УДК 519.240

Н.В. Сергиевич, М.Д. Юдин

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ОСНОВАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗВЕЗДНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В [1] нами предложен метод вероятностного моделирования процессов деформаций с зависимыми приращениями, идущими вдоль прямой на плоскости. Здесь предлагается метод вероятностного моделирования звездных деформаций с зависимыми приращениями на плоскости. Идеи этого метода апробированы в Институте механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАНБ, г. Гомель [2]. После апробирования [2] нами внесены существенные уточнения в математическую часть.

Как и в [1], мы будем пользоваться базовыми теоремами, опубликованными в [3–5].

Теоретическая часть. В [3-5] было найдено общее представление логарифма х. ф. предельного распределения суммы зависимых случайных векторов.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий d – мерных случайных векторов с ограниченными дисперсиями, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\ldots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $M\xi_{ns}^{(i)}=0$, $t=(t_1,\ldots,t_d)$, $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(d)})$, $S_n=\sum_s \xi_{ns}$, матрица $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|p-s|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\left|\xi_{ns}\right|\le\varepsilon\Lambda\left|\xi_{np}\right|\le\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$, $K_n(x)=\sum\limits_{s=1}^{n}M(\xi_{ns}^2;\xi_{ns}<x)$, где $\xi_{ns}<x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)}<x^{(i)}$, $i=\overline{1,d}$ [6].

В работе [4] показано, что в довольно естественных условиях, когда $K_n(x)\xrightarrow{\text{сл.}}K(x)$ при $n\to\infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lim\limits_{n\to0}B_n=B$, сумма S_n будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого

$$\psi(t)=\int_{R^d}(e^{i(t,x)}-1-i(t,x))\frac{1}{x^2}dK(x)-\frac{(t,Bt^*)}{2}, \tag{1}$$

где из области интегрирования исключен нуль–вектор, (t, •) — скалярное произведение, t^* — вектор–столбец.

Математика моделирования. Пусть $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^{n}$ — серия двумерных приращений размера деформации на плоскости за время $\Delta\tau_{ns}$, $\eta_{ns}=\left(\eta_{ns}^{(1)},\eta_{ns}^{(2)}\right)$. Тогда $\ell=\sum\limits_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ - пробег деформации за некоторое время $\tau=\sum\limits_{s=1}^{n}\Delta\tau_{ns}$. Положим $\xi_{ns}=\eta_{ns}-M\eta_{ns}$.

Как и в одномерном случае [7; 8], мы придерживаемся концепции, что приращения деформаций делятся на два типа по величине и частоте встречаемости [1]. Большинство приращений имеют относительно малую величину, фактор прорыва стопоров вызывает появление относительно редких значительно больших приращений.

Наличие относительно больших приращений в направлении полупрямой $x=kx_i$, $k\ge0$, $x_i=\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)}\right)$ выражается условием: для любой δ-окрестности υ_i точки x_i, $\delta\in\left(0,|x_i|\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_s\int_{\upsilon_i}x^2dP\{\xi_{ns}\le x\}=\lambda_i>0. \tag{2}$$

Наличие большого числа относительно малых приращений выразится в том, что при любом

$\varepsilon \in (0, |x_i|)$,

$$\sum_s M(\xi_{ns}^2; |\xi_{ns}| \le \varepsilon) \longrightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$$

(значения σ_1^2 и σ_2^2 войдут соответственно в предел матрицы B_n).

Зависимость между приращениями отразится в тех частях элементов $b_{n(i,j)}$ матрицы B_n, которые складываются при $s \ne p$.

И, наконец, при любых δ, $\varepsilon \in (0, |x_i|)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_s \int_{\overline{\upsilon_0 \cup \upsilon_i}} x^2 dP\{\xi_{ns} \le x\} = 0, \tag{3}$$

где υ_0 -- ε-окрестность точки (0,0).

Естественно предположить, что $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$ — n-я серия теоретической системы серий, которая получается при неограниченном дроблении времени разрушения: $\max_s \Delta\tau_{ns} \to 0$, $n \to \infty$, и что система серий $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условиям основной теоремы из работы [4], т.е. что сумма $S_n = \sum_s \xi_{ns}$ имеет предельное распределение, логарифм х.ф. которого выражается формулой (1), где

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из формулы (1) и условий (2)-(4) следует, что сумма S_n будет иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого

$$\psi_i(t) = \lambda_i \left(e^{i(t,x_i)} - 1 - i(t, x_i)\right) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \tag{5}$$

где $t = (t_1, t_2)$. Если при этом $\sum M\eta_{ns} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_0$, $\ell_0 = \left(\ell_0^{(1)}, \ell_0^{(2)}\right)$, то из (5) получим, что продвижение деформации ℓ при $\max_s \Delta\tau_{ns} \longrightarrow 0$ будет иметь предельную теоретическую плотность вероятности

$$p_i(x) = \frac{e^{-\lambda_i}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_q^{\ m}}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_q, \quad B^{-1} y_q^*\right)\right\}, \tag{6}$$

где $y_q = x - (\ell_0 - \lambda_i x_i) - mx_i$, y_q^* — вектор–столбец, B^{-1}–матрица, обратная матрице B.

Пусть на плоскости $(x^{(1)}Ox^{(2)})$ расположены ν точек $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$, отличных от нуля и из которых никакие две не лежат на одной прямой, проходящей через точку O, $i = \overline{1, \nu}$. Тогда по направлению каждой из прямых $x=kx_i$, $k\ge 0$, $i = \overline{1, \nu}$, мы можем получить теоретическую плотность вероятности, определяемую равенством (6). Придавая каждому из направлений некоторый вероятностный вес q_i, $\sum_i q_i = 1, i = \overline{1, \nu}$ и считая, что плотности $p_i(x)$ зависимы от направлений через λ_i и y_i, мы по формуле полной вероятности получим теоретическую плотность вероятности звездной деформации

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\nu} q_i p_i(x). \tag{7}$$

Нами получены компьютерные изображения плотностей (7) при различных значениях ν, q_i,

λ_i и элементов матрицы $B^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Например, на рис. 1 дано изображение теоретической плотности вероятности (7) при $\nu = 4$, $\lambda_1 = 2{,}5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3{,}5$, $\lambda_4 = 4{,}5$, $b_{11} = b_{22} = 4$, $b_{12} = b_{21} = 1$, $\ell_0=1$, $q_i = \frac{1}{4}, i = \overline{1,4}$. На рис. 2 — при $\nu = 5$, $\lambda_i = 2, i = \overline{1,5}$, $b_{11} = b_{22} = 4$, $b_{12} = b_{21} = 1$, $\ell_0=1$, $q_i = \frac{1}{5}, i = \overline{1,5}$.

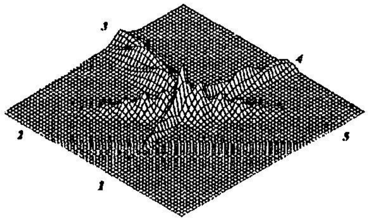

Рис.1

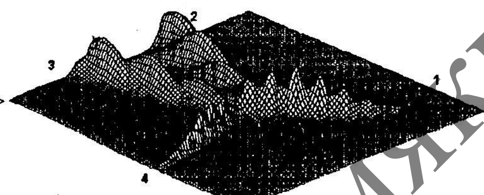

Рис. 2

Исследование роли параметров и компьютерное варьирование показали, в частности, что при увеличении параметра λ_i число вершин по i–му направлению увеличивается и наибольшие из них смещаются дальше от начала координат; при уменьшении λ_i, наоборот, число вершин уменьшается и они смещаются к началу координат. При уменьшении дисперсионных и корреляционных параметров между вершинами появляются "проталины", при увеличении – вершины сглаживаются.

Если добиться такого подбора параметров звездной деформации, при которых поверхность теоретической плотности (7) будет адекватна экспериментальной поверхности, то подобранные параметры дадут, вообще говоря, новые характеристики исследуемого материала.

Литература

1. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. Сложное пуассоновское распределение в моделировании некоторых деформаций // Весн. Мазыр. дзярж. пед. ін-та імя Н.К. Крупскай.– 1999. – №2.– С.26–30.

2. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С.В. Локализация дефектов в твердых телах. Часть 1. Вероятностная модель поверхностного разрушения кристаллов// Материалы. Технологии. Инструменты.–1999. – №3. – С.5–8.

3. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – №3. – С.31-35.

4. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Колмогорова на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика.–1999. –№4.– С.61-64.

5. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – №4. – С.19-23.

6. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

7. Башмаков В.И., Чикова Т.С., Юдин М.Д. Распределение трещин по размерам в кристаллических телах // ДАН БССР. – 1983. – Т.27, №4.– С.326-328.

8. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Мн.: Университетское, 1990. – 254 с.

Summary

The method of simulation of star-shaped strains with dependent increments is offered.