Н. В. ГУЦКО
УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В ТЕОРИЯХ *C*-НОРМАЛЬНЫХ И *S*-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ *Q*-ВЛОЖЕННОСТИ

Все рассматриваемые группы являются конечными. В этой работе мы анализируем некоторые результаты на основе следующего понятия.

Определение [1]**.** Пусть H – подгруппа конечной группы G. Тогда H называется Q-вложенной в G, если в G существует такая квазинормальная подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.

Нами были получены следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть F – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in F$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из E имеет подгруппу D такую, что $1<|D|<|P|$ и все подгруппы H из P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P – неабелева 2-группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в группе G, Q-вложена в G. Тогда $G \in F$.

Теорема 2. Пусть G – группа с нормальной подгруппой E такой, что факторгруппа G/E p-нильпотентна и p – наименьший простой делитель порядка $|G|$. Предположим, что силовская p-подгруппа P из E содержит такую подгруппу D, что $1<|D|<|P|$ и каждая подгруппа H из P порядка, равного порядку подгруппы D и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P – неабелева 2-группа), не имеющая p-нильпотентного добавления, является Q-вложенной в G. Тогда G p-нильпотентна.

Теоремы имеют большое число следствий, приведем лишь некоторые из них.

Следствие 1 (Y. Wang [2]). Если каждая подгруппа группы G с простым порядком и каждая циклическая подгруппа порядка 4 является c-нормальной в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 2 (Y. Wang [2]). Пусть G – группа и E – нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/E. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы E являются c-нормальными в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 3 (Xiuyun Guo и K.P. Shum [3]). Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа в P является c-нормальной в G, то группа G p-нильпотентна.

Следствие 4 (X. Guo and K.P. Shum [3]). Пусть F является насыщенной формацией, содержащей все p-нильпотентные группы, G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in F$, p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из P является c-нормальной в G, то $G \in F$.

Следствие 5 (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [4]). Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p-подгруппа группы G. Если каждая подгруппа группы P с простым порядком и каждая циклическая подгруппа порядка 4 является c-нормальной в G, то G – p-нильпотентная группа.

Следствие 6 (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [4]). Пусть F – насыщенная формация, содержащая U – класс сверхразрешимых групп, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in F$. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы E является c-нормальной в G, то $G \in F$.

Следствие 7 (M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed and A.A. Heliel [4]). Пусть F – насыщенная формация, содержащая U – класс сверхразрешимых групп, и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in F$. Если каждая подгруппа из E с простым порядком и каждая циклическая подгруппа с порядком 4 является c-нормальной в G, то $G \in F$.

Следствие 8 (S. Srinivasan [5]). Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 9 (S. Srinivasan [5]). Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы G является S-квазинормальной в G, то группа G сверхразрешима.

Следствие 10 (W. Guo, K.P. Shum and A.N. Skiba [6]). Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 11 (J. Buckley [7]). Пусть G – группа нечетного порядка. Если все подгруппы группы G с простым порядком являются нормальными в G, то группа G сверхразрешима.

Следствие 12 (A. Al-Sheikahmad [8]). Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, c-нормальны в G, то G – сверхразрешимая группа.

Следствие 13 (A. Ballester-Bolinches and Y. Wang [9]). Пусть F – насыщенная формация, содержащая U – класс всех сверхразрешимых групп. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы с порядком 4 в G^F являются c-нормальными в группе G, то $G \in F$.

Следствие 14 (A. N. Skiba [10]). Пусть E – нормальная подгруппа группы G такая, что факторгруппа G/E сверхразрешима. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из E имеет подгруппу D такую, что $1<|D|<|P|$, и все подгруппы H из P с порядком $|H|=|D|$ являются c-нормальными в G. Тогда G – сверхразрешимая группа.

Следствие 15 (M. Asaad [11]). Если каждая подгруппа группы G с простым порядком и каждая циклическая подгруппа с порядком 4 является S-квазинормальной в G, то группа G сверхразрешима.

Следствие 16 (M. Asaad, M. Ramadan and A. Shaalan [12]). Пусть G – группа и E – разрешимая нормальная подгруппа группы G со сверхразрешимой факторгруппой G/E. Предположим, что все максимальные подгруппы некоторой силовской подгруппы из E являются S-квазинормальными в G. Тогда группа G сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуцко, Н. В. Обобщенно квазинормальные подгруппы в теории конечных групп / Н. В. Гуцко, Ю. В. Луценко – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2011. – 216 с.

2. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.

3. Guo, X. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups / X. Guo, K. P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80, № 6. – P. 561–569.

4. Ramadan, M. On c-normality of certain subgroups of prime power oder of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A. A. Heliel // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.

5. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.

6. Guo, W. G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Israel J. Math. – 2003. – Vol. 138. – P. 125–138.

7. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 15. – P. 15–17.

8. Al-Sheikahmad, A. Finite groups with given c-permutable subgroups / A. Al-Sheikahmad // Algebra and discrete math. – 2004. – № 3. – P. 74–81.

9. Ballester-Bolinches, A. Finite groups with some c-normal minimal subgroups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang // J. Pure and Applied Alg. – 2000. – Vol. 153, № 2. – P. 121–127.

10. Skiba, A. N. A note on c-normal subgroups of finite groups / A. N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2005. – Vol. 3. – P. 85–95.

11. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1998. – Vol. 51. – P. 289–293.

12. Asaad, M. Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups of a finite group / M. Asaad, M.Ramadan, A. Shaalan // Arch. Math. – 1991. – Vol. 56. – P. 521–527.