УДК 519.21

М.Д. Юдин

ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

В предыдущих работах (см., например, [1-3]) мы решали центральную предельную проблему теории вероятностей (ц. пр. пр.) для сумм d-мерных зависимых случайных векторов. Здесь метод решения ц. пр. пр. в пространстве R^d распространяется на сепарабельное пространство Гильберта, обозначаемое через H .

Вначале мы получаем достаточные условия сходимости сумм зависимых элементов пространства H к безгранично делимому распределению, логарифм характеристической функции (х. ф.) которого выражается по формуле, обобщающей формулу Колмогорова в R_1. Затем в базисе пространства H получаем явное выражение для ковариационных операторов сумм зависимых случайных элементов из H и их предельного распределения в условиях основной теоремы.

1. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}, n=\overline{1,\infty}$, – система серий случайных элементов из H , определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве, имеющих ограниченные дисперсии, $E\xi_{ns}=0$, $0\in H$, $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$, $(.,.)$ – скалярное произведение,

$\varphi_n(t)=Ee^{i(t,S_n)}$ – х. ф. суммы S_n, $t\in H$.

Обозначим: $S_{n(s,p)}=\xi_{n(s+1)}+\ldots+\xi_{np}$, $\varphi_{n(s,p)}(t)$ – х. ф. $S_{n(s,p)}$. Очевидно, справедливо формальное равенство:

$$\varphi_n(t)=\frac{\varphi_{n(0,n)}(t)}{\varphi_{n(1,n)}(t)}\cdot\frac{\varphi_{n(1,n)}(t)}{\varphi_{n(2,n)}(t)}\cdots\frac{\varphi_{n(n-1,n)}(t)}{1}.$$

Пусть B_{ns} – σ – алгебра, порожденная элементом ξ_{ns},

$$f_{ns}(t;B_{ns}) = \frac{E(\exp i(t, S_{n(s,n)})/B_{ns})}{E(\exp i(t, S_{n(s,n)}))}, \quad \varphi_{ns}(t) = E(e^{i(t,\xi_{ns})} f_{ns}(t;B_{ns})).$$

Тогда

$$\varphi_n(t) = \prod_{s=1}^{n} \varphi_{ns}(t) \cdot \tag{1}$$

Условие (А). Будем говорить, что система серий $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условию (А), если при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left|\varphi_{ns}(t) - 1\right|^2 = 0 \cdot \tag{A}$$

Лемма 1. *Если система серий $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условию* (А), *то для того чтобы х. ф. $\varphi_n(t)$ сумм S_n сходились к функции $\varphi(t)$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left(\varphi_{ns}(t) - 1\right) = \ln \varphi(t) \cdot$$

Доказательство леммы 1 совершенно аналогично доказательству леммы 1.3 в [4, 43], поэтому мы его опускаем.

2. Сделаем разбиение суммы S_n по методу Бернштейна:

$$U_{ni} = \sum_{s=(i-1)k+(i-1)m+1}^{ik+(i-1)m} \xi_{ns}, \quad V_{ni} = \sum_{s=ik+(i-1)m+1}^{ik+im} \xi_{ns}, \quad i = \overline{1,\nu}\,. \tag{2}$$

$$S_{n1} = \sum_{i=1}^{\nu} U_{ni}, \quad S_{n2} = \sum_{i=1}^{\nu} V_{ni}, \quad S_n = S_{n1} + S_{n2} \cdot$$

Здесь, не нарушая общности, можно считать, что $n = (k+m)\nu$ (см. [4], 45]).

Лемма 2. *Пусть случайная сумма $S_n = S_{n1} + S_{n2}$ и $E\left\|S_{n2}\right\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда если при $n \to \infty$ существует предельное распределение сумм S_{n1}, то такое же предельное распределение будут иметь и суммы S_n; наоборот, если существует предельное распределение сумм S_n, то такое же предельное распределение будут иметь и суммы S_{n1}.*

Доказательство. Используя неравенство Чебышева, получим для любого $\varepsilon > 0$, имея в виду, что $ES_{n2} = 0$,

$$P\left\{\left\|S_{n2}\right\| > \varepsilon\right\} \le \frac{E\left\|S_{n2}\right\|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left\|S_{n2}\right\| > 0\right\} = 0$. Пусть $\mathcal{B}(H)$ – борелевская σ-алгебра пространства H и $B \in \mathcal{B}(H)$. Из очевидных включений

$$\{S_n \in B\} \subset \{S_{n1} \in B\} \cup \left\{\left\|S_{n2}\right\| > 0\right\},$$

$$\{S_{n1} \in B\} \subset \{S_n \in B\} \cup \left\{\left\|S_{n2}\right\| > 0\right\}$$

получаем:

$$P\{S_{n1}\in B\}-P\{\|S_{n2}\|>0\}\le P\{S_n\in B\}\le P\{S_{n1}\in B\}+P\{\|S_{n2}\|>0\},$$

$$P\{S_n\in B\}-P\{\|S_{n2}\|>0\}\le P\{S_{n1}\in B\}\le P\{S_n\in B\}+P\{\|S_{n2}\|>0\}.$$

Отсюда следует доказательство леммы 2.

3. Пусть μ_n – вероятностная мера в H суммы S_n, $\mathbf{B}_n^*$ – ковариационный оператор суммы S_n, т. е. оператор, определяемый равенством

$$(\mathbf{B}_n^*t,t)=\int_H (t,x)^2\,\mu_n(dx).$$

Обозначим через $L(H)$ множество неотрицательно определенных ядерных симметрических операторов $\mathbf{R}$ на H, таких, что $\sup tr\mathbf{R}<\infty$.

Как известно, для того чтобы последовательность мер μ_n слабо сходилась к мере μ, необходимо и достаточно, чтобы

а) множество операторов $\{\mathbf{B}_n^*, n=1,2,\dots\}$ было компактным в $L(H)$;

б) для всех $t\in H$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_H e^{i(t,x)}\mu_n(dx)=\int_H e^{i(t,x)}\mu(dx)$$

(см., например, [6, 457]).

Пусть μ_{ns} – вероятностные меры элементов ξ_{ns} в H, $\mathbf{A}_n$ – оператор, определяемый равенством

$$(\mathbf{A}_n t,t)=\sum_{s=1}^{n}\int_{\|x\|\le\varepsilon}(t,x)^2\,\mu_{ns}(dx),$$

$\mathbf{C}_n$ – оператор, определяемый равенством

$$(\mathbf{C}_n t,t)=\sum_{s\ne q}E\big((t,\xi_{ns}),(t,\xi_{nq})\big).$$

Определим меру $K_n(B)$ на $\mathcal{B}(H)$, $B\in\mathcal{B}(H)$, равенством

$$K_n(B)=\sum_{s=1}^{n}\int_B\|x\|^2\,\mu_{ns}(dx).$$

Мы предполагаем, что $\forall n\ K_n(H)<\infty$, и если $K_n(B)\xrightarrow{\text{сл.}}K(B)$ на H, то $K(H)<\infty$.

Заметим, что мера Леви

$$G(B)=\int_B\frac{1}{\|x\|^2}K(dx),\quad G(\theta)=0,$$

где из области интегрирования исключен нуль-элемент θ пространства H, которой является спектральной мерой, поскольку

$$\int_H\frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2}G(dx)<\infty$$

[5, теорема 3.3, 188]. Поэтому $\exp\int_H\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)G(dx)=$

$=\exp\int_H\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{\|x\|^2}K(dx)$ – х. ф. [5, опр. 2.1, стр. 160], которая отличается от х. ф., используемой в [5], возможно на сдвиг, т.е. на вырожденный компонент.

Ниже $h(n)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$ [7].

Теорема 1. *Пусть случайные элементы системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{\frac{1}{8}-\rho}$ *зависимые, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0<\rho\le\frac{1}{8}$, *множество операторов* $\{\mathbf{B}_n^*, n=1,2,\ldots\}$ *компактно в* $L(H)$, *кроме того, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n\ge n_0$.

$$\max_s E\|\xi_{ns}\|^2\le\frac{H_1h(n)}{n},\quad \max_{s,p,q}E\left(\|\xi_{ns}\|\cdot\|\xi_{np}\|\cdot\|\xi_{nq}\|\right)\le\frac{H_2h(n)}{n^{\frac{3}{2}}},\tag{3}$$

где $0\le|p-s|\le m_n$, $0<|q-s|\le m_n$. *Тогда если*

$$K_n(B)\xrightarrow{\text{сл.}}K(B)<\infty,\tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}(\mathbf{A}_n+\mathbf{C}_n)=\mathbf{B},\tag{5}$$

то суммы S_n *при* $n\to\infty$ *будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi(x)=\int_H\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{\|x\|^2}K(dx)-\frac{(\mathbf{B}t,t)}{2},\tag{6}$$

где из области интегрирования исключен нуль-элемент.

Доказательство. Возьмем в разбиении (2) $k=[m_0n^{\frac{1}{4}-\rho}]$, $m=[m_0n^{\frac{1}{8}-\rho}]$, $0<\rho\le\frac{1}{8}$.

1. При таком разбиении $E\|S_{n2}\|^2\to 0$ при $n\to\infty$. Действительно, в силу условия (3), центрированности элементов ξ_{ns} и независимости частей V_{ni}, $i=\overline{1,\nu}$,

$$E\|S_{n2}\|^2=E(S_{n2},S_{n2})=\sum_{i=1}^{\nu}E\|V_{ni}\|^2\le\frac{H_1\nu m^2h(n)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Следовательно, по лемме 2 предельные распределения сумм S_n и S_{n1} совпадают.

2. Выпишем элементы, вышедшие при разбиении (2) в части U_{ni} в порядке возрастания их индексов. Получим систему серий

$$\eta_{n1},\eta_{n2},\ldots,\eta_{nl},\ l=\nu k.\tag{7}$$

Обозначим для системы (7): $S_{n(j,p)}=\eta_{n(j+1)}+\eta_{n(j+2)}+\ldots+\eta_{np}$. Пусть $p=p(s)$ – индекс последнего элемента η_{np} той части U_{ni} разбиения (2), в которую вошел элемент η_{nj}. Так как части U_{ni} и U_{nj}, $i \neq j$ независимы, то в функциях $f_{nj}(t, B_{nj})$ для системы (7) можно сделать сокращения, и мы получим

$$f_{nj}(t, B_{nj}) = \frac{E(\exp i(t, S_{n(j,p)})/B_{nj})}{E(\exp i(t, S_{n(j,p)}))},$$

где B_{nj} – σ-алгебра, порожденная η_{nj}.

Покажем, что функции $\varphi_{nj}(t) = E(e^{it\eta_{nj}} f_{nj}(t, B_{nj}))$ системы (7) удовлетворяют условию (А).

Так как $E\eta_{nj} = 0$, то из (3) следует

$$\left|E(\exp i(t, S_{n(j,p)}) - 1)\right| \le \frac{E(t, S_{n(j,p)})^2}{2n} \le \frac{\|t\|^2 E\|S_{n(j,p)}\|^2}{2n} \le \frac{\|t\|^2 H_1 k^2 h(n)}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|E\left(\exp i(t, S_{n(j,p)})\right)\right| \ge 1 - \frac{\|t\|^2 H_1 k^2 h(n)}{2n} = Q_n, \tag{8}$$

где $Q_n \to 1$ при любом фиксированном *t*, когда $n \to \infty$. Далее из определения $\varphi_{nj}(t)$ для системы (7) получаем

$$\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right| \le \frac{1}{Q_n}\left|E\left((e^{i(t,\eta_{nj})} - 1)e^{i(t,S_{n(j,p)})}\right)\right| \le \frac{\|t\|^2\left(E\|\eta_{nj}\|^2 + E\|\xi_{nj}\|\|S_{n(j,p)}\|\right)}{Q_n}.$$

Отсюда соотношения

$$\sum_{j=1}^{l}\left(E\|\eta_{nj}\|^2\right)^2 \le \frac{H_1^2 k\nu h^2(n)}{n^2} \to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{l}\left(E\|\eta_{nj}\|\|S_{n(j,p)}\|\right)^2 \le \frac{H_1^2 \nu k^3 h^2(n)}{n^2} \to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{l} E\|\eta_{nj}\|^2 E\|\eta_{nj}\|\|S_{n(j,p)}\| \le \frac{H_1^2 \nu k^2 h^2(n)}{n^2} \to 0.$$

При $n \to \infty$ следует, что система (7) удовлетворяет условию (А), т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|^2 = 0.$$

3. Пусть μ_{nj} – вероятностная мера элемента η_{nj} системы (7). Так как $Ef_{nj}(t, B_{nj}) = 1$, то

$$\sum_{j=1}^{l}\left(\varphi_{nj}(t) - 1\right) = \sum_{j=1}^{l}\int_H\left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right)f_{nj}(t; B_{nj})\mu_{nj}(dx) + i\left(t, a_l(t)\right),$$

где $\left(t, a_\ell(t)\right) = \sum_{j=1}^{\ell} E\left(\left(t, \eta_{nj}\right)f_{nj}\left(t, B_{nj}\right)\right)$. Оценим разность сумм:

$$I_1 = \sum_{j=1}^{l}\int_H\left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right)f_{nj}(t; B_{nj})\mu_{nj}(dx)$$

и

$$I_2 = \sum_{j=1}^{l} \int_H \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right) \mu_{nj}(dx).$$

Имеем, используя (3), (8) и неравенство $\left| e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right| \le \frac{(t,x)^2}{2}$,

$$|I_1 - I_2| \le \sum \int_H \left| e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right| \left| f_{nj}(t; B_{nj}) - 1 \right| \mu_{nj}(dx) \le$$

$$\le \frac{\|t\|^3}{Q_n} \sum_{j=1}^{l} \left(E\left(\|\eta_{nj}\|^2 \|S_{n(j,p)}\| \right) + E\|\eta_{nj}\|^2 \, E\|S_{n(j,p)}\| \right) \le$$

$$\le \frac{\|t\|^3 \nu k}{Q_n} \left(\frac{H_2 k h(n)}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{H_1^{\frac{3}{2}} k h^{\frac{3}{2}}(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{l} \left(\varphi_{nj}(t) - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{l} \int_H \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right) \mu_{nj}(dx) + i\left(t, a_l(t)\right) \right). \qquad (9)$$

4. Выделим нормальную часть в сумме соотношения (9). Имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| \le \varepsilon} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right) \mu_{nj}(dx) = \sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| \le \varepsilon} \left(-\frac{(t,x)^2}{2} - i\frac{(t,x)^3}{6}\theta_{nj} \right) \mu_{nj}(dx), \ |\theta_{nj}| \le 1.$$

Здесь, по условию (4),

$$\left| -i \sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| \le \varepsilon} \frac{(t,x)^3}{6} \theta_{nj} \, \mu_{nj}(dx) \right| \le \|t\|^3 \varepsilon \sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| \le \varepsilon} \|x\|^2 \mu_{nj}(dx) \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ \varepsilon \to 0}]{} 0,$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| \le \varepsilon} (t,x)^2 \mu_{nj}(dx) = -\frac{\left(\mathbf{A}_n^* t, t \right)}{2},$$

где $\mathbf{A}_n^*$ – оператор, относящийся к сумме S_{n1}. Но, поскольку, согласно условию (3),

$$E\left(t, S_{n2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu} E\left(t, \upsilon_{ni}\right)^2 \le \|t\|^2 \frac{H_1 \nu m^2 h(n)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad (10)$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \mathbf{A}_n^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \mathbf{A}_n, \qquad (11)$$

где $\mathbf{A}_n$ – оператор, определенный перед формулировкой теоремы.

Далее из свойств интеграла Стилтьеса следует, что

$$\sum_{j=1}^{l} \int_{\|x\| > \varepsilon} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right) \mu_{nj}(dx) = \int_{\|x\| > \varepsilon} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x) \right) \frac{1}{\|x\|^2} K_n^*(dx), \qquad (12)$$

где $K_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_B \|x\|^2 \mu_{nj}(dx)$. Так как подынтегральная функция в (12) стремится к нулю при $\|x\| \to \infty$, то можно сделать предельный переход под знаком интеграла [5, замечание 4.2, 51]. Кроме того, для элементов, вышедших при разбиении (2), в S_{n2} $\sum_{i=1}^{m\nu} \int_H \|x\|^2 \mu_{ni}(dx) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому из (11) и (12) получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} I_1 = \int_H \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right) \frac{1}{\|x\|^2} K(dx) - \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{(\mathbf{A}_n t, t)}{2}, \qquad (13)$$

где из области интегрирования исключен ноль-элемент.

5. Теперь из равенства (9) выделим ту часть предельного распределения сумм S_{n1}, которая появляется как результат зависимости между слагаемыми элементами. Имеем:

$$(t, a_\ell(t)) = \sum_{j=1}^{\ell} E\left((t, \eta_{nj}) f_n(t, B_{nj})\right).$$

Здесь числитель

$$E\left((t, \eta_{nj}) e^{i(t, S_{n(j,p)})}\right) = \sum_{j=1}^{l} E\left((t, \eta_{nj}) \left\{1 + i(t, S_{n(j,p)}) - \frac{(t, S_{n(j,p)})^2}{2} \theta_{nj}\right\}\right).$$

$$|\theta_{nj}| \le 1.$$

Поскольку $E(t, \eta_{nj}) = 0$,

$$\sum_{j=1}^{l} E\left|(t, \eta_{nj})(t, S_{n(j,p)})^2\right| \le \frac{\|t^3\| H_2 \nu k^3 h(n)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

знаменатель $Q_n \to 1$ (см. (8)), то

$$\lim_{n \to \infty} (t, a_\ell(t)) = \lim_{n \to \infty} (\mathbf{C}_n^* t, t),$$

где оператор $\mathbf{C}_n^*$ определяется соотношением

$$(\mathbf{C}_n^* t, t) = \sum_{j=1}^{l} E\left((t, \eta_{nj})(t, S_{n(j,p)})\right).$$

Кроме того, как нетрудно видеть, благодаря (3), при разбиении (2)

$$\left|\sum_{i,k} E(t, V_{ni})(t, U_{nk})\right| \le \frac{2\|t\|^2 H_1 \nu m^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\lim (\mathbf{C}_n^* t, t) = \frac{1}{2} \lim (\mathbf{C}_n t, t), \qquad (14)$$

где $\mathbf{C}_n$ – оператор, определенный перед формулировкой теоремы.

6. Пусть $\mathbf{B}_{n1}^*$ – ковариационный оператор суммы S_{n1}. Из (10) следует, что из компактности множества ковариационных операторов $\mathbf{B}_n^*$ в $L(H)$ следует компактность множества ковариационных операторов $\mathbf{B}_{n1}^*$ сумм S_{n1}. С другой стороны, для сумм S_{n1} из (11), (13) и (14) получим

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{l} \left(\varphi_{nj}(t) - 1\right) = \int_H \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right) \frac{1}{\|x\|^2} K(dx) - \frac{(\mathbf{B} t, t)}{2}, \qquad (15)$$

где $\mathbf{B} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n)$.

Теперь из лемм 1 и 2, а также замечания, сделанного в начале п. 3°, следует, что в условиях теоремы 1 суммы S_n будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого выражается по формуле (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Выберем в H ортонормированный базис, и пусть в этом базисе $\xi_{ns} = \left(\xi_{ns}^{(1)}, \xi_{ns}^{(2)}, \ldots\right)$. Из определения оператора $\mathbf{A}_n$ следует, что он выражается через бесконечную симметричную неотрицательно определенную матрицу:

$$\mathbf{A}_n = \left(a_{n(i,j)}\right), \text{ где } a_{n(i,j)} = \sum_{s=1}^{n} E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)}; \|\xi_{ns}\| \le \varepsilon\right), \varepsilon > 0, i, j = \overline{1,\infty}.$$

Оператор $\mathbf{C}_n$ также выражается через симметричную матрицу $\mathbf{C}_n = \left(c_{n(i,j)}\right)$, где $c_{n(i,j)} = \sum\limits_{s \ne p} E\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}$. Причем, элементы матрицы $\mathbf{C}_n$, как и матрицы $\mathbf{A}_n$, можно вычислять в ε-окрестности нуля, поскольку при любом $\varepsilon > 0$ по условию (3)

$$\left|\sum_{j=1}^{l} E\left((t, \eta_{nj})(t, S_{n(j,p)}); \|\eta_{nj} > \varepsilon\|\right)\right| \le \frac{\|t\|^2}{\varepsilon} \sum E\left(\|\eta_{nj}\|^2 \|S_{n(j,p)}\|\right) \le$$

$$\le \frac{\|t\|^2}{\varepsilon} \cdot \frac{H_2 \nu k^2 h(n)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Поэтому можно считать, что $c_{n(i,j)} = \sum\limits_{0 < |s-p| \le k} E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}; \|\xi_{ns}\| \le \varepsilon, \|\xi_{np}\| \le \varepsilon\right)$.

Следовательно, если матрица $\mathbf{B}_n^{**}$ имеет элементы

$$b_{n(i,j)} = \sum_{0 \le |s-p| \le k} E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}; \|\xi_{ns}\| \le \varepsilon, \|\xi_{np}\| \le \varepsilon\right), \text{ то в (15) } B = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} B_n^{**}.$$

Замечание 2. Множество операторов $\mathbf{B}_n^*$ отличается от множества операторов $\mathbf{B}_n$, $n = \overline{1,\infty}$ тем, что оператор $\mathbf{B}_n^*$ охватывает не только «нормальную часть» формулы (6), но и ее «пуассоновскую часть», заключенную в интеграле. Кстати, ясно, что при рассмотрении интеграла в формуле (6) в условиях теоремы 1 случайные элементы ξ_{ns} при каждом n можно считать независимыми и, следовательно, применять результаты, полученные для предельных распределений сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта.

Литература

1. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1994. – № 3. – С. 31 – 35.
2. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 19 – 23.
3. Юдин М.Д. О необходимых условиях сходимости распределений сумм зависимых случайных векторов // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 34 – 37.
4. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск, 1990.
5. Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. – М., 1984.
6. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1985.
7. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М., 1965.

Summary

The central limiting problem of probability theory for the summs of dependent random elements with restricted variances is solved in separable Hilbert space.

Поступила в редакцию 12.09.05.