связаны дугами. Значит, поток, изображенный на рисунок 8, является максимальным.

Помеченные вершины образуют множество $A = \{I; p\}$, непомеченные – множество $B = \{a; d; k; c; b; S\}$. Разрез A/B состоит из дуг $(p; k)$, $(I; d)$, $(I; a)$, $(p; b)$ (рисунок 8). Определим значение максимального потока: $F_{max} = C_{min}(A/B) = 2 + 5 + 3 + 3 = 13$ единиц.

Выводы

В статье рассмотрено формирование максимального потока на сети в два этапа: насыщение потока и последующее перераспределение потока. Задача решена без перебора всех насыщенных путей, что дает возможность применять предложенный алгоритм к сетям с большим количеством вершин и делает сложность алгоритма степенной, а не показательной. Графическое сопровождение решения позволяет увидеть возможное наличие нескольких минимальных разрезов.

Summary

The article contains an accurate, complete and clear solution to the task of forming the maximum current in the net, based on the proof of Ford-Fulkerson's theorem.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : в 3 т. / И. В. Гайшун и [др.]. – Минск : БГЭУ, 2005. – Т. 2 : Теория вероятностей в экономике. Методы оптимизации и экономические модели. – 623 с.

2. Плотников, А. Д. Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Новое знание, 2006. – 304 с.

3. Акимов, О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – 2-е изд., доп. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.

4. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.

Поступила в редакцию 18.01.08.