СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ».

РАЗДЕЛ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ».
Раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной действительной переменной»

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2020

УДК 517(076)
ББК 22.161я73
Г93

Составители:

Н. В. Гуцко, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»;

С. В. Игнатович, старший преподаватель кафедры физики и математики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины»
Е. Н. Бородич;
кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора по учебно-воспитательной и идеологической работе Российского государственного социального университета (филиал РГСУ в г. Минске)
В. В. Пакштайте

Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»

Г93 **Справочные** материалы по дисциплине «Математический анализ». Раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной действительной переменной» / сост.: Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2020. – 52 с.
ISBN 978-985-477-717-7.

Справочные материалы содержат основные определения, свойства, формулы, а также формулировки лемм и теорем по теории множеств, пределов, дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной.

Предназначены для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике.

УДК 517(076)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-477-717-7

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для сокращения записи используются следующие обозначения.

$\forall$	«для каждого»; «для любого»; «для всех» (от английского All)
$\exists$	«существует»; «найдется» (от англ. Exists)
$!$	квантор единственности
$:$	«такой, что»; «такие, что»
$:=$	«по обозначению равно»
$\to$	«соответствует», «поставлено в соответствие»
$\Rightarrow$	«следует»
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда, когда
$\Longleftrightarrow$	«равносильно»
$\vee$	или
$\wedge$	и
$\langle a, b\rangle$	промежуток, то есть либо отрезок $[a, b]$, либо полуинтервал $[a, b)$, либо полуинтервал $(a, b]$, либо интервал (a, b). При этом полуинтервал и интервал могут быть как конечными, так и бесконечными;
$A, B, \ldots$	множества
$a, b, \ldots$	элементы множества

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математический анализ» знакомит студентов со способами исследования функциональных зависимостей между переменными величинами. Изучаемые методы базируются на использовании предельного перехода, дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. В связи с этим, данные справочные материалы по дисциплине «Математический анализ» содержат материал по разделам «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Интегральное исчисление функции одной переменной», которые изучаются студентами физико-инженерного факультета специальности 01-02 05 01 «Математика и информатика» в первом и во втором семестрах.

Справочные материалы содержат основные определения, свойства, формулы, а также формулировки лемм и теорем по темам теории множеств и пределов, дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной. Изложенные вопросы разделов математического анализа могут быть использованы студентами как на лекционных и практических занятиях, так и для самостоятельной подготовки по данному предмету.

Данные справочные материалы предназначены, в первую очередь, для использования в учебном процессе студентами дневного отделения физико-инженерного факультета специальности 1-02 05 01 «Математика и информатика», а также могут быть использованы в качестве учебно-методического обеспечения для специальностей 1-02 05 02 «Физика и информатика», 01-31 04 08 03 «Компьютерная физика. Компьютерное моделирование физических процессов», 1-08 01 01 «Профессиональное обучение (по направлениям)». Кроме того, изложенные вопросы будут полезны студентам при использовании аппарата математического анализа в решении различных прикладных задач.

1 МНОЖЕСТВА. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1 Множества и элементарные операции над ними

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, входит ли он в это множество. Факт ***принадлежности элемента*** a множеству A отображается символической записью: $a \in A$. В противном случае пишут: $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$.

Стандартные обозначения для некоторых ***множеств***

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ – множество 0,1,2,3,…;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество вещественных (действительных) чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Также еще существуют стандартные обозначения для множеств:

$\mathbb{R}^+$ – строго положительных вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ – неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{R}^-$ – строго отрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{R}_-$ – неположительных вещественных чисел.

Множество, не содержащее элементов с указанными свойствами, то есть, не имеющее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается $\emptyset$ или Λ. Два множества считаются ***равными***, тогда и только тогда они состоят из одних и тех же элементов:

$$A=B:=[a\in A \Rightarrow a\in B] \wedge [\forall\ b\in B \Rightarrow b\in A].$$

Равенство множеств обладает свойствами.

1. Рефлексивность: $\forall A\ [A=A]$.
2. Симметричность: $\forall A, B\ [A=B \Rightarrow B=A]$.
3. Транзитивность: $\forall A, B, C\ [A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C]$.

Если $\forall\ a\in A \Rightarrow a\in B$, то множество A называется ***подмножеством*** множества B. Запись $A\subset B$. В этой ситуации множество B называется ***надмножеством*** или ***расширением множества*** A. Запись: $B\supset A$.

Подмножества $\emptyset$ и A имеются у каждого множества. Они называются ***несобственными*** или ***тривиальными***. Другие подмножества, если они есть, называются ***собственными*** или ***нетривиальными***.

Подмножества имеют ***свойства***

1. $\forall A\ [\emptyset\subset A]$.
2. $\forall A\ [A\subset A]$ – рефлексивность.
3. $A, B\ [A\subset B \wedge B\subset A \Rightarrow A=B]$ – антисимметричность.
4. $\forall A, B, C\ [A\subset B \wedge B\subset C \Rightarrow A\subset C]$ – транзитивность.

Множество всех подмножеств данного множества X называется его ***булеаном*** и записывается: $\beta(X)$, то есть $\beta(X) = \{A: A \subset X\}$.

1. Теоретико-множественное сложение – объединение

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

2. Теоретико-множественное умножение – пересечение

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

3. Разность множеств

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

4. Дополнение к множеству

В некоторых задачах все рассматриваемые множества есть подмножества одного и того же множества U (универсальное множество). Тогда $U \setminus A$ называется: ***дополнение к*** A, запись $\boldsymbol{cA}$ или $\overline{A}$.

$$cA = \{x \in U : x \notin A\}.$$

5. Симметрическая разность множеств

$$A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

Принцип двойственности, основанный на двух соотношениях.

1. Дополнение суммы равно пересечению дополнений:

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$$

2. Дополнение пересечения равно сумме дополнений:

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$$

1.2 Аксиоматика

Определение. Непустое множество $\mathbb{R}$ называется ***множеством действительных (вещественных) чисел***, а его элементы – ***действительными (вещественными) числами***, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам:

(I) Аксиомы сложения $(a, b \to a + b)$

1. $a + b = b + a \quad \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\ \boldsymbol{0} \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad \forall\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\ \exists\ (-\boldsymbol{a}) :\ \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, $(-\boldsymbol{a})$ называется *противоположным* числом для a.

(II) Аксиомы умножения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{ab})$

1. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba} \quad \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ (коммутативность)*;*
2. $a(bc) = (ab)c \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность)*;*
3. $\exists\ 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0 : a1 = a\ \forall\ a \in \mathbb{R}$*;*
4. $\forall\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ \exists\ \frac{1}{a} :\ a\frac{1}{a} = 1$, ($\frac{1}{a}$ называется *обратным* числом для a).

(I–II) Связь сложения и умножения

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc} \ \forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

(III) Аксиомы порядка ($\forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ установлено отношение $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{a}$)

1. $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad \forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$;
2. $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{a} \le \boldsymbol{c} \quad \forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ записывается также в виде $\boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ при $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{b}$ **записывается в виде** $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **и** $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$.

(I–III) Связь сложения и порядка

1. $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \le \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \ \forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$.

(II–III) Связь умножения и порядка

1. $\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{ab} \ \forall \ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

(IV) Аксиома непрерывности $\mathbf{IV_D}$ (вариант принципа Дедекинда)

Пусть A, B – непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \qquad \forall \, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall \, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}.$$

Тогда $\exists \ c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{c} \le \boldsymbol{b} \qquad \forall \, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall \, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}.$$

1.3 Верхние и нижние грани

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным сверху*** (***снизу***), если существует число b (число a) такое, что

$$x \le b \ \forall \ x \in X \ (x \ge a \ \forall \ x \in X).$$

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным***, если оно ограниченно сверху и снизу.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***неограниченным*** (сверху, снизу), если оно не является ограниченным (сверху, снизу).

Определение. ***Верхней гранью*** непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

1 $x \le b \ \forall x \in X$;
2 $\forall \ b' < b \ \exists \ x_{b'} \in X : \ x_{b'} > b'$ *или иначе*:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > b - \varepsilon.$$

Определение. ***Нижней гранью*** непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число a, удовлетворяющее условиям:

1 $x \ge a \ \forall x \in X$;
2 $\forall \ a' > a \ \exists \ x_{a'} \in X : \ x_{a'} < a'$ *или иначе*:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < a + \varepsilon.$$

Верхняя и нижняя грани множества X обозначаются соответственно символами $\sup X$, $\inf X$.

Теорема (единственности). Числовое множество не может иметь больше одной верхней (нижней) грани.

Теорема (о существовании верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Определение. ***Расширенным множеством действительных чисел*** $\overline{\mathbb{R}}$ называется $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, то есть элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и еще два элемента: $-\infty$, $+\infty$.

Во множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так:

$$-\infty < a,\ a < +\infty,\ -\infty < +\infty \quad \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

Теорема (принцип Архимеда). Для $\forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > a$.

Теорема (принцип математической индукции). Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ обладают свойствами:

1 $A \ni 1$;

2 $A \ni n \Rightarrow A \ni (n+1)$.

Тогда $A = \mathbb{N}$.

1.4 Счетные и несчетные множества

Определение. Будем говорит, что между двумя множествами X и Y ***установлено взаимно однозначные соответствие*** и писать $X \leftrightarrow Y$, если:

1 $\forall\ x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;

2 если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;

3 $\forall\ y \in Y\ \ \exists\ x \in X\ :\ x \to y$.

Определение. Два множества X и Y называются ***эквивалентными*** (пишут $X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Определение. Множество называется ***счетным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, иначе говоря, если его можно занумеровать всеми натуральными числами.

Теорема. Множество рациональных чисел счетно.

Теорема (Кантор). Множество всех точек отрезка [0; 1] несчетно.

1.5 Функции

Определение. Декартовым (или прямым) произведением множеств A и B называется множество $A\times B$, состоящее из всех упорядоченных пар, у которых первая координата принадлежит множеству A, вторая – множеству B, т. е.

$$A\times B=\{(x;y)|x\in A\, и\ y\in B\}.$$

Для операции декартова произведения множеств ***закон коммутативности не выполняется*** $A\times B\neq B\times A$.

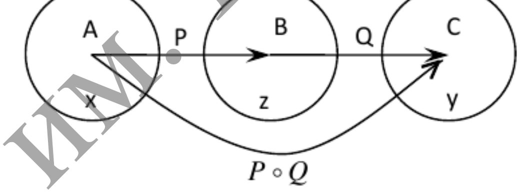
Определение. Бинарным отношением между множествами A и B называется любое подмножество декартова произведения $A\times B$.

Бинарные отношения – это множества упорядоченных пар. Следовательно, над ними можно выполнять любые теоретико-множественные операции. Определим еще две операции над отношениями.

Определение. Отношением P^{-1}, ***обратным к отношению*** $P\subseteq A\times B$, называется подмножество прямого произведения $B\times A$ такое, что $P^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in P\}$.

Определение. ***Композицией*** (суперпозицией) ***отношений*** $P\subseteq A\times B$ и $Q\subseteq B\times C$ называется множество

$$P\text{o}Q=\{(x,y)\mid x\in A, y\in C \wedge (\exists z\in B):(x,z)\in P,(z,y)\in Q\}.$$



Определение. Пусть каждому $x\in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y\in Y$. Будем говорить, что на множестве X задана ***функция*** со значениями в Y.

Определение. Элемент $x\in X$ называется ***аргументом*** или независимой переменной, элемент $y=f(x)\in Y-$ значением функции или ***зависимой*** переменной.

Определение. Множество X называют ***областью определения функции*** $f(x)$, $Y_f=\{y: y=f(x), x\in X\}\subset Y$ − ***областью значений функции*** $f(x)$.

Определение. Подмножество $E\subset X$ такое, что $f(E)\coloneqq\{y: y=f(x),\ x\in E\}$ называется ***образом*** $E, f(x)=Y_f$.

Определение. Подмножество $D\subset Y$ такое, что $f^{-1}(D)\coloneqq\{x: x\in X$ $f(x)\in D\}$ называется ***полным прообразом*** D.

Определение. При $E \subset X$ функция $f_E: E \to Y, f_E(x) \coloneqq f(x)$ при $x \in E$ называется ***сужением (ограничением, следом)*** функции $f(x)$ на E.

Определение. ***Графиком*** функции $f(x): X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x)): x \in X\}$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на X, а функция $\varphi(t)$ – на T, причем $\varphi(T) \subset X$. Тогда ***сложная функция (суперпозиция, композиция)*** $f \circ \varphi$ определяется на T формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \ \ t \in T.$$

Определение. Функция называется ***числовой***, если ее значениями являются действительные числа.

Определение. Числовая функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется ***ограниченной*** (сверху, снизу), если множество ее значений $f(X)$ ограничено (сверху, снизу).

Определение. $\sup f \coloneqq \sup f(X)$ $(\inf f \coloneqq \inf f(X))$ называется ***верхней (нижней) гранью числовой функции***.

Рассмотрим (числовую) функцию $f : X \to Y_f$, заданную на (числовом) множестве X. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Такая функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow Y_f$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y_f$ именно то (единственное) значение $x \in$ X, для которого $f(x) = y$, обозначим полученную функцию символом $f^{-1} : Y_f \to X$.

Определение. Функция f^{-1} называется ***обратной функцией*** по отношению к f.

В силу ее определения

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X,$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y_f.$$

Лемма. Пусть функция $f : X \to Y_f$ строго монотонна на X. Тогда обратная функция $f^{-1} : Y_f \to X$ также строго монотонна.

Основными ***элементарными функциями*** называются функции: постоянная $y = c$, $(c - \textit{константа})$, степенная $y = x^\alpha$, показательная $y = a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $y = log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = sin\, x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ и обратные тригонометрические y = $\arcsin x$, y = $\arccos x$, $y = arctgx, y = arcctgx$.

Элементарной функцией называется всякая функция, представимая с помощью конечного числа арифметических действий и композиций основных элементарных функций.

Элементарные функции разбивают на следующие ***классы***.

(I) Многочлен (полиномы)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

(II) Рациональные функции (рациональные дроби)

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены, $Q(x) \not\equiv 0$.

(III) Иррациональные функции

Иррациональной называется функция, не являющаяся рациональной, которая может быть задана с помощью композиции конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий.

(IV) Трансцендентные функции

Элементарные функции, не являющиеся ни рациональными, ни иррациональными функциями, называются ***трансцендентными*** функциями. Все тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

2 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

2.1 Определение предела последовательности

Определение. Пусть A – произвольное множество и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a \in A$. Тогда говорят, что задана ***последовательность***

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если для $\forall\ \ \varepsilon > 0\ \exists\ \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \ \forall\ n \geq n_\varepsilon\ |a - a_n| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Определение. Последовательность называется ***сходящейся***, если она имеет конечный (т. е. принадлежащий $\mathbb{R}$) предел. В противном случае последовательность называется ***расходящейся***.

Теорема (единственности). Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Определение. $e \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Число e – иррациональное число, десятичная запись которого $e = 2{,}718\ldots$

2.2 Свойство пределов, связанные с неравенствами

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной*** (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если множество значений ее элементов ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу):

$$\exists\ b \in \mathbb{R} : |a_n| \le b\ (a_n \le b, a_n \ge b) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема. Сходящаяся последовательность ограничена. Обратно неверно.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, |a_n| \le b \implies |a| \le b.$

2.3 Свойство пределов, связанные с арифметическими операциями

Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, b \in \mathbb{R}$. Тогда

1 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = ab$;

3 если $b_n \ne 0\ (\forall\, n \in \mathbb{N}), b \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Лемма. Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Арифметические свойства пределов последовательностей не переносятся на бесконечно большие последовательности.

2.4 Предел монотонной последовательности

Определение. ***Верхней*** (нижней) ***гранью последовательности*** называется верхняя (нижняя) грань множества значений ее элементов. При этом используются обозначения соответственно $sup\{a_n\}$, $inf\{a_n\}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***строго возрастающей*** (строго убывающей), если

$$a_n < a_{n+1} (a_n > a_{n+1})\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема. Всякая возрастающая последовательность $\{a_n\}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. Этот предел конечен (т. е. является числом), если последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, и равен $+\infty$, если последовательность не ограничена сверху.

2.5 Подпоследовательности

Определение. Пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\}=\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется ***подпоследовательностью последовательности*** $\{a_n\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма. Отбрасывание конечного числа первых членов последовательности не влияет ни на сходимость, ни на величину предела (в случае сходимости).

Определение. ***Частичным пределом*** последовательности называется предел какой-либо ее подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение. ***Частичным пределом*** последовательности называется элемент $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$, любая окрестность $U(\mu)$ которого содержит бесконечное число элементов последовательности.

Лемма. Последовательность имеет единственный в $\overline{\mathbb{R}}$ частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение. ***Верхним*** (нижним) ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$ называется наибольший (наименьший) в $\overline{\mathbb{R}}$ из ее частичных пределов.

2.6 Теоремы Больцано-Вейерштрасса, Коши

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Теорема. Всякая подпоследовательность имеет (в $\overline{\mathbb{R}}$) верхний и нижний пределы.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***фундаментальной,*** если для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall \ n, m \geq n_\varepsilon .$$

Теорема (критерий Коши). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

3 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

3.1 Понятие предела функции

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, $\widehat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $U_{\boldsymbol{\varepsilon}}(a)$ $-$ ε-окрестность точки a при $\varepsilon > 0$, $U(a)$ $-$ некоторая окрестность точки a.

$$\dot{U}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \coloneqq U_{\boldsymbol{\varepsilon}}(a)\backslash\{a\},\ \ \dot{U}(a) \coloneqq U(a)\backslash\{a\}$$

называются ***проколотыми окрестностями*** точки a (точкой будет называть как число, так и любой из элементов $-\infty, +\infty, \infty$).

Определение 1′. Пусть функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции $f(x)$*** при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Определение 1″. Пусть функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции $f(x)$** при $x \to a$, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(x) \in U_\varepsilon(A)\ \textit{при}\ x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции $f(x)$** при $x \to a$, если

$$\forall\ \ U(A)\ \exists\ U(a)\ : f\left(\dot{U}(a)\right) \subset U(A).$$

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется **пределом функции $f(x)$** при $x \to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$ при любой последовательности $\{x_n\} : x_n \in \dot{U}_{\boldsymbol{\delta_0}}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции). Пусть функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$**.** Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon\quad \forall\ \ x', x'' \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0).$$

Теорема. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$, функция $f(x)$ возрастает на (a, b). Тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ монотонна на $(a, b) \ni x_0$. Тогда существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

3.2 Свойства пределов функции

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h\,(x)$ определены на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ $f(x) \to A$, $h(x) \to A$, при $x \to a$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $g(x) \to A$ при $x \to a$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на $\dot{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, где $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

1 $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$;

3 если дополнительно $g(x) \ne 0$ при $x \in \dot{U}_{\delta_0}(a), B \ne 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

3.3 Односторонние пределы

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Множество $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0]$ называют ***левой полуокрестностью точки x_0*** радиуса δ. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Множество $U_\delta(x_0 + 0) = (x_0, x_0 + \delta]$ называют ***правой полуокрестностью точки x_0*** радиуса δ. Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность x_0 произвольного радиуса.

Проколотыми полуокрестностями называют соответственно

$\dot{U}_\delta(x_0 - 0) = U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0)$,
$\dot{U}(x_0 - 0) = U(x_0 - 0) \setminus \{x_0\}$,
$\dot{U}_\delta(x_0 + 0) = U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\} = (x_0, x_0 + \delta)$,
$\dot{U}(x_0 + 0) = U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}$.

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(x_0 - 0)$. Тогда $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется **пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0** (пишут $f(x_0 - 0) := \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0), \; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяется предел справа функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$.

Лемма. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $f(x)$ определена на $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$. Тогда для существования $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно существования каждого из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и их равенства

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

3.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$ или является одним из символов $+\infty$, $-\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Функция $f : U(a) \to \mathbb{R}$ называется ***бесконечно малой*** (бесконечно большой) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty\right)$.

Определение. Пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|f(x)| \le C|g(x)| \quad \forall \; x \in \dot{U}(a).$$

Тогда пишут: $f = O(g)$ при $x \to a$.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***функциями одного порядка*** при $x \to a$, если $f = O(g), g = O(f)$ при $x \to a$.

При этом пишут при $f(x) \asymp g(x),\; x \to a$.

Лемма. Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$.Тогда $f(x)$ и $g(x)$ являются функциями одного порядка при $x \to a$.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***эквивалентными (асимптотически равными)*** при $x \to a$ (записывается $f \sim g$ при $x \to a$), если $f(x) = \lambda(x) g(x),\; x \in \dot{U}(a)$, причем $\lim_{x\to a} \lambda(x) = 1$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1 $f \sim g$ при $x \to a \;\Rightarrow g \sim f$ при $x \to a$ (*симметрия*);
2 $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a \;\Rightarrow f \sim h$ при $x \to a$ (*транзитивность*).

Лемма. Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.

Определение. Функция g называется ***бесконечно малой по сравнению с функцией f*** при $x \to a$ (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \dot{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Если при этом функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция $g(x)$ является ***бесконечно малой более высокого порядка***, чем функция $f(x)$. Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема. Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

4 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1 Непрерывность функции в точке

Будем считать, что функция $f(x)$ определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad \Delta x = x - x_0.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполняется какое-либо из следующих условий:

1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

2 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$; (т. е. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции);

3 для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall\ x :$ $|x - x_0| < \delta$;

4 для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$;

5 для $\forall\ U(f(x_0))\ \exists\ U(x_0) :\ f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))$;

6 для $\forall\ \{\boldsymbol{x_n}\} :\ \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{U(x_0)},\ \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x_0}$ ($\boldsymbol{n} \to \infty$) имеет место $\boldsymbol{f(x_n)} \to \boldsymbol{f(x_0)}$ ($\boldsymbol{n} \to \infty$).

Теорема (о сохранении знака). Пусть $f(x)$ непрерывна в x_0, $f(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists\ U(x_0) :\ sign\, f(x) = sign\, f(x_0)\ \ \forall\ x \in U(x_0)$.

Теорема (свойства непрерывных функций). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$, fg, а при $g(x_0) \neq 0$ – и $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.

4.2 Предел и непрерывность сложной функции

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $\varphi(t)$ определена на $\dot{U}(t_0)$ и $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда

$$\exists\ \lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = f\left(\lim_{t \to t_0} \varphi(t)\right) = f(x_0).$$

Теорема. Пусть $\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Пусть φ(t) определена на $\dot{U}(t_0)$, φ($\dot{U}(t_0)$) $\not\ni\ x_0$ *и* $\exists\ \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда $\exists\ \lim\limits_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = y_0$.

4.3 Односторонняя непрерывность и точки разрыва

Определение. Функция $f(x)$, определенная на $U(x_0+0)$ $(U(x_0-0))$, называется ***непрерывной справа*** (слева) в точке x_0, если $\exists\, f(x_0+0)=f(x_0)$ $\big(\exists\ f(x_0-0)=f(x_0)\big)$.

Определение. Функция $f\colon X\to\mathbb{R}$, $X\supset\dot{U}(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$, называется ***разрывной в точке*** x_0, если она не определена в x_0 или если определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение. Точка x_0 разрыва функции $f(x)$ называется ***точкой разрыва I-го рода***, если существует конечные пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$. При этом разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Если при этом $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, т.е. скачок равен нулю, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется ***точкой разрыва II-го рода***.

4.4 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция, определенная на отрезке $[a,b]$ и непрерывная в каждой его точке, ***называется непрерывной на этом отрезке***. При этом под непрерывностью в точках a, b понимается соответственно непрерывность справа и слева.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на E, если ***достигает своей верхней*** (нижней) ***грани***, если

$\exists\ x_0\in E\ :\ f(x_0)=sup_E f\quad (f(x_0)=inf_E f)$.

Теорема (Вейерштрасса). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает своей верхней и нижней граней.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x)>0\ \forall\ x\in[a,b]$. Тогда

$$\exists\ d>0\ :\ f(x)\geq d\ \ \forall\ x\in[a,b].$$

Теорема (Больцано-Коши о промежуточном значении функции). Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)=A, f(b)=B$. Пусть C находится между A и B. Тогда $\exists\ \xi\in[a,b]\ :\ f(\xi)=C$.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда $\exists\ \xi\in(a,b)\ :\ f(\xi)=0$.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $m=min_{[a,b]}f$, $M=max_{[a,b]}f$. Тогда функция $f(x)$ принимает все значения из $[m,M]$ и только эти значения.

4.5 Непрерывность обратных и основных элементарных функций

Теорема. Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a,b]$, строго возрастает и непрерывна. Тогда обратная функция задана на отрезке $[A,B] = [min_{[a,b]}f,\ max_{[a,b]}f]$, строго возрастает и непрерывна.

Теорема. Пусть функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ задана на интервале (a,b), строго возрастает и непрерывна. Тогда обратная функция задана на интервале $(A,B) = (inf_{(a,b)}f,\ inf_{(a,b)}f)$, строго возрастает и непрерывна.

Теорема. Показательная функция $x \to a^x > 0 : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$ непрерывна на области определения $(-\infty,+\infty)$.

Теорема. Логарифмическая функция $\log_a x : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ непрерывна на области определения $(0,+\infty)$.

Теорема. Степенная функция $x \to x^\alpha : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ непрерывна на области определения $(0,+\infty)$.

Теорема. Функции $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$ непрерывна на областях их определения.

Теорема. Функции $\arcsin x$, arctgx, arcctgx, $\arccos x$ непрерывны на областях их определений. При этом непрерывность $\arcsin x, \arccos x$ в концах отрезков – областей их определений, понимается как односторонняя.

4.6 Некоторые замечательные пределы

1°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1.$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = 1.$

4°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1.$

5°. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

6°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \ \ (a > 0,\ a \neq 1).$

7°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (частный случай 6°).

8°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ \ (a > 0,\ a \neq 1).$

9°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ (частный случай 8°).

5 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

5.1 Производная

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется ***производной функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$.

Теорема (свойства производных, связанные с арифметическими операциями). Пусть существует $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Тогда:

1 $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2 $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, в частности, $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

3 если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\exists \ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Таблица 1. – Производные элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = c$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x$	$y' = \alpha^x \ln a$	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$
$y = \mathrm{sh}\, x$	$y' = \mathrm{ch}\, x$	$y = \mathrm{th}\, x$	$y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$y = \mathrm{ch}\, x$	$y' = \mathrm{sh}\, x$	$y = \mathrm{cth}\, x$	$y' = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

5.2 Дифференциал

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть ее приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

при $A \in \mathbb{R}$.

Тогда функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x_0, а линейную функцию $df(x_0) = A\Delta x$ $(-\infty < \Delta x < +\infty)$ − ***дифференциалом функции*** $f(x)$ в точке x_0.

Теорема. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f^{'}(x_0)$. При этом $A = f^{'}(x_0)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда она непрерывна в точке x_0.

Теорема (арифметические свойства дифференциалов). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f \pm g, fg$, и в случае $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ также дифференцируемы в точке x_0, причем в этой точке

1 $d(f \pm g) = df + dg$;
2 $d(fg) = gdf + fdg$;
3 $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$.

5.3 Геометрический смысл производной и дифференциала

Проведем секущую M_0M_h через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$, $h \neq 0$, графика функции $y = f(x)$.

Уравнение секущей M_0M_h имеет вид

$$y = k(h)(x - x_0) + y_0, \text{ где } y = f(x_0),\ k(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Устремим h к нулю. Тогда точка M_h будет стремиться к M_0, секущая будет поворачиваться, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда существует

$$f^{'}(x_0) : k(h) \to k_0 = f^{'}(x_0).$$

Прямую, проходящую через точку графика $(x_0, f(x_0))$ и являющуюся «предельным положением секущей», называют ***касательной прямой***.

Если предельного положения не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является точкой ***излома*** *или* ***заострения*** кривой.

Определение. Пусть существует $f^{'}(x_0)$. ***Касательной*** к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, (f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f^{'}(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

Теорема. Пусть функция $f\,(x)$ определена в $U(x_0)$ и существует $f^{'}(x_0)$. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$ $\Big(y_{\text{пр}} = \lambda(x - x_0) + y_0,\ y_0 = f(x_0)\Big)$, касательная к графику функции $f(x)$ и только она обладает свойством

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Определение. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to +\infty\ (-\infty, \infty)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда говорят, что $f(x)$ имеет ***бесконечную производную*** в точке x_0,

$$f^{'}(x_0) = +\infty\ (-\infty, \infty)$$

и что график функции $f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ вертикальную касательную $x = x_0$.

5.4 Производная обратной и сложной функций

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в $U(x_0)$, $f^{'}(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $(f^{-1})^{'}(y_0) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}$.

Теорема. Пусть $\exists\ \ f^{'}(y_0),\ \varphi^{'}(x_0),\ y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\exists\ \left(f(\varphi)\right)^{'}(x_0) = f^{'}(y_0)\varphi^{'}(x_0).$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f\big(\varphi(x)\big)$, где функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные $f^{'}(x_0)$, $\varphi^{'}(u_0)$, $u_0 = \varphi(x_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$dy = f^{'}(u_0)\varphi^{'}(x_0)dx.$$

С другой стороны, $du = \varphi^{'}(x_0)dx$, поэтому можно записать

$$dy = f^{'}(u_0)du,$$

где $du -$ дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал dy имеет ту же форму, как если бы u было независимой переменной. Это свойство называется ***инвариантностью формы первого дифференциала***.

Пусть $y(x)$ произвольная параметрически заданная функция в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Будем считать, что $\varphi(t)$ непрерывна и строго монотонна на $U(t_0)$ и что существуют производные $\psi^{'}(t_0)$, $\varphi^{'}(t_0)$. Тогда $t = \varphi^{-1}(x_0)$, где

$$x_0 = \varphi(t_0), \qquad y = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big).$$

Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \psi^{'}(t_0)\frac{1}{\varphi^{'}(t_0)} = \frac{\psi^{'}(t_0)}{\varphi^{'}(t_0)}.$$

Пусть неявно заданная функция задана уравнением $F(x_0, y_0) = 0$, которое имеет для каждого $x \in U(x_0)$ решение $y = f(x)$, так что

$$F\big(x, f(x)\big) = 0 \quad \forall\ \ x \in U(x_0).$$

При это говорят, что функция f *неявно задана* уравнением $F\big(x, f(x_0)\big) = 0$.

Предполагая, что $f(x)$ дифференцируема на $U(x_0)$ и что левая часть тождества $F\big(x, f(x_0)\big) \equiv 0$ представляет дифференцируемую функцию, продифференцируем это тождество почленно. Выразив $f'(x)$, мы найдем тем самым производную неявно заданной функции.

5.5 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f\ (x)$ определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f^{'}(x), x \in U(x_0)$. Если производная $f^{'}(x)$ сама является функцией переменного x, то эту производную $(f^{'})^{'}(x_0)$ называют ***второй производной*** в точке x_0 и обозначают $f^{''}(x_0)$.

Производная порядка $\boldsymbol{n}$ функции $\boldsymbol{f}(x)$ определяется равенством

$$\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)^{'}\Big|_{x=x_0} \quad (n \geq 1).$$

Теорема (свойства производных высших порядков). Пусть существуют $f^{(n)}(x_0),\ g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке (x_0)

1 $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.

2 **(Формула Лейбница)**

$$\exists\ (fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots + f g^{(n)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Определение. ***Вторым дифференциалом*** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$d^2 f(x_0) := \delta(df)(x_0)|_{\delta x = dx} = \delta(f^{'}(x)dx)(x_0)|_{\delta x = dx}$$
$$= (f^{'}(x)dx)^{'}(x_0)\delta x|_{\delta x = dx} = f^{''}(x_0)(dx)^2.$$

Определение. ***$\boldsymbol{n}$-м дифференциалом функции $\boldsymbol{f}(x)$*** в точке x_0 называется

$$d^n f(x_0) := \delta(d^{n-1} f)(x_0)|_{\delta x = dx}.$$

В случае $n = 2$ имеем $d^2 f(x) = f^{''}(x)(dx)^2 + f^{'}(x) d^2 x$. Сравнивая полученное выражение с предыдущей формулой при $n = 2$, убеждаемся, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы

6 СВОЙСТВО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

6.1 Теоремы о среднем

Теорема (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Пусть $\exists\ f^{'}(x_0)$. Тогда $f^{'}(x_0) = 0$.

Теорема (Ролля). Пусть функция $f(x)$:

1 непрерывна на $[a, b]$;

2 дифференцируема на (a, b);

3 $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists\ \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

Теорема (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$:

1 непрерывна на $[a,b]$;

2 дифференцируема на (a,b).

Тогда $\exists\ \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Теорема (Коши). Пусть функции $f(x), g(x)$:

1 непрерывны на $[a,b]$;

2 дифференцируемы на (a,b);

3 $g' \neq 0$ на (a,b).

Тогда справедлива формула конечных приращений Коши:

$$\exists\ \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

6.2 Формула Тейлора

Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(f,x) = P_n(f,x) + r_n(f,x), \qquad (1)$$

которое называется ***формулой Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0. При этом $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется ***k-м членом*** формулы Тейлора, $P_n(f,x) -$ ***многочлен Тейлора***, $r_n(f,x) -$ ***остаточным членом*** формулы Тейлора (после n-го члена).

Часто вместо $P_n(f,x), r_n(f,x)$ пишут соответственно $P_n(x), r_n(x)$.

Лемма. Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$, $\exists\ f'$ в $\dot{U}(x_0)$. Тогда в $\dot{U}(x_0)$

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x).$$

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула (1), в которой $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть $x > x_0$ $(x < x_0)$ $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ $([x,x_0])$, $\exists\ f^{(n+1)}$ на интервале (x_0,x) $\big((x,x_0)\big)$. Тогда справедлива формула (1), в которой

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Теорема (единственности). Пусть в $\dot{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ ... + \ b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$. Тогда $a_0 = b_0,\ \ a_1 = b_1, \dots ,\ \ a_n = b_n$.

Примеры разложений по формуле Тейлора.

1°. $f(x) = e^x, x_0 = 0$. Имеем $f^{(k)}(x) = e^x$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

где при $0 < \theta < 1$ $\ r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = O(x^{n+1}) = o(x^n)$при $x \to 0$.

2°. $f(x) = \sin x\ , x_0 = 0$. Имеем $\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty} = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$. Здесь выписан остаточный член после равного нулю $(2n + 2)$-го члена формулы Тейлора.

3°. $f(x) = \cos x, x_0 = 0$. Аналогично разложению для $\sin x$получаем

$$\cos x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \ \text{при } x \to x_0.$$

4°. $f(x) = \ln(1 + x)\ ,\ x_0 = 0$. Имеем

$$f^{'}(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1},$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!\,(1 + x)^{-k},$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + 1} \frac{x^{n+1}}{(1 + \theta x)^{n+1}} = o(x^n) \ \text{ при } x \to 0.$$

5°. $f(x) = (1 + x)^{\alpha},\ x_0 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f^{(k)}(x) = (\alpha)(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha - k},$$

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$
$$+ o(x^n), \text{ при } x \to 0\ , \text{ где } 0 < \theta < 1$$

Формулу Тейлора в случае $x_0 = 0$ называют еще *формулой Маклорена.*

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$

1 определены и дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a;

2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3 $g(x)$ и $g^{'}(x) \neq 0$ в этой окрестности;

4 существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

тогда существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

7.1 Монотонность и экстремум функции

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b).Тогда

1) условие $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b) необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на (a, b);
2) условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) достаточно, чтобы функция $f(x)$ строго возрастала (строго убывала) на (a, b).

Определение. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума*** (минимума) функции $f(x)$, если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \ \big(f(x) > f(x_0)\big).$$

Значение $f(x_0)$ называют ***локальным максимумом*** (***минимумом***) функции и пишут

$$max_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0) \ (min_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) = f(x_0))$$

Точки максимума или минимума называют ***экстремумами функции***.

Наибольшее и наименьшее значения функции на $[a; b]$ называют ***абсолютным максимумом и минимумом*** и пишут

$$max_{x \in [a;b]} f(x) = f(x_0) \ (min_{x \in [a;b]} f(x) = f(x_0))$$

Теорема (Ферма) (необходимые условия экстремума). Пусть $x_0 -$ точка экстремума функции $f(x)$. Тогда производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, называются ***критическими точками*** (***или точками возможного экстремума***). Точки, в которых производная обращается в нуль, называются ***стационарными точками***.

Критическая точка x_0 называется ***угловой точкой функции*** $f(x)$, если $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$. Критическая точка x_0 называется ***точкой возврата функции*** если $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ бесконечны.

Теорема (достаточные условия строгого экстремума). Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $\dot{U}(x_0)$. Пусть $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда $x_0 -$ точка строгого экстремума.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой возрастания*** *(убывания)* функции $f(x)$, если в некоторых полуокрестностях точки x_0

$$\begin{cases} f(x)-f(x_0)<0 \text{ в } \dot{U}(x_0-0), \\ f(x)-f(x_0)>0 \text{ в } \dot{U}(x_0+0) \end{cases} \left(\begin{cases} >0 \text{ в } \dot{U}(x_0-0), \\ <0 \text{ в } \dot{U}(x_0+0) \end{cases} \right).$$

Теорема. Пусть $f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда

1) при четном $n=2k$ $x_0 -$ точка строгого экстремума (строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0)>0$, строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0)<0$);
2) при нечетном $n=2k+1$ $x_0 -$ точка возрастания (точка убывания) при $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ (при $f^{(2k+1)}(x_0)<0$);

7.2 Выпуклость и точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вниз (или вогнутым)*** на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)\ \forall\, x\in(a;b)$ расположена выше любой касательной, проведенной к графику этой функции.

Определение. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вверх (или выпуклым)*** на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)\ \forall\, x\in(a;b)$ расположена ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции.

Интервал (a,b) называется при этом соответственно ***интервалом выпуклости вверх, выпуклости вниз*** функции $f(x)$.

Определение. Точка $M(x_0,f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется, ***точкой перегиба***.

Теорема (условия выпуклости функций). Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0\ \forall x\in(a;b)$, то график этой кривой вогнутый (выпуклый вниз). Если $f''(x)<0$ $\forall\ x\in(a;b)$, то график этой кривой выпуклый (выпуклый вверх) на $(a;b)$.

Теорема (необходимые условия точки перегиба). Пусть $x_0 -$ точка перегиба функции и $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда $f''(x_0)=0$.

Теорема (достаточные условия точки перегиба). Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в ноль или не существует и при переходе через неё меняет свой знак, то точка $M(x_0,f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

7.3 Асимптоты

Определение. ***Асимптотой*** графика функции называется такая прямая, для которой расстояние между графиком и точкой прямой стремится к нулю по мере удаления точки от начала координат.

Различают асимптоты ***горизонтальные, вертикальные и наклонные***.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty.$$

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной*** (если $k = 0$ − горизонтальной асимптотой) графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Теорема. Для того, чтобы график функции $f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + l$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

8 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на $\langle a, b\rangle$. Функция $F(x)$ называется ***первообразной для $\boldsymbol{f(x)}$*** *на* $\langle a, b\rangle$, если $F^{'}(x) = f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. При этом в случае $a \in \langle a, b\rangle$ или $b \in \langle a, b\rangle$ производные $F^{'}(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Определение. Операция перехода от данной функции к ее первообразной называется ***(неопределенным) интегрированием***. При этом функции $f(x)$ ставится в соответствие некоторая конкретная произвольно выбранная первообразная. Эта первообразная называется ***неопределенным интегралом функции $\boldsymbol{f(x)}$*** и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Общий вид неопределенного интеграла для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования, $F(x)$ — некоторая конкретная первообразная, а C – произвольная постоянная интегрирования.

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

1. производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

2. неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x) + C$;

3. постоянный множитель $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

4. неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm \cdots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx;$$

5. *(инвариантность формул интегрирования*) любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int f(u)du = F(u) + C$$

где u – дифференцируемая функция.

Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C, a > 0,\ a \neq 1.$
3. $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$
5. $\int sinxdx = -cosx + C.$
6. $\int cosxdx = sinx + C.$
7. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C.$
8. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C.$

9. $\int shxdx = chx + C$.

10. $\int chxdx = shx + C$.

11. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$.

12. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C\,, a \neq 0$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C\,, a \neq 0$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\,, |x| > |a|, a \neq 0$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C\,, |x| < |a|, a \neq 0$.

17. $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C\,, a \neq 0$.

18. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C\,, a \neq 0$.

8.2 Методы интегрирования

Теорема (интегрирование по частям). Пусть на некотором промежутке функции u, v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)dx$. Тогда на этом промежутке

$$\exists \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx + C\,.$$

Теорема (интегрирование заменой переменной). Пусть функция $f(x)$ имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную, функция $\varphi\colon \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha, \beta\rangle$

$$\exists \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Формулу называют формулой ***интегрирования подстановкой*** (в интеграл $\int f\big(\varphi(t)\big)d\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)$ подставляют x, вычисляют $\int f(x)dx$ и затем возвращаются к переменной t), ее удобно запомнить в виде

$$\int f\big(\varphi(t)\big)d\varphi(t) = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Если в условиях теоремы дополнительно предположить, что функция $\varphi(t)$ строго монотонна, то на промежутке $\langle \xi, \eta\rangle = \varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$ существует обратная функция φ^{-1}. Тогда из теоремы следует, что на промежутке $\langle \xi, \eta\rangle$

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C.$$

Эту формулу называют формулой ***замены переменной в неопределенном интеграле***.

8.3 Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.

Поэтому вопрос интегрирования рациональных дробей сводится к вопросу интегрирования простейших дробей.

Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$ с помощью подстановки $t = x - a$ сводится к табличному интегралу.

Для вычисления интеграла $I_1 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ представим квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ в виде $(x+\frac{p}{2})^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и совершив в I_1 подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_1 = \int \frac{M + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2}dt + C_1 =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} + C_2$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (N - \frac{Mp}{2})\frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1} + C_3$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{t}{a} + C_3$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_3.$$

Замечание. Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от t, после их вычисления вместо t следует поставить $t = x + \frac{p}{2}$.

Вычислим при $n \geq 2$ интеграл

$$I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.$$

Первый из интегралов правой части сводится подстановкой к табличному. Остается вычислить интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left((t^2+a^2)-t^2\right)dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1$$
$$= \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int t\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, считая $u = t,\ v' = \frac{2t}{(t^2+a^2)^n}\ , v = \frac{-1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$.

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + C_3.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C_3.$$

Зная

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} + C' = \frac{1}{2} arctg\,\frac{t}{a} + C.$$

мы уже может по этой формуле найти последовательность $J_2, J_3, \ldots$

8.4 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Функции вида

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)},$$

где $P,\ Q$ —многочлены от переменных $u_1, \ldots, u_n$, называются ***рациональными функциями*** *от* $u_1, \ldots, u_n$.

1. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ldots, r_s$ − рациональные числа.

Запишем r_i в виде $r_i = \frac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N},\ p_i$ − целые числа (i = 1, 2, … , s).

Введем новую переменную t :

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Тогда $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ − рациональная функция, $dx = \rho'(t)dt$. Производя замену переменной в I, получаем

$$I = \int R\left(\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)^{r_1}, t^{p_1}\ \ldots, t^{p_s}\right)\rho'(t)\,dx + C,$$

где под знаком интеграла стоит рациональная функция от t, интеграл от которой мы умеем находить.

2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера.*

Случай 1. $a > 0$.

Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, откуда $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

Случай 2. Корни x_1, x_2 трехчлена $ax^2 + bx + c$ действительны.

Если $x_1 = x_2$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - x_1|\sqrt{a}$.

Если $x_1 \neq x_2$, то можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Случай 3. $c > 0$.

Применяется замена x на t, определяемая формулой

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

3.° *Интегралом от биноминального дифференциала* называется

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

($a \neq 0, b \neq 0, m, n, p -$рациональные). Применив замену

$$x = t^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1},$$

получаем

$$I = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+n}{n}} dt + C,$$

так что вопрос сводится к нахождению интеграла вида ($q = \frac{m+1}{n} - 1$)

$$I = \int (a + bt)^p\, t^q dt \quad (p, q - \text{рациональные}).$$

Этот интеграл в трех случаях сводится к интегралу от рациональной дроби.

Случай 1: $p -$ целое число.

Случай 2: $q -$ целое число.

Случай 3: $p + q -$ целое число.

Итак, интеграл I сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых $p, \frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$.

В других случаях интеграл не является элементарной функцией, что было доказано П.Л. Чебышевым.

4°. Интеграл вида $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой

$$u = tg\frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Другие подстановки $u = \sin x,\ u = \cos x,\ u = tg\, x$ иногда приводят к нужной цели при менее громоздких вычислениях. Например, $\int sin^{\,m} x, cos^n x\, dx$ ($m, n -$ рациональны) подстановкой $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от биноминального дифференциала.

5. Некоторые интегралы от трансцендентных функций вычисляются интегрированием по частям:

$$\int a^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{Bmatrix}, \quad \int x^n\varphi(x)dx,$$

где
$n\in\mathbb{N}, \varphi(x)=\cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{\alpha x}, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx, lnx.$

9 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1 Определенный интеграл

Определение. ***Разбиением τ*** отрезка $[a,b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{i_\tau-1}<x_{i_\tau}=b.$$

Каждый из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ называется ***отрезком разбиения τ***, $\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$. Величина $|\tau|\coloneqq\max_{1\le i\le i_\tau}\Delta x_i$ называется ***мелкостью разбиения*** **τ.**

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена (числовая) функция $f(x)$ и $\tau=\{x_i\}_0^{i_\tau}$ – разбиение этого отрезка. Отметив в каждом отрезке разбиения $[x_{i-1},x_i]$ какую-либо точку ξ_i, составим сумму

$$S_\tau(f;\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau})=\sum_{i=1}^{i_\tau}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую ***интегральной суммой Римана*** функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ неотрицательна, слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ суммы Римана равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1},x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, а вся сумма − площади ступенчатой фигуры, образованной объединением всех таких прямоугольников.

Определение. Число I называется ***определенным интегралом Римана*** *функции на отрезке* $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, если для любого ε > 0 существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{i_\tau}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$$

для любых τ с мелкостью $|\tau|<\delta$ и любого набора отмеченных точек $\xi_1,\dots,\xi_{i_\tau}$.

Функцию $f(x)$ при этом называют ***интегрируемой по Риману*** на отрезке $[a,b]$. Кратко можно записать

$$\int_a^b f(x)dx \coloneqq \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$$

Теорема. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

9.2 Критерий интегрируемости

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Ее ***колебанием*** на этом участке называется число

$$\omega(f(x);[a,b]) \coloneqq \sup_{x',x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a,b]} f(x) - \inf_{[a,b]} f(x).$$

Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, и разбиения $\tau = \{x_i\}_1^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f;[x_{i-1},x_i])$.

Теорема 1 (критерий интегрируемости). Для интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ :\ \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\,\Delta x_i < \varepsilon \ \ \forall\ \ \tau\ :\ |\tau| < \delta.$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – разбиение $[a,b]$. Пусть

$$M_i \coloneqq \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x),\ m_i \coloneqq \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i\,\Delta x_i\ \ ,\quad \overline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i\,\Delta x_i$$

называют соответственно ***нижней*** **и** ***верхней интегральными суммами Дарбу*** функции $f(x)$, соответствующими разбиению τ.

Теорема 1′ (критерий интегрируемости). Для интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)\ :\ \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon\ \forall\ \tau\ :\ \ |\tau| < \delta.$$

Теорема. Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на интервале (a,b). Тогда она интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Определение. Функция $f(x)\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной* на $[a,b]$, если существует разбиение $\tau = \{a_i\}_1^{i_\tau}$ такое, что при любом $i = 1,\dots,i_\tau$ функция является непрерывной на отрезке $[a_{i-1},a_i]$ либо становится таковой после надлежащего переопределения ее в одном или обоих концах этого отрезка.

Это равносильно тому, что при любом $i = 1, \dots, i_\tau$:

1 функция $f(x)$ непрерывна на (a_{i-1}, a_i);

2 существуют конечные пределы $f(a_{i-1}+0)$, $f(a_i - 0)$.

Теорема. Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

9.3 Свойства интегрируемых функций

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset [a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a^*, b^*]$.

2. (*Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования*).

Пусть $a < c < b$, функция $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и интегрируема на $[c, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. (*Линейность интеграла*).

Если $f(x)$, $g\,(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f(x) + \mu g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(\mathrm{x}))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

4. Если функции $f(x)$, $g\,(x)$интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение $f(x) \cdot g\,(x)$ также интегрируемо на $[a, b]$.

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\inf_{[a,b]} f > 0$. Тогда $\frac{1}{f}$ интегрируема на $[a, b]$.

6. Пусть функции $f(x)$, $g\,(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

7. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

8. (*интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек*).

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $f^*(x)$ отличается от $f(x)$ лишь в конечном числе точек. Тогда $f^*(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна и $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Теорема (теорема о среднем для интеграла). Пусть функции $f(x)$, $g\ (x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, функция $g(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\exists\ \mu \in [m, M]\ :\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

9.4 Связь между определенным и неопределенным интегралами

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ , a \le x \le b$$

называемая ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда функция $F\ (x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ имеет производную в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt\ , a \le x \le b\ ,$$

называемая ***интегралом с переменным нижним пределом***.

Функция $G(x) = \int_a^b f(t)dt\ - F(x)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда она имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt\ ,\ \text{ где } x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Теорема (основная теорема интегрального исчисления). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi\ (x)$ − ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx\ = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

9.5 Замена переменной и интегрирование по частям

Теорема (замена переменной). Пусть функции $\varphi^{'(x)}, \varphi''\ (x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a \coloneqq \varphi(\alpha)$, $b \coloneqq \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Теорема (интегрирование по частям). Пусть функции $u(x), v(x), u^{'}(x)$, $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u^{'}(x)v(x)dx\,,$$

где $u(x)v(x)|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

9.6 Приложения определенного интеграла

Фигуру в $\mathbb{R}^2$, имеющую площадь, называют *квадрируемой*, а тело в $\mathbb{R}^3$, имеющее объем, – *кубируемым*.

Площадь криволинейной трапеции

Криволинейной трапецией называется множество $G \subset \mathbb{R}^2$ вида $G = \{(x,y) :\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$. Имеем

$$\mu G = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая Г задана в полярной системе координат уравнением

$$\Gamma = \{(r,\theta) :\ r = r(\theta),\ \ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

где $r = r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$,

$$G = \{(r,\theta) :\ r = r(\theta),\ \ \alpha \le \theta \le \beta, \qquad 0 \le r \le r(\theta)\}.$$

Имеем

$$\mu G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

Объем тела вращения

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a,b]$, тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ образовано вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox. Тогда

$$\mu\Omega = \pi\int_\alpha^\beta f^2(x)dx.$$

Вычисление длины кривой

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), a \le t \le b\}$ непрерывно-дифференцируема.

Ранее было установлено, что непрерывно дифференцируемая кривая спрямляема (имеет длину) и что производная переменной длины дуги $s(t)$ этой кривой $s^{'}(t) = |\vec{r}'(t)|$. Пусть $S -$ длина кривой Г. Тогда

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

если $\Gamma -$ плоская кривая, заданная уравнением $\Gamma = \{x, f(x)), a \leq t \leq b\}$, то ее длина

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Площадь поверхности вращения Пусть $f(x)$ непрерывно-дифференцируема и неотрицательна на $[a, b]$. Пусть S – поверхность, образованная вращением кривой $\Gamma = \{x, f(x)),\ a \leq t \leq b\}$, т.е. графика функции вокруг оси Ox. Площадь ее обозначим символом $mes\, S$, причем

$$mes\, S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

9.7 Несобственные интегралы

Определение. Пусть функция $f(x): [a, b) \to \mathbb{R},\ b \leq +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$.

Символ $\int_a^b f(x)\, dx$ называется ***несобственным интегралом*** *(Римана)* по полуинтервалу $[a, b)$.

Говорят, что несобственный интеграл сходится, и пишут

$$\int_a^b f(x)\, dx \coloneqq \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\, dx,$$

если указанный предел существует, и что несобственный интеграл расходится – в противном случае.

Теорема (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, Тогда для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \ b_\varepsilon \in [a, b)\ :\ \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon\ \ \forall\ b',\ b'' \in [b_\varepsilon, b).$$

С помощью предельного перехода $b' \to b - 0$ на **несобственные интегралы** переносится ряд **свойств** определенного интеграла.

1. Пусть несобственный интеграл сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a*} f(x)\, dx + \int_{a*}^b f(x)\, dx\ \ \forall a^* \in [a, b).$$

2. Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся. Тогда при $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu d(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

3. *(Интегрирование неравенств).*

Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и $f(x) \le g(x)$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

4. *(Формула Ньютона-Лейбница).*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$, $\Phi\,(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b-0) - \Phi(a),$$

если хотя бы один из пределов, стоящих в левой и правой частях, существует и конечен.

5. *(Интегрирование по частям).*

Пусть функции $u(x), v(x)\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ кусочно-непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, то

$$\int_a^b uv'\,dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v\,dx,$$

если оба стоящие справа предела существуют и конечны.

6. *(Замена переменных).*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\beta \le +\infty$, причем $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < b = \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы сходятся или расходятся одновременно.

Теорема. Путь $f(x) \ge 0$ на $[a, b)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists\ M\colon \int_a^{b'} f(x)\,dx \le M \quad \forall\ b' \in [a, b).$$

Теорема (сравнения). Пусть функции $f(x)$, $g\,(x)$интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ на $[a, b)$. Тогда

сходимость $\int_a^b g(x)\,dx$ влечет сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$;

расходимость $\int_a^b f(x)\,dx$ влечет расходимость $\int_a^b g(x)\,dx$.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Определение. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** интегрирования от непрерывной на промежутке $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ называется предел при $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует или равен ∞, то ***расходящимся***.

Определение. ***Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования*** от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ называется интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение. Интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называются ***несобственными интегралами первого рода.***

Определение. Несобственные интегралы от неограниченных функций называются ***несобственными интегралами второго рода***.

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$.

Теорема (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$, функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, +\infty)$; $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Теорема (признак Абеля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и сходится интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$; функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$. Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов, О. В. Методические указания по математическому анализу. Курс лекций по математическому анализу. Ч. 1 (для студентов 1-го курса). МФТИ : в 2 ч. / О. В. Бесов. − М., 2004. − 327 с.

2. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу : в 2 ч. / Ю. С. Богданов.– Минск : Изд-во БГУ, 1974, 1978. – 2 ч.

3. Богданов, Ю. С. Математический анализ / Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица, Ю. Б. Сыроид. – Минск : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 351 с.

4. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : «ТетраСистем», 2011. – 416 с.

5. Воднев, В. Т. Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : Вышэйшая шк., 1995. – 380 с.

6. Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич.– М. : Наука, 1997, 1998. – 2 ч.

7. Ильин, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М. : изд-во Моск. ун-та, 1985, 1987. – 2 ч.

8. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988, 1988,1989. – 3 т.

9. Никольский, С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1990. – 2 т.

10. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1997. – 720 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Справочное издание

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ».
Раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной действительной переменной»

Составители:
Гуцко Наталия Викторовна,
Игнатович Снежана Владимировна

Корректор *В. В. Кузьмич*
Оригинал-макет *М. С. Галеня*

Подписано в печать 01.06.2020. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,96.
Тираж 89 экз. Заказ 13.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/306 от 22 апреля 2014 г.
ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл.
Тел. (0236) 24-61-29.