О ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА СПИРАЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

При описании состояний поляризации для частицы со спином 3/2 важную роль играет оператор спиральности – проекция оператора спина частицы на ее 3-мерный вектор импульса

$$\Sigma\,\Psi(x) = \sigma\,\Psi(x)\,. \tag{1}$$

Волновая функция частицы $\Psi(x)$ – это 4-вектор – биспинор относительно группы Лоренца. Ее можно представлять как 16-элементную матрицу размерности 4×4. С учетом подстановки для волновой функции в виде плоских волн, оператор спиральности принимает вид

$$\Sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k_3 & k_1 - ik_2 & 0 & 0 \\ k_1 + ik_2 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & 0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \end{vmatrix} \otimes I + I \otimes i \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & k_1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Из (1) получаем следующие линейные уравнения: (отмечаем, что эти 16 уравнений разбиваются в 4 несвязанные группы ($16 = 2 + 2 + 6 + 6$)). Первые две системы

$$(k_3-2\sigma)\,a_0+(k_1-ik_2)\,b_0=0,\quad (k_1+ik_2)\,a_0-(k_3+2\sigma)\,b_0=0\,,$$
$$(k_3-2\sigma)\,c_0+(k_1-ik_2)\,d_0=0,\quad (k_1+ik_2)\,c_0-(k_3+2\sigma)\,d_0=0$$

приводят к двум собственным значениям σ:

$$\sigma=\pm\frac{1}{2}\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}=\pm\frac{1}{2}k\,,\qquad b_0=\frac{\pm k-k_3}{k_1-ik_2}\,a_0,\quad d_0=\frac{\pm k-k_3}{k_1-ik_2}c_0\,. \tag{3}$$

Имеем систему из 6 уравнений для a_j, b_j:

$$\begin{vmatrix} +(k_3-2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & +(k_3-2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & +(k_3-2\sigma) \end{vmatrix}\mathbf{a}=-(k_1-ik_2)\,\mathbf{b},$$
$$\begin{vmatrix} -(k_3+2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3+2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3+2\sigma) \end{vmatrix}\mathbf{b}=-(k_1+ik_2)\,\mathbf{a} \tag{4}$$

и точно такую же систему из 6 уравнений для c_j, d_j, рассматривать ее отдельно не нужно.

Действуя методом исключения, из (4) получаем уравнение для вектора $\mathbf{a}$:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2-k^2+4(k_2^2+k_3^2) & +8i\sigma k_3-4k_1k_2 & -8i\sigma k_2-4k_1k_3 \\ -8i\sigma k_3-4k_1k_2 & 4\sigma^2-k^2+4(k_1^2+k_3^2) & 8i\sigma k_1-4k_2k_3 \\ 8i\sigma k_2-4k_1k_3 & -8i\sigma k_1-4k_2k_3 & 4\sigma^2-k^2+4(k_1^2+k_2^2) \end{vmatrix}\mathbf{a}=0. \tag{5}$$

Решаем уравнение для $\mathbf{a}$, а затем вектор $\mathbf{b}$ найдем, пользуясь первым уравнением из (4). Убеждаемся, что равенство нулю определителя матрицы дает корни (два из них 2-кратно вырожденны):

$$\sigma=-\frac{1}{2}k,-\frac{1}{2}k,\quad +\frac{1}{2}k,+\frac{1}{2}k,\quad -\frac{3}{2}k,+\frac{3}{2}k. \tag{6}$$

Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным величинам:

$$\frac{k_i}{k}=n_i\,,\quad n_in_i=1,\quad \frac{\sigma}{k}\Rightarrow\sigma,\qquad \sigma=-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},-\frac{3}{2},+\frac{3}{2},$$

это позволяет представить уравнение таким образом:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2-1+4(n_2^2+n_3^2) & +8i\sigma n_3-4n_1n_2 & -8i\sigma n_2-4n_1n_3 \\ -8i\sigma n_3-4n_1n_2 & 4\sigma^2-1+4(n_1^2+n_3^2) & 8i\sigma n_1-4n_2n_3 \\ 8i\sigma n_2-4n_1n_3 & -8i\sigma n_1-4n_2n_3 & 4\sigma^2-1+4(n_1^2+n_2^2) \end{vmatrix}\mathbf{a}=0. \tag{7}$$

Сначала рассматриваем случай $\sigma=\pm 1/2$, убеждаемся, что ранг этой системы равен 1, то есть из трех уравнений существенным является только одно. Для определенности оставляем третье:

$$(\pm in_2-n_1n_3)\,a_1-(\pm in_1+n_2n_3)\,a_2+(1-n_3^2)\,a_3=0. \tag{8}$$

У этого уравнения могут существовать два независимых решения (это согласуется с 2-кратностью корней $\sigma=\pm 1/2$). Одно (наиболее простое) решение имеет вид $\mathbf{a}^{(1)}=(n_1,n_2,n_3)$:

$$(\pm in_2-n_1n_3)\,n_1-(\pm in_1+n_2n_3)\,n_2+(1-n_3^2)\,n_3=0\,.$$

С учетом структуры уравнения (8) второе решение может быть построено в виде векторного произведения

$$\mathbf{a}^{(2)}=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ (\pm in_2-n_1n_3) & -(\pm in_1+n_2n_3) & (1-n_3^2) \end{vmatrix}=$$
$$=(\pm in_1n_3+n_2)\,\mathbf{e}_1+(\pm in_2n_3-n_1)\,\mathbf{e}_2\mp i(1-n_3^2)\,\mathbf{e}_3\,; \tag{9}$$

прямым вычислением легко можно убедиться, что этот вектор $\mathbf{a}^{(2)}$ удовлетворяет уравнению (8). Таким образом, имеем два решения уравнения (8):

$$\mathbf{a}^{(1)}=(n_1,n_2,n_3)=\mathbf{n},\qquad \mathbf{a}^{(2)}=(\pm in_1n_3+n_2;\pm in_2n_3-n_1;\mp i(1-n_3^2))\,. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим случай $\sigma=\pm 3/2$. Ранг системы (7) равен 2, для определенности в качестве независимых оставим два первых уравнения:

$$(2+n_2^2+n_3^2)\,a_1+(2i\sigma n_3-n_1n_2)\,a_2=(+2i\sigma n_2+n_1n_3)\,a_3\,,$$
$$-(2i\sigma n_3+n_1n_2)\,a_1+(2+n_1^2+n_3^2)\,a_2=(-2i\sigma n_1+n_2n_3)\,a_3\,. \tag{11}$$

Убеждаемся, что определитель 2-мерой матрицы слева равен $6(1-n_3^2)$. Он обращается в ноль при $n_3=\pm 1$, этот случай особый. Для всех остальных случаев ориентации плоских волн система (11) невырожденная и решается обычным способом:

$$a_1=\frac{(3-4\sigma^2)n_1n_3+4i\sigma n_2}{6+(3-4\sigma^2)n_3^2}\,a_3=\frac{-n_1n_3\pm in_2}{1-n_3^2}a_3\,,\ \text{пусть}\ \ a_3=1-n_3^2\,;$$
$$a_2=\frac{(3-4\sigma^2)n_2n_3-4i\sigma n_1}{6+(3-4\sigma^2)n_3^2}\,a_3=\frac{-n_2n_3\mp in_1}{1-n_3^2}a_3\,,\ \text{пусть}\ \ a_3=1-n_3^2\,. \tag{12}$$

Для каждого решения $\{a_1, a_2, a_3\}_\sigma$ можно вычислить соответствующий набор $\{b_1, b_2, b_3\}_\sigma$, при этом нужно воспользоваться соотношением из (4):

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{n_1 - in_2} \begin{vmatrix} +(n_3 - 2\sigma) & -2in_3 & +2in_2 \\ +2in_3 & +(n_3 - 2\sigma) & -2in_1 \\ -2in_2 & +2in_1 & +(n_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix},$$

его можно представить в векторной форме так:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{n_1 - in_2} \left[(2\sigma - n_3)\, \mathbf{a} - 2i\, \mathbf{n} \times \mathbf{a} \right]. \tag{13}$$

Сначала рассматриваем случай $\sigma = \pm 1/2$. Для решений первого типа получаем

$$\mathbf{a}^{(1)} = (n_1, n_2, n_3) = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\, \mathbf{a}^{(1)}. \tag{14}$$

Затем обращаемся к решениям второго типа. Вычисляем векторное произведение $\mathbf{n} \times \mathbf{a}^{(2)}$ и затем получаем выражение для $\mathbf{b}^{(2)}$:

$$\mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{n_1 - in_2} \left[(\pm 1 - n_3) - 2i\,(\mp i) \right] \mathbf{a}^{(2)} = \frac{(\mp 1 - n_3)}{n_1 - in_2}\, \mathbf{a}^{(2)}. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим спиральности $\sigma = \pm 3/2$:

$$a_1 = (-n_1 n_3 \pm i n_2), \qquad a_2 = (-n_2 n_3 \mp i n_1), \qquad a_3 = 1 - n_3^2;$$
$$\mathbf{b} = \frac{1}{n_1 - in_2} \left[(\pm 3 - n_3)\, \mathbf{a} - 2i\, \mathbf{n} \times \mathbf{a} \right] \;\Rightarrow \mathbf{b} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\, \mathbf{a}. \tag{16}$$

Таким образом, получили три собственных вектора оператора спиральности для собственных значений $\sigma = \pm 1/2/, \pm 1/2, \pm 3/2$.

Дальнейший анализ должен сводиться к согласованию этих ограничений с волновым уравнением для частицы со спином 3/2. Состояния со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$ являются решениями волнового уравнения.

Двукратно вырожденные состояния спиральности с $\sigma \pm 1/2$ не являются каждое в отдельности решением волнового уравнения. Решение волнового уравнения удается построить на основе использования определенной линейной комбинации этих двух состояний. Нужная линейная комбинация этих решений найдена:

$$a_0 = F a_0^{(1)} + G a_0^{(2)}, \quad \mathbf{a} = F \mathbf{a}^{(1)} + G \mathbf{a}^{(2)},$$
$$b_0 = F \Gamma a_0^{(1)} + G \Gamma a_0^{(2)}, \quad \mathbf{b} = F \Gamma \mathbf{a}^{(1)} + G R \mathbf{a}^{(2)}. \tag{17}$$

Коэффициенты F, G определяются уравнением

$$(k \mp k_0)\, F \pm 2i(k \pm k_3) G = 0. \tag{18}$$