Е. М. ОВСИЮК, А. В. ИВАШКЕВИЧ, А. Д. КОРАЛЬКОВ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И ДВУМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

В работе [1] была развита релятивистская модель для поля со спином 1/2 и двумя массовыми состояниями. Было показано, что в отсутствие внешних полей уравнение для фермиона $S = 1/2$ и массовыми состояниями M_1, M_2 распадается на два несвязанных уравнения Дирака. В присутствии внешних электромагнитных полей возникает сложное уравнение, в котором происходит смешивание двух биспинорных компонент. В данной работе это уравнение рассматривается в случае присутствия внешнего кулоновского поля.

В сферической системе координат

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$$

обобщенное уравнение Дирака может быть представлено в виде

$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r}\right) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M_1 + i\frac{\beta_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_1 - i\frac{\alpha_1}{r^2}\gamma^0\gamma^3\,\Psi_2 = 0,$$

$$\left[\gamma^0\left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r}\right) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M_2 - i\frac{\alpha_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right]\Psi_2 + i\frac{\beta_2}{r^2}\gamma^0\gamma^3\,\Psi_1 = 0.$$

Подстановка для волновой функции с квантовыми числами ε, j, m (используем аппарат функций Вигнера $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0)$) имеет вид

$$\Psi_1(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r}\left|\begin{matrix} f_1(r)D^j_{-m,-1/2} \\ f_2(r)D^j_{-m,+1/2} \\ f_3(r)D^j_{-m,-1/2} \\ f_4(r)D^j_{-m,+1/2} \end{matrix}\right|, \quad \Psi_2(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r}\begin{matrix} g_1(r)D^j_{-m,-1/2} \\ g_2(r)D^j_{-m,+1/2} \\ g_3(r)D^j_{-m,-1/2} \\ g_4(r)D^j_{-m,+1/2} \end{matrix}.$$

Учитывая матрицы Дирака в спинорном представлении, а также матрицу

$$\gamma^0\gamma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix},$$

получаем 8 радиальных уравнений (используем обозначение $\nu = j+1/2$):

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_3 - i\frac{d}{dr} f_3 - i\frac{\nu}{r} f_4 - M_1 f_1 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_1 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_1 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_4 + i\frac{d}{dr} f_4 + i\frac{\nu}{r} f_3 - M_1 f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_2 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_2 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_1 + i\frac{d}{dr} f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 - M_1\delta f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_3 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_3 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) f_2 - i\frac{d}{dr} f_2 - i\frac{\nu}{r} f_1 - M_1 f_4 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_4 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_4 = 0;$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_3 - i\frac{d}{dr} g_3 - i\frac{\nu}{r} g_4 - M_2 g_1 - \frac{i\alpha_2}{r^2} g_1 + \frac{i\beta_2}{r^2} f_1 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_4 + i\frac{d}{dr} g_4 + i\frac{\nu}{r} g_3 - M_2 g_2 + \frac{i\alpha_2}{r^2} g_g - \frac{i\beta_2}{r^2} f_2 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_1 + i\frac{d}{dr} g_1 + i\frac{\nu}{r} g_2 - M_2 g_3 + \frac{i\alpha_2}{r^2} g_3 - \frac{i\beta_2}{r^2}\delta f_2 = 0,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) g_2 - i\frac{d}{dr} g_2 - i\frac{\nu}{r} g_1 - M_2 g_4 - \frac{i\alpha_2}{r^2} g_4 + \frac{i\beta_2}{r^2} f_4 = 0.$$

Уравнения допускают наложение условий, вытекающих из требования диагонализации оператора пространственной четности:

$$f_3 = \delta f_2, \quad f_4 = \delta f_1, \quad \delta = \pm 1, \quad g_3 = \delta g_2, \quad g_4 = \delta g_1, \quad \delta = \pm 1.$$

Удобно случаи $\delta = +1, -1$ рассматривать по отдельности:

$\delta = +1$,

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_1 + i\frac{d}{dr} f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 - M_1 f_2 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_2 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_2 = 0,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_2 - i\frac{d}{dr} f_2 - i\frac{\nu}{r} f_1 - M_1 f_1 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_1 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_1 = 0,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) g_1 + i\frac{d}{dr} g_1 + i\frac{\nu}{r} g_2 - M_2 g_2 + \frac{i\alpha_2}{r^2} g_2 - \frac{i\beta_2}{r^2} f_2 = 0,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) g_2 - i\frac{d}{dr} g_2 - i\frac{\nu}{r} g_1 - M_2 g_1 - \frac{i\alpha_2}{r^2} g_1 + \frac{i\beta_2}{r^2} f_1 = 0;$$

$\delta = -1$,

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_1 + i\frac{d}{dr} f_1 + i\frac{\nu}{r} f_2 + M_1 f_2 + \frac{i\beta_1}{r^2} f_2 - \frac{i\alpha_1}{r^2} g_2 = 0,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}) f_2 - i\frac{d}{dr} f_2 - i\frac{\nu}{r} f_1 + M_1 f_1 - \frac{i\beta_1}{r^2} f_1 + \frac{i\alpha_1}{r^2} g_1 = 0,$$

$$(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})g_1+i\frac{d}{dr}g_1+i\frac{\nu}{r}g_2+M_2g_2-\frac{i\alpha_2}{r^2}g_2+\frac{i\beta_2}{r^2}f_2=0\,,$$

$$(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})g_2-i\frac{d}{dr}g_2-i\frac{\nu}{r}g_1+M_2g_1+\frac{i\alpha_2}{r^2}g_1-\frac{i\beta_2}{r^2}f_1=0\,.$$

Чтобы исключить присутствие мнимой единицы в уравнениях, используем другие комбинации функций:

$$f=(f_2+f_1),\qquad F=i(f_2-f_1),\qquad g=(g_2+g_1),\qquad G=i(g_2-g_1).$$

Дальше для определенности рассматриваем только случай $\delta=+1$:

$$-\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\frac{\beta_1}{r^2}\right)F+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}-M_1\right)f+\frac{\alpha_1}{r^2}G=0\,,$$

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\frac{\beta_1}{r^2}\right)f-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}+M_1\right)F-\frac{\alpha_1}{r^2}g=0\,,$$

$$-\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)G+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}-M_2\right)g-\frac{\beta_2}{r^2}F=0\,,$$

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)g-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}+M_2\right)G+\frac{\beta_2}{r^2}f=0\,. \qquad (1)$$

С помощью первых двух уравнений можно исключить функции F,g; в результате придем к системе уравнений второго порядка для функций f,G:

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left[2\frac{1+\nu}{r}+\frac{\alpha_2-\beta_1}{r^2}\right]\frac{df}{dr}+$$

$$+\ -\frac{\alpha(-2\varepsilon+M_1-M_2)}{r}+\frac{\nu^2+\alpha^2+\nu}{r^2}+\frac{\nu(\alpha_2-\beta_1)}{r^3}+\frac{-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2}{r^4}-(\varepsilon+M_2)(M_1-\varepsilon)\quad f+$$

$$+(M_1-M_2)\frac{dF}{dr}+$$

$$+\ \frac{2\varepsilon(1+\nu)+\nu(M_1+M2)+2M_1}{r}+\frac{\alpha_2M_1+2\nu\alpha+\varepsilon\alpha_2-\beta_1M_2-\varepsilon\beta_1+\alpha}{r^2}+\frac{\alpha(\alpha_2-\beta_1)}{r^3}\quad F=0,$$

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\left[2\frac{1-\nu}{r}-\frac{\alpha_2-\beta_1}{r^2}\right]\frac{dF}{dr}+$$

$$+\ (\varepsilon+M_1)(\varepsilon-M_2)+\frac{\alpha(2\varepsilon+M_1-M_2)}{r}+\frac{\nu^2-\nu+\alpha^2}{r^2}+\frac{\nu(\alpha_2-\beta_1)}{r^3}+\frac{-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2}{r^4}\quad F+$$

$$+(M_1-M_2)\frac{df}{dr}+$$

$$\frac{-\nu(M_1+M_2)+2\varepsilon(-1+\nu)+2M_1}{r}\quad\frac{(\alpha_2-\beta_1)\varepsilon-\alpha_2M_1+(2\nu-1)\alpha+\beta_1M_2}{r^2}\quad\frac{\alpha(\alpha_2-\beta_1)}{r^3}\quad f\quad 0$$

Полученная система уравнений очень сложная, задача может быть приведена к дифференциальному уравнению 4-го порядка.

Отметим, что если рассматривать уравнения (1) при достаточно больших r, то пренебрегая слагаемыми, содержащими r^{-2}, приходим к двум несвязанным подсистемам $\delta=+1$,

$$-\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}\right)F+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}-M_1\right)f=0\,,\quad -\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}\right)f-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}+M_1\right)F=0\,,$$

$$-\left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}\right)G+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}-M_2\right)g=0\,,\quad -\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}\right)g-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}+M_2\right)G=0\,;$$

т. е. получены системы уравнений для двух обычных дираковских частиц с массами M_1 и M_2 во внешнем кулоновском поле. Другими словами, это означает, что достаточно далеко от центра $r=0$ будем наблюдать две несвязанные между собой частицы с различающимися массами. Однако в этой асимптотической области линейные комбинации функций

$$c_1\,F(r)+c_2\,f(r)\,,\qquad c_1\,G(r)+c_2\,g(r)$$

должны интерпретироваться как описывающие один физический объект в состояниях с разными массами M_1 и M_2, причем соответственно с вероятностями $|c_1|^2$ и $|c_2|^2$. Это открывает возможность по-новому описывать системы, состоящие из двух фермионов в рамках теории рассеяния.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Spin 1/2 particle with two mass states: interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletjukhov, V.V. Gilewsky, E.V. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2017. Vol. 20, no. 4. – P. 404 423.