Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович
УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь)

ИЗУЧЕНИЕ ВОПРОСОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной является одним из разделов математики, который имеет широкое практическое применение (нахождение наибольших и наименьших значений функции на отрезке или при заданных условиях, нахождение экстремумов функций, геометрический и механический смысл первой и второй производной и др.) в различных областях. В связи с этим изучение тем данного раздела математики является очень важным для студентов, получающих профессионально-техническое образование.

В школьном курсе математики при решении целого ряда задач возникает необходимость находить производную той или иной функции. Однако, как показывает анализ контрольных срезов, проводимых нами среди студентов первых курсов факультета технологии и инженерно-педагогического факультета УО МГПУ имени И.П. Шамякина, многие из первокурсников не знают не только простейших формул и стандартных методов дифференцирования, но и иногда, производя те или иные выкладки, не совсем точно понимают смысл своих действий. Это приводит к большому числу ошибок в решении задач на нахождение производной функции и на приложения производной. Такая же проблема характерна и для некоторых студентов старших курсов. Одну из причин этого мы видим в том, что в настоящее время данная тема, согласно школьной учебной программе [1], рассматривается учителем в том объеме, который он считает целесообразным.

Анкетирования, тестирования, самостоятельные и контрольные работы, индивидуальные семестровые задания, коллоквиумы, результаты зачетов и экзаменов дали возможность выявить следующие основные ошибки студентов, возникающие при изучении вопросов дифференцируемости функции одной действительной переменной.

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y(x)=3x^2-\frac{5}{x}+3\sqrt[6]{x^4}.$$

При решении данного примера большинство первокурсников рассматривают второе слагаемое как дробь и берут производную по правилу дифференцирования дроби, что является довольно нерациональным подходом. Студенты не замечают, что константу -5 можно вынести за знак производной, а затем взять производную только от степенной функции x^{-1}.

Что касается третьего слагаемого, то студенты не учитывают, что здесь необходимо иметь в виду тот факт, что функция с рациональным показателем определяется лишь на положительной полуоси, поэтому данная функция и ее производная при доопределении на отрицательную полуось нуждается в дополнительных пояснениях.

В данном случае при $x<0$ имеем

$$(3\sqrt[6]{x^4})'=(3\sqrt[6]{(-x)^4})'=(3(-x)^{\frac{2}{3}})'=-3\cdot\frac{2}{3}\cdot(-x)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Многие студенты не учитывают при нахождении производной роли области определения функции.

Пример 2. Продифференцировать функцию

$$y(x)=\lg\frac{x-8}{x}.$$

Найдя производную

$$y'(x)=\frac{8}{x(x-8)\ln 10},$$

студенты не замечают тот факт, что выражение

$$\frac{8}{x(x-8)\ln 10}$$

имеет смысл при всех значениях x, отличных от 0 и 8, тогда как исходная функция определена лишь при $x<0$ или $x>8$. Не учитывая этого, студенты записывают ответ:

$$y'(x)=\frac{8}{x(x-8)\ln 10},\ x\in(-\infty;0)\cup(0;8)\cup(8;\infty)$$

и тем самым пренебрегают определением производной, из которого вытекает, что производная не может быть определена в точках, где не определена сама исходная функция.

Многие из студентов не принимают во внимание и того, что условие дифференцируемости функции в какой-либо точке является достаточным условием ее непрерывности в этой точке, а непрерывность функции в точке является необходимым условием ее дифференцируемости в этой точке.

Пример 3. Продифференцировать функцию

$$y(x)=x\cdot|x|.$$

Эта функция дифференцируема во всех точках, но к ней неприменимо непосредственно правило взятия производной от произведения, так как в качестве второго множителя выступает $|x|$.

Действительно, в некоторой окрестности всякой точки $x_0>0$ имеем

$$x\cdot|x|=x^2,$$

откуда

$$y'(x_0)=2x_0;$$

в некоторой окрестности всякой точки $x_0<0$ аналогично имеем

$$x\cdot|x|=-x^2,$$

откуда

$$y'(x_0)=-2x_0;$$

в точке $x_0=0$ необходимо найти производную с помощью определения

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=0.$$

С учетом этого верный ответ имеет вид:

$$y'(x)=2|x|.$$

Разнообразные ошибки студенты допускают при нахождении производных от дробных функций в первую очередь из-за трудоемкости процедуры вычислений. В связи с этим мы рекомендуем студентам там, где это возможно, предварительно преобразовать данную дробь.

Пример 4. Продифференцировать функцию

$$y(x)=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

Для того чтобы упростить процесс дифференцирования данной функции, рекомендуем студентам предварительно упростить данную дробь следующим образом:

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=tg^2 x.$$

Не выполнив такого преобразования, студенты сталкиваются с довольно громоздкими преобразованиями, что влечет за собой появление ошибок.

Применение предварительного преобразования позволяет иногда достичь особенного эффекта при дифференцировании функции, содержащих логарифмы.

Пример 5. Продифференцировать функцию

$$y(x)=\ln\frac{7\sqrt{x-1}}{x}.$$

Незначительное число студентов в группах первого курса преобразовали заданную функцию, используя свойства логарифмической функции. Большинство из них сразу же стали находить производную как от сложной функции, чем загромоздили решение и спровоцировали появление ошибок, которых можно было бы избежать, выполнив следующие преобразования.

$$y(x)=\ln 7\cdot\sqrt{x-1}-\ln x=\ln 7+\ln\sqrt{x-1}-\ln x=\ln 7+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\ln x.$$

Но, между тем, следует отметить, что при рекомендации студентам подобных преобразований необходимо предупредить их о возможном сужении области определения исходной функции.

Вернемся к примеру 2.

Если преобразовать заданную функцию, то будем иметь:

$$y(x)=\ln(x\text{-}8)-\ln x.$$

Видим, что область определения в данном случае до преобразования была $x<0$ или $x>8$, а после преобразований стала $x>8$.

Путем решения подобных примеров необходимо добиться от студентов понимания того, что преобразования целесообразно применять лишь в тех случаях, когда они не сужают область определения исходной функции.

Грубые ошибки допускаются многими абитуриентами и студентами младших курсов при нахождении производных от функции, которые в заданном виде дифференцировать вообще невозможно.

Пример 6. Продифференцировать функцию

$$y(x)=x^{2x}.$$

Большинство студентов первого курса физико-математического факультета дифференцируют данную функцию либо как показательную, либо как степенную. Они не знают, что здесь необходимо предварительно представить данную функцию в следующем виде:

$$y(x)=(e^{\ln x})^{2x}=e^{2x\ln x}.$$

Подобная ситуация повторяется и при нахождении производных от функций, заданных с помощью логарифмов, у которых основание не является постоянным и под знаком логарифма также содержится переменная.

Пример 7. Продифференцировать функцию

$$y(x)=\log_x(x-2).$$

Решая этот пример, многие студенты дифференцируют данную функцию как логарифмическую с постоянным основанием, что также является грубой ошибкой. Как и в предыдущем случае, большинство студентов не знают, что в данном случае функцию необходимо обязательно преобразовать путем перехода к основанию e.

$$y(x)=\log_x(x-2)=\ln(x-2)/\ln x.$$

Следует отметить также, что довольно распространенной является ошибка, когда при дифференцировании показательной и логарифмической функции производная берется лишь от «внешней» функции. Студенты берут производную от показательной или логарифмической функций и не умножают затем на производную показателя или логарифмического выражения соответственно, как это предписывает правило дифференцирования сложной функции одной действительной переменной.

К большому сожалению, встречаются и ошибки следующего характера. Беря производную, например, от функции

$$y(x)=\cos 12x\cdot\sin\frac{\pi}{12},$$

многие абитуриенты и студенты младших курсов зачем-то применяют правило дифференцирования произведения, а некоторые из них постоянную величину $\sin\frac{\pi}{12}$ дифференцируют по π, демонстрируя тем самым чисто формальные знания формул и правил дифференцирования.

С целью устранить появление подобных ошибок в дальнейшем, мы предлагаем студентам задания следующего типа для самостоятельного решения (в домашнем задании, в самостоятельной работе, в семестровом задании и т.д.). Кроме того, организовываются дополнительные занятия и индивидуальные консультации для неуспевающих студентов, где они имеют возможность более подробно разобраться с теми моментами в решениях задач, которые вызывают у них наибольшие затруднения.

Продифференцировать следующие функции:

а) $y(x)=\dfrac{x+3x^2}{2x^3}$;

б) $y(x)=e^{2x}(\cos^2 x-2)$;

в) $y(x)=\ln(7\sqrt[7]{x+1})$;

г) $y(x)=3\cos\dfrac{2x}{\pi}+\sin\dfrac{5\pi}{2}$;

д) $y(x)=tg\cos 3x$;

е) $y(x)=\log_{\sqrt{x}}(x-2)^4$;

ж) $y(x)=(x^2+1)^x$;

з) $y(x)=|x|\cdot\dfrac{x}{2}$ и др.

С учетом вышеизложенного мы в процессе изучении со студентами вопросов дифференцируемости функции одной действительной переменной на занятиях по математике по средствам решения системы упражнений и повторения основных теоретических вопросов ставим своей целью добиться от студентов четкого уяснения следующих моментов:

- находя производные, необходимо следить за областью допустимых значений неизвестных, участвующих в данной задаче, особенно за изменением этой области в процессе различных преобразований;
- применять известные формулы и правила не механически, а творчески, с учетом особенностей данной задачи;
- помнить, что для дифференцируемости функции в какой-либо точке необходимо, но не достаточно, чтобы функция была непрерывна в этой точке и определена в некоторой окрестности этой точки.

Целенаправленная и систематическая работа по предупреждению ошибок, проводимая нами при чтении лекций и на практических занятиях по математике, способствует не только осознанному восприятию и грамотному применению изученного материала к решению математических задач, но и стимулирует развитие познавательной и творческой активности студентов. Более того, в процессе такой работы мы указываем студентам те элементы знаний, которые можно использовать при изучении других дисциплин, что повышает интерес студентов к дальнейшему обучению.

Литература

1. Математика: V–XI классы: учебная программа для учреждений общего среднего образования с русским языками обучения. – Минск: МО РБ, 2012. – 52 с.