УДК 519.240

М.Д. Юдин

АППРОКСИМАЦИЯ В МЕТРИКЕ П. ЛЕВИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ М-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

Рассматривается случай, когда сумма ковариаций усеченных случайных величин положительна. Известно (см., например, [1-4]), что если предел суммы ковариаций случайных величин или их усечений положителен, то он поставляет в предельное распределение суммы этих величин нормальный компонент. Это обстоятельство используется в данной работе.

1^0. Пусть $\{x_{nq}\}_{q=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий случайных величин, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве и имеющих конечные математические ожидания (м. о.).

Положим

$$\overline{x}_{nq}=\begin{cases} x_{nq}, & |x_{nq}|\le H_0, \\ 0, & |x_{nq}|>H_0, \end{cases} \qquad \overline{\overline{x}}_{nq}=\begin{cases} 0, & |x_{nq}|\le H_0, \\ x_{nq}, & |x_{nq}|>H_0, \end{cases}$$

где $H_0>0$ – постоянное число. Обозначим $\eta_{nq}=x_{nq}-M\overline{x}_{nq}$, $\overline{\eta}_{nq}=\overline{x}_{nq}-M\overline{x}_{nq}$, $\overline{\overline{\eta}}_{nq}=\overline{\overline{x}}_{nq}$, $S_n=\sum_{q=1}^{n}\eta_{nq}$, $\overline{S}_n=\sum_{q=1}^{n}\overline{\eta}_{nq}$, $\overline{\overline{S}}_{nq}=\sum_{q=1}^{n}\overline{\overline{\eta}}_{nq}$.

Очевидно, $S_n=\overline{S}_n+\overline{\overline{S}}_n$.

Сделаем разбиение суммы S_n по методу Бернштейна:

$$u_{ni}=\sum_{q=(i-1)m+(i-1)k+1}^{(i-1)m+ik}X_{nq},\quad v_{ni}=\sum_{q=(i-1)m+ik+1}^{im+ik}X_{nq},\ i=\overline{1,\nu},\quad k=[n^{\rho}], \tag{1}$$

$0<\rho<1/4$, $S_{n1}=\sum_{i=1}^{\nu}u_{ni}$, $S_{n2}=\sum_{i=1}^{\nu}v_{ni}$. Тогда $S_n=S_{n1}+S_{n2}$. Можно считать, что n кратно k+m (см.[1], §1.10)). Ниже рассматриваются m-зависимые серии случайных величин [1].

Выпишем величины η_{nq}, вошедшие при разбиении (1) в S_{n1}, в порядке возрастания их индексов. Получим систему серий

$$\xi_{n1},\xi_{n2},\cdots\xi_{n\ell},\quad \ell=\nu k,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{2}$$

Положим для системы (2)

$$\psi_n(x)=\sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2};\xi_{ns}\le x\right),$$

$$a_n=\sum_s M\frac{\xi_{ns}}{1+\xi_{ns}^2},\qquad b_n=\sum_{0<|s-q|\le m}M\overline{\xi}_{ns}\overline{\xi}_{nq},$$

$$\psi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\psi_n(x)+ita_n-\frac{b_nt^2}{2}. \tag{3}$$

Согласно результатам, полученным при решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых случайных величин [1-4], распределение, логарифм характеристической функции (х.ф.) которого выражается по формуле (3), сыграет роль сопровождающего для распределения суммы S_n.

Далее $F_n(x)$ — функция распределения (ф.р.), логарифм х.ф которой выражается формулой (3). Через $\mathcal{B}_{ns}$ обозначим σ-алгебру величины η_{ns}.

Теорема. Пусть величины системы серий $\{\eta_{nq}\}_{q=1}^{n}, n=\overline{1,\infty}$, *m*-зависимы, найдутся постоянные c, $H_0>0$, H_1, H_2 такие, что при $H \geq H_0$

$$\max_{p,s}\sup P\left\{\left|\overline{\eta}_{np}\right| \geq H/B_{ns}\right\} \leq \frac{c}{H^{\alpha}n},$$

$$\max_{q} M\overline{\eta}_{ns}^{2} \leq \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{p,q,s} M\left|\overline{\eta}_{ns}\overline{\eta}_{np}\overline{\eta}_{nq}\right| \leq \frac{H_2}{n^{3/2}},$$

где $1<\alpha \leq 2$, $0<p-s\leq[n^{\rho}]$, $0\leq|q-s|\leq[n^{\rho}]$. Тогда, если $b_n \geq \sigma^2 > 0$, $|a_n + ib_n| < \infty$, то найдется n_0 такое, что при $n \geq n_0$ и любом фиксированном $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство

$$F_n(x-\varepsilon+0)-\delta_n \leq P\{S_n \leq x\} \leq F_n(x+\varepsilon+0)+\delta_n,$$

где $\delta_n = \frac{H_1 m^2}{n^{\rho}\varepsilon^2} + \frac{cm}{H_0^{\alpha}n^{\rho}} + \frac{c_0}{n^{1/2-2\rho}}$, c_0-независимая от n постоянная.

2⁰. Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим вспомогательную лемму. Пусть $S_{n(s,p)} = \xi_{n(s+1)} \cdots + \xi_{np}$, $S_{n(p,p)} \equiv 0(\mathrm{mod}P$, где p=p(s) — индекс последней величины ξ_{np} той части u_{ni}, в которую вошла ξ_{ns}, B_{ns} — σ-алгебра, порожденная ξ_{ns},

$$f_{ns}(t,B_{ns}) = \frac{M(\exp itS_{n(s,p)}/B_{ns}}{M(\exp itS_{n(s,p)})},$$

$$\alpha_n(t) = \sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}}{1+\xi_{ns}^2}f_{ns}(t,B_{ns})\right),$$

$$Q_n(t,x) = \sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2}f_n(t,B_{ns}), \xi_{ns} \leq x\right),$$

$$\varphi_{ns}(t) = \sum_s M\left(e^{it\xi_{ns}}f_{ns}(t,B_{ns})\right).$$

Очевидно, х.ф. суммы S_{nl}

$$\varphi_n(t) = \prod_{s=1}^{\ell}\varphi_{ns}(t),$$

Как показано в [1] (стр. 53 и 106), если $q_n(t) = \ln\varphi_n(t$ и $|\varphi_{ns}-1|<1$, то

$$q_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d_xQ_n(t,x) + it\alpha_n(t) + \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}(\varphi_{ns}-1)^r. \tag{4}$$

Лемма. Пусть величины системы серий $\{\eta_{nq}\}$ *m*- зависимы, найдутся постоянные *c*, $H_0>0$, H_1, H_2 такие, что при $H \geq H_0$

$$\max_{p,s}\sup P\left\{\left|\xi_{np}\right| \geq H/B_{ns}\right\} \leq \frac{c}{H^{\alpha}n} \tag{5}$$

$$\max_{s} M\overline{\xi}_{nq}^{2} \leq \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{p,q,s} M\left|\overline{\xi}_{ns}\overline{\xi}_{np}\overline{\xi}_{nr}\right| \leq \frac{H_2}{n^{3/2}}, \tag{6}$$

где $1<\alpha\le 2$, $0<|p-s|\le n^{\rho}$, $0\le|q-s|\le n^{\rho}$. Тогда найдется n_0 такое, что при $n\ge n_0$ и $|t|\le\frac{1}{\sqrt{4H_1}}n^{1/2-2\rho}$

будет выполняться неравенство

$$\sup_n|q_n(t)-\psi_n(t)|\le\frac{B_n(t)|t|}{n^{1/2-2\rho}},\tag{7}$$

где $B_n(t)$- многочлен второй степени относительно $|t|$, коэффициенты которого положительны и разве лишь убывают с ростом n.

Доказательство. Из условия (5) (сравните с условием притяжения к устойчивому распределению с показателем $\alpha<2$ [1](стр. 35))следует, что

$$M\left(\left|\overline{\xi}_{np}\right|/B_{ns}\right)\le\frac{2c}{n}\int_{H_0}^{\infty}\left|xd\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\right|=\frac{2c}{n(\alpha-1)H_0^{\alpha-1}}=\frac{c_1}{H_0^{\alpha-1}n}\tag{8}$$

Далее через $\overline{M}$ будем обозначать м.о. функций величин ξ_{ns}, взятых по множеству, на котором для величин, вошедших под знак м.о., выполняется неравенство $|x_{ns}|\le H_0$, через $\overline{\overline{M}}$- м.о. взятое по дополнениям и множеству, на котором взято $\overline{M}$. Аналогично одной чертой сверху будем обозначать функции величин ξ_{ns}, двумя- величин $\overline{\overline{\xi}}_{ns}$.

Из (5) и (6) следует, что

$$\left|M\left(e^{itS_{n(s,p)}}-1\right)\right|\le\overline{M}\left(e^{itS_{n(s,p)}}-1\right)+\left|\overline{\overline{M}}\left(e^{itS_{n(s,p)}}-1\right)\right|\le\frac{t^2}{2}\frac{H_1k^2}{n}+\frac{2ck}{H_0^{\alpha}n}\le\frac{H_1t^2}{2n^{1-2\rho}}+\frac{2c}{H_0^{\alpha}n^{1-\rho}}.$$

Значит, при $|t|\le An^{1/2-\rho}$, где $A^2\le\frac{1}{4H_1}$ будет выполняться неравенство: $|M(\exp itS_{n(s,p)})|\ge\frac{1}{2}$, когда $n\ge n_0'$.

Заметив, что $\left|\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\right|\le\frac{t^2}{2}+|tx|$, оценим величину

$$R_{n1}=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\left(d_xQ_n(t,x)-d\psi_n(x)\right)\right|$$

Имеем

$$R_{n1}\le\frac{t^2}{2}\left(\sum_s\overline{M}\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2}|f_{ns}-1|\right)+\sum_s\overline{\overline{M}}\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2}|f_{ns}-1|\right)\right)+$$
$$+|t|\left(\sum_s\overline{M}\left(\frac{|\xi_{ns}^3|}{1+\xi_{ns}^2}|f_{ns}-1|\right)+\sum_s\overline{\overline{M}}\left(\frac{|\xi_{ns}^3|}{1+\xi_{ns}^2}|f_{ns}-1|\right)\right)\tag{9}$$

При $|t|\le An^{1/2-\rho}$ и $n\ge n_0'$ слагаемые в (9) оцениваются с помощью(5), (6) и (8) аналогично. Например, легко видеть, что первое слагаемое не превосходит

$$2t^2\left(\frac{H_2\nu k^2|t|^2}{n^{3/2}}+\frac{H_1\nu k^2c}{H_0^{\alpha}n^2}+\frac{H^{1/2}\nu k^2c_1}{H_0^{\alpha-1}n^2}+\frac{c_1c\nu k^2}{H_0^{2\alpha-1}n^2}\right).$$

В оценке второго слагаемого вместо $2t^2$ будет множитель $4|t|$.

Обозначим: $M = M\exp itS_{n(s,p)}$. Оценивая $\alpha_n(t)$, получаем

$$it\alpha_n(t) = \frac{it}{M}\left(\sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}}{1+\xi_{ns}^2}\left(1 + it\overline{S}_{n(s,p)} - \frac{t^2}{2}\overline{S}^2_{n(s,p)}\theta_{ns}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + it\sum_s M\left(\frac{\xi_{ns}}{1+\xi_{ns}^2}\overline{\overline{M}}\left(e^{itS_{n(s,p)}}/B_{ns}\right)\right)\right) \qquad (10)$$

Здесь первая сумма преобразуется в виде

$$it a_n - t^2\sum_s M\frac{\overline{\xi}_{ns}\overline{S}_{n(s,p)}}{1+\xi^2_{ns}} - t^2\sum_s M\frac{\overline{\overline{\xi}}_{ns}}{1+\xi^2_{ns}}\overline{S}_{n(s,p)} - \frac{it^3}{2}M\frac{\overline{\overline{\xi}}_{ns}}{1+\xi^2_{ns}}\overline{S}^2_{n(s,p)}\theta_{ns}\,.$$

Очевидно, из (7) и условий (5), (6) следует, что $\left|\sum_s M\frac{\overline{\overline{\xi}}_{ns}}{1+\xi^2_{ns}}\overline{S}_{n(s,p)}\right| \le \frac{H_1^{1/2}c_1\nu k^2}{H_0^{\alpha-1}n^{3/2}}$, $\sum_s M\left|\frac{\xi_{ns}}{1+\xi^2_{ns}}\overline{S}^2_{n(s,p)}\right| \le \frac{H_2\nu k^3}{n^{3/2}} + \frac{H_1c_1\nu k^3}{H_0^{\alpha-1}n^2}$. Кроме того, очевидно, что если $|t| \le An^{1/2-\rho}$ и $n \ge n_0'$, то

$$\left|M^{-1} - 1\right| \le 2\left(\frac{H_1t^2k^2}{n} + \frac{ck}{H_0^{\alpha}n}\right).$$

Вторая сумма в (10) удовлетворяет неравенству

$\left|\sum M\left(\frac{\xi_{ns}}{1+\xi^2_{ns}}\overline{\overline{M}}\left(e^{itS_{n(s,p)}}/B_{ns}\right)\right)\right| \le \frac{H_1\nu k^2c}{H_0^{\alpha}n^{3/2}} + \frac{cc_1\nu k^2}{H_0^{2\alpha-1}n^2}$. Заметим также, что $\sum_s\left|M\frac{\overline{\xi}_{ns}\overline{S}_{n(s,p)}}{1+\overline{\xi}^2_{ns}} - M\overline{\xi}_{ns}\overline{S}_{n(s,p)}\right| \le \frac{H_2\nu k^2}{n^{3/2}}$.

Для оценки двойной суммы в (4) получаем при $|t| \le An^{1/2-\rho}$ и $n \ge n_0'$

$$|\varphi_{ns} - 1| \le t^2\left|\overline{M}\left(S^2_{n(s-1,p)}\theta'_{ns} - S^2_{n(s,p)}\theta''_{ns}\right)\right| + 2|t|M\left|\overline{\xi}_{ns}\right| \le \frac{2H_1k^2t^2}{n} + \frac{2|t|c_1}{H_0^{\alpha-1}n}.$$

Отсюда следует, что найдется n_0'' такое, что при $|t| \le An^{1/2-\rho}$ и $n \ge n_0''$ $\max|\varphi_{ns} - 1| \le \frac{1}{2}$. После это получим при $|t| \le A_1 n^{1/2-2\rho}$, $A_1>0$

$$\left|\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}(\varphi_{ns} - 1)^r\right| \le \sum_{s=1}^{l}|\varphi_{ns} - 1|^2 \le \frac{4H_1^2A_1k^2|t|^3}{n^{1/2}} + \frac{8H_1|t|^3c_1k^2}{H_0^{\alpha-1}n} + \frac{4c_1^2t^2}{H_0^{2(\alpha-1)}n}.$$

Из приведенных оценок следует, что найдется n_0 такое, что при $n \ge n_0$ и $|t| \le An^{1/2-2\rho}$ будет выполняться (7). Лемма доказана.

3^0. <u>Доказательство теоремы</u>. По условию $b_n \ge \sigma^2 > 0$, поэтому из неравенства (7) получаем,

$$\left|e^{q_n(t)} - e^{\psi_n(t)}\right| \le \exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)\left|e^{q_n(t)-\psi_n(t)} - 1\right| \le |q_n(t) - \psi_n(t)| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2} + |q_n(t) - \psi_n(t)|\right) \le \frac{B_n(t)|t|}{n^{1/2-2\rho}}\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2} + \frac{B_n(t)|t|}{n^{1/2-2\rho}}\right).$$

Можно подобрать такое $A_0 \le \frac{1}{\sqrt{4H_1}}$, что при $|t| \le A_0 n^{1/2-2\rho}$ и $n \ge n_0'''$ будет выполняться неравенство $-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{B_n(t)|t|}{n^{1/2-2\rho}} \le -at^2, \quad a > 0$.

Пусть $G_n(x)$ – ф.р. суммы S_{n1}. Наличие нормального компонента в ф.р. $F_n(x)$ обеспечивает существование и ограниченность производной: $|F_n'(x)| \le C$. Это позволяет применить неравенство Эссеена [5; 6]:

$$\sup_x |G_n(x) - F_n(x)| \le \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{e^{q_n(t)} - e^{\psi_n(t)}}{t} \right| dt + \frac{24C}{\pi T},$$

из которого при $T = A_0 n^{1/2-2\rho}$, учитывая, что интеграл от $t^2 e^{-at^2}$ конечен, получим

$$\sup_x |G_n(x) - F_n(x)| \le \frac{c_0}{n^{1/2-2\rho}}, \tag{11}$$

где c_0- независимая от n постоянная.

Как показано в [1] (§1.10), для фиксированного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\{S_{n1} \le x - \varepsilon\} - P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\} \le P\{S_n \le x\} \le P\{S_{n1} \le x + \varepsilon\} + P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\}.$$

Отсюда, (11) и неравенства

$$P\{|S_{n2}| \ge \varepsilon\} \le P\{|\overline{S}_{n2}| \ge \varepsilon\} + P\{|\overline{\overline{S}}_{n2}| \ge 0\} \le \frac{M\overline{S}_{n2}^2}{\varepsilon^2} + \frac{cvm}{H_0^\alpha n} \le \frac{H_1 m^2}{\varepsilon^2 n^\rho} + \frac{cm}{H_0^\alpha n^\rho}, \tag{12}$$

следует доказательство теоремы.

Замечания. 1. Теорема допускает варьирование за счет применения в (12) других форм неравенства Чебышева.

2. Проведенные оценки показывают, что постоянная c_0 определяема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь – грант №Ф97-399 от 1-го марта 1998года.

Литература

1. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. - Мн.: Университетское, 1990.-254с.

2. Юдин М. Д. Об обобщении формул Колмогорова и Леви-Хинчина на суммы зависимых величин //Докл.АН БССР.-1986.-Т.30, № 1. -С.29-31.

3. Юдин М. Д. О предельных распределениях сумм зависимых случайных величин с неограниченными дисперсиями// Докл.АН БССР. -1984. - Т.28, №6. - С.496-498.

4. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм m-зависимых величин //Rev. Roum. Math. Pures et Appl. -1976. - T.XXI, №10. -С. 1335-1346.

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. -М.: Мир, 1967.-Т.2.-752с.

6. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. -М.: Наука, 1972.-414с.

Summary

The distribution of the sums of m-dependent random variables is approximated by the infinitely divisible distribution in the metrics of P. Levy.