М. И. ЕФРЕМОВА, А. С. ТУКАЧ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ПРИМЕРЫ ПОДГРУППОВЫХ $\mathfrak{X}$-ФУНКТОРОВ

Особый класс алгебраических систем образуют *n*-арные группы. Напомним [1], что система $\langle X, (\ ) \rangle$ с одной *n*-арной операцией ( ) называется *n*-арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений

$$\left(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n\right) = a,$$

где i пробегает *1*,*2*,…, *n*. Начальный этап развития теории *n*-арных групп связан в основном с именем Поста, многочисленные достижения которого в изучении *n*-арных групп отражены в его статье “Polyadic groups”, опубликованной в 1940 году. При изучении *n*-арных групп Пост выделял два основных направления, первое из которых связано с получением *n*-арных аналогов известных групповых результатов, а второе посвящено нахождению свойств *n*-арных групп, не имеющих своих прототипов в теории групп. К числу таких специфических свойств относится, например, существование нециклических *n*-арных групп любого простого порядка. После Поста наибольший вклад в теорию *n*-арных групп внес С.А. Русаков, сумевший продвинуться значительно дальше своих предшественников, ответив при этом на ряд открытых вопросов. Он не упускал возможности подчеркнуть отличие *n*-арного случая (n ≥ 3) от бинарного. Всякий раз, прежде чем приступить к изучению нового класса *n*-арных групп, он доказывал существование в этом классе *n*-арных групп без единицы. Долгое время тематика исследований по *n*-арным группам была в основном связана с нахождением различных аксиоматик *n*-арных групп, изучением приводимости *n*-арных групп к группам и исследованием силовского строения конечных *n*-арных групп. И только в последние годы под влиянием глубоких результатов и ярких приложений теории классов групп появились работы, посвященные изучению многообразий, формаций и классов Шунка *n*-арных групп. Стала актуальной задача построения теории классов *n*-арных групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ − некоторый непустой класс универсальных алгебр. И пусть со всякой алгеброй $M \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подалгебр $\tau(M)$. Мы говорим, следуя [3], что τ − подсистемный $\mathfrak{X}$-функтор, если:

1) $M \in \tau(M)$ для всех $M \in \mathfrak{X}$;

2) для любых подалгебр $H \in \tau(A), T \in \tau(B), (A, B \in \mathfrak{X})$ и для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [3], мы говорим, что класс универсальных алгебр A является гомоморфом, если всякий гомоморфный образ любой подалгебры из A снова принадлежит A. В классе групп и в классе *n*-арных групп подсистемные функторы мы называем, следуя [3], подгрупповыми функторами.

Приведем некоторые известные результаты.

Лемма 1 [2]. *Пусть π − конгруэнция на универсальной алгебре A. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\bar{H}$ − подалгебра в A/π, то $H = \bigcup_{[a]_\pi \in \bar{H}} [a]_\pi$ − такая подалгебра в A, что πH=H и $\bar{H} = H / \pi$;

2) если H − такая подалгебра в A, что πH=H, то H/π − подалгебра в A/π.

Лемма 2 [2]. *Пусть $\varphi : A \to B$ − эпиморфизм универсальных алгебр, $H \subseteq A$, $T \subseteq B$ и π=Kerφ. И пусть $f : A / \pi \to B$ − канонический изоморфизм факторалгебры A/π на B (т. е. $\left([a]_\pi\right)^f = a^\varphi$). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\left(\pi H / \pi\right)^f = H^\varphi$;

2) $\pi\left(T^{\varphi^{-1}}\right) = T^{\varphi^{-1}}$ и $\left(T^{\varphi^{-1}} / \pi\right)^f = T$.

Пусть $\mathfrak{X}$ − некоторый непустой класс конечных *n*-арных групп.

Теорема 1. Пример. Пусть k − кардинальное число. И пусть для всякой *n*-арной группы $A \in \mathfrak{X}$ совокупность $\tau(A)$ состоит из всех таких подгрупп H, что длина $\left[\mathrm{H}, \mathrm{A}\right]$ не больше k. Докажем, что τ − подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор.

Доказательство. Пусть $\varphi : A \to B$ − эпиморфизм *n*-арных групп, $A, B \in \mathfrak{X}$, $H \in \tau(A)$ и $\pi = \mathrm{Ker}\varphi$. И пусть $f : A / \pi \mapsto B$ − канонический изоморфизм факторгруппы A / π на B (т. е. $([a]_\pi)^f = a^\varphi$). Пусть $\left[\pi H / \pi, A / \pi\right]$ − решетка всех *n*-арных подгрупп $\bar{T}_i$ в A $(i \in I)$ таких, что

$$\pi H / \pi \subseteq \bar{T}_i \subseteq A / \pi .$$

По лемме 1 в A найдутся такие *n*-арные подгруппы $\bar{T}_i$, что $\pi T_i = T_i$ и $\bar{T}_i = T_i / \pi$. А также πH − подгруппа в T_i, T_i − подгруппа в A $(i \in I)$. Так как длина решетки не больше k, т. е. точная верхняя грань длин цепей в решетке $\left[\mathrm{H}, \mathrm{A}\right]$ не больше k, то точная верхняя грань длин цепей в решетке не больше k. Отсюда следует, что точная верхняя грань длин цепей в решетке $\left[\pi H, A\right]$ не больше k. Таким образом, длина $\left[\pi H / \pi, A / \pi\right]$ не больше k. Значит, $\pi H / \pi \in \tau(A / \pi)$. По лемме 2 $(\pi H / \pi)^\varphi = H^\varphi$. Значит, $H^\varphi \in \tau(B)$.

Пусть теперь $M \in \tau(B)$. Покажем, что $M^{\varphi-1} \in \tau(A)$. Пусть $M^{\varphi-1} \subseteq T_i \subseteq A$, где $M^{\varphi-1}$ − подгруппа в T_i для всех $i \in I$, T_i − подгруппа в A. По лемме 2 $\pi(M^{\varphi-1}) = M^{\varphi-1}$ и по лемме 1, $\pi T_i = T_i$, где $i \in I$. Следовательно, $M^{\varphi-1} / \pi \subseteq T_i / \pi \subseteq A / \pi$. На основании леммы 2 $(M^{\varphi-1} / \pi)^f = M$. Значит, точная верхняя грань длин цепей в решетке $\left[M^{\varphi-1} / \pi, A / \pi\right]$ не больше k, так как длина решетки $\left[\mathrm{M}, \mathrm{B}\right]$ не больше k. Следовательно, точная верхняя грань длин цепей в решетке $\left[M^{\varphi-1}, A\right]$ не больше k. Значит $M^{\varphi-1} \in \tau(A)$. Ясно, что $A \in \tau(A)$.

Итак, τ − подгрупповой $\mathfrak{X}$ − функтор.

Теорема 2. Пусть для всякой *n*-арной группы $A \in \mathfrak{X}$ совокупность $\tau(A)$ состоит из всех таких подгрупп H, что решетка [H,A] конечна. Докажем, что τ − подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор.

Доказательство. Пусть $\varphi : A \mapsto B$ − эпиморфизм *n*-арных групп, $A, B \in \mathfrak{X}$, $H \in \tau(A)$ и $\pi = Ker\varphi$. И пусть $f : A / \pi \mapsto B$ – канонический изоморфизм факторгруппы A / π на B (т. е. $([a]_\pi)^f = a^\varphi$). Пусть $\left[\pi H / \pi, A / \pi\right]$ − решетка всех *n*-арных подгрупп $\bar{T}_i$ в A $(i \in \{1, 2, ..., m\}$, где m − произвольное натуральное число). И пусть $\pi H / \pi \subseteq \bar{T}_1 \subseteq ... \subseteq \bar{T}_{m-1} \subseteq \bar{T}_m \subseteq A / \pi$. По лемме 1 в A найдутся такие n-арные подгруппы $T_1, T_2, ..., T_{m-1}, T_m$, что $\pi T_1 = T_1, \pi T_2 = T_2, ..., \pi T_{m-1} = T_{m-1}, \pi T_m = T_m$. А также πH − подгруппа в T_1, T_1 − подгруппа в T_2, ..., T_{m-1} − подгруппа в T_{m-1}, T_m − подгруппа в A ($i \in \{1, 2, ..., m\}$). Так как при этом решетка $\left[\mathrm{H}, \mathrm{A}\right]$ конечна, то и решетка $\left[\pi H, A\right]$ конечна. А значит, и решетка $\left[\pi H / \pi, A / \pi\right]$ конечна.

Значит, $\pi H / \pi \in \tau(A / \pi)$. По лемме 2 $(\pi H / \pi)^f = H^\varphi$. Значит, $H^\varphi \in \tau(B)$. Пусть теперь $M \in \tau(B)$. Покажем, что $M^{\varphi-1} \in \tau(A)$. Пусть $M^{\varphi-1} \subseteq T_1 \subseteq ... \subseteq T_{m-1} \subseteq T_m \subseteq A$, где $M^{\varphi-1}$ – подгруппа в T_1, T_{i-1} − подгруппа в T_i для всех $i \in \{1, 2, ..., m\}$, T_m − подгруппа в A.

По лемме 2 $\pi(M^{\varphi-1}) = M^{\varphi-1}$ и по лемме 1 $\pi T_i = T_i$, ($i \in \{1, 2, ..., m\}$). Следовательно, $M^{\varphi-1} / \pi \subseteq T_1 / \pi \subseteq ... \subseteq T_{m-1} / \pi \subseteq A$.

На основании леммы 2 $(M^{\varphi-1} / \pi)^f = M$. Значит, решетка $\left[M^{\varphi-1} / \pi, A / \pi\right]$ конечна, так как конечна решетка $\left[\mathrm{M}, \mathrm{B}\right]$. Следовательно, и решетка $\left[M^{\varphi-1}, A\right]$ конечна. Отсюда следует, что $M^{\varphi-1} \in \tau(A)$. Ясно, что $A \in \tau(A)$.

Итак, τ − подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
2. Ефремова, М.И. Некоторые свойства подалгебр универсальных алгебр / М.И. Ефремова. – Гомель, 2002. − 13 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; № 20).
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 254 с.