Е. М. ОВСИЮК, О. В. ВЕКО
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПРОСТРАНСТВЕ С ГЕОМЕТРИЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

Известно, что в полевой теории элементарных частиц наиболее часто используется базис плоских волн. Однако при наличии кривизны плоских волн в стандартном понимании не существует. Поэтому особый интерес вызывают специальные примеры неевклидовых пространств, в которых некоторые аналоги таких решений можно построить. В [1] было показано, что в пространстве Лобачевского есть такие решения для частиц со спином 0. Проблема построения аналога плоских волн в пространстве постоянной положительной кривизны исследовалась Волобуевым [2]. Более поздняя трактовка этих вопросов дана в [3]. Решения типа плоских волн для уравнений Максвелла были построены в работах [4]–[6] Недавно в [7] исследовался вопрос о построении решений уравнений Дирака в пространстве Лобачевского на основе метода квадрирования; при этом, в частности, было указано на возможность построения таким способом решений типа плоских волн из скалярных волн Шапиро.

В настоящей работе будет построен полный базис решений типа плоских волн для дираковской и вейлевской частиц в пространстве Лобачевского, при этом решения строятся на основе применения метода разделения переменных в специальной системе квазидекартовых координат.

Будем исходить из общековариантной формы уравнения Дирака [8]

$$\left[i\,\gamma^{a} \left(e^{\alpha}_{(a)}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,\sqrt{-g}\; e^{\alpha}_{(a)}\Big) \right) - m \right] \Psi(x) = 0\,. \tag{1}$$

В системе квазидекартовых координат используем тетраду

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2 e^{\beta}_{(a)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \tag{2}$$

уравнение (1) принимает вид

$$\left[\gamma^{0}\,\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^{1} e^{z}\,\frac{\partial}{\partial x} + \gamma^{2} e^{z}\,\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^{3}\left(\frac{\partial}{\partial z} - 1\right) + im \right] \Psi = 0\,. \tag{3}$$

С волновым оператором, входящим в уравнение (3), коммутируют следующие три: $i\partial_t, i\partial_x, i\partial_y$; соответственно решение ищем в виде

$$\Psi^{\varepsilon,k_1,k_2} = e^{-i\varepsilon t}\; e^{ik_1 x}\; e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Запишем обобщенный оператор спиральности, коммутирующий с оператором волнового уравнения:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left(e^{z}\gamma^{2}\gamma^{3}\,\frac{\partial}{\partial x} + e^{z}\gamma^{3}\gamma^{1}\,\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^{1}\gamma^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial z} - 1\Big) \right). \tag{5}$$

Рассматривая совместно (3) и (5), находим соответствующие ограничения на функции f_i:

$$p = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \qquad f_3 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_1, \qquad f_4 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_2 . \qquad (6)$$

Таким образом, имеем три непрерывных квантовых числа ε, k_1, k_2 и одно дискретное, принимающее различающееся знаком значения $p = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$. Учитывая (6), из четырех уравнений (3) приходим к двум уравнениям для f_1, f_2:

$$(\frac{d}{dz} - 1 - ip) f_1 + e^z (ik_1 + k_2) f_2 = 0, (\frac{d}{dz} - 1 + ip) f_2 - e^z (ik_1 - k_2) f_1 = 0. \qquad (7)$$

Получим в явном виде решения аналогичной системы уравнений в плоском пространстве

$$(\frac{d}{dz} - ip) f_1 + (ik_1 + k_2) f_2 = 0, \qquad (\frac{d}{dz} + ip) f_2 - (ik_1 - k_2) f_1 = 0.$$

Исключаем f_2

$$f_2 = -\frac{1}{ik_1 + k_2}(\frac{d}{dz} - ip) f_1, \qquad \left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - m^2 - k_1^2 - k_2^2\right) f_1 = 0.$$

Двумя линейно независимыми решениями (пусть $k_3 = +\sqrt{\varepsilon^2 - m^2 - k_1^2 - k_2^2}$) являются

$$f_1^{(1)} = e^{+ik_3 z}, \qquad f_2^{(1)} = -\frac{(+ik_3 - ip)}{ik_1 + k_2} e^{+ik_3 z}, \qquad (8)$$

$$f_1^{(2)} = e^{-ik_3 z}, \qquad f_2^{(2)} = -\frac{(-ik_3 - ip)}{ik_1 + k_2} e^{-ik_3 z}. \qquad (9)$$

Знак перед k_3 определяет направление распространения волны, знак величины p задает состояние поляризации. Обобщенный аналог этой ситуации исследуем для случая пространства Лобачевского.

Вернемся к системе (7) и перейдем в ней к переменной Z:

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, e^z = Z, \qquad Z \in (0, +\infty), e^{ia} = \sqrt{\frac{k_2 + ik_1}{k_2 - ik_1}}, \qquad (10)$$

$$\left(Z\frac{d}{dZ} - 1 - ip\right) f_1 + Ze^{+ia} f_2 = 0, \qquad \left(Z\frac{d}{dZ} - 1 + ip\right) f_2 + Ze^{-ia} f_1 = 0. \qquad (11)$$

Отмечаем симметрию между уравнениями: они переходят друг в друга при замене $p \longrightarrow -p$. Кроме того, следует обратить внимание, что в отличие от случая плоского пространства, здесь уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2 зависят явно от первой степени параметра p, т. е. от состояния поляризации спинорной волны.

Можно показать, что существуют два линейно независимых решения ($M_\pm$ обозначают фиксированные относительные множители функций, связанных системой уравнений первого порядка (11)):

$$I \qquad f_1 = M_+ e^{-y/2} y^{1+a} \Phi(a, 2a, y), \qquad f_2 = e^{-y/2} y^{2+a} \Phi(a+1, 2+2a, y),$$
$$M_+ = \left[2e^{+ia}(1+2a)\right]; \qquad (12)$$

$$II \qquad f_1 = M_- e^{-y/2} y^{2-a} \Phi(1-a, 2-2a, y), \qquad f_2 = e^{-y/2} y^{1-a} \Phi(-a, -2a, y),$$
$$M_- = \left[2e^{-ia}(1-2a)\right], \qquad (13)$$

здесь $a = ip = \pm i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$; знак величины p связан с состоянием поляризации спинорной волны.

Типы решений I и II, очевидно, связаны с направлениями распространения волны: влево или вправо. В этой связи рассмотрим предельный переход в построенных решениях (12), (13) к случаю плоского пространства. Для этого, прежде всего, перейдем к обычным размерным величинам:

$$z = \frac{z_3}{R}, \qquad m = \frac{McR}{\hbar}, \qquad \varepsilon = \frac{ER}{c\hbar},$$

$$p = +\sqrt{\varepsilon^2 - m^2} = +R\sqrt{E^2 / c^2\hbar^2 - M^2c^2 / \hbar^2} = Rp_0 \,,$$

$$k_1 = \frac{P_1 R}{c\hbar}, \qquad k_2 = \frac{P_2 R}{c\hbar}, \qquad \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = R\,\frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}{c\hbar} = RK_\perp \,,$$

$$a = ip = iRp_0, \qquad c = 2a = i2Rp_0 \,,$$

$$y = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,e^z = 2RK_\perp(1 + \frac{x_3}{R} + ...) \qquad \longrightarrow \qquad 2RK_\perp \,.$$

Рассмотрим решения (12); с учетом

$$\frac{a}{c}\,y = \frac{1}{2}\,y \qquad \Rightarrow \qquad RK_\perp \,,$$

$$\frac{1}{2!}\,\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\,y^2 = \frac{1}{2!}\,\frac{1/2(1/2+1/c)}{(1+1/c)}\,y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2!}\,(RK_\perp)^2 \,,$$

$$\frac{1}{3!}\,\frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\,y^2 = \frac{1}{2!}\,\frac{1/2(1/2+1/c)(1/2+2/c)}{(1+1/c)(1+2/c)}\,y^2 \Rightarrow \qquad \frac{1}{3!}\,(RK_\perp)^3 \,...,$$

получаем

$$e^{-y/2} \Rightarrow e^{-RK_\perp}, \qquad \Phi(a, 2a, y) \qquad \Rightarrow \qquad e^{RK_\perp},$$

$$e^{-y/2} \Rightarrow e^{-RK_\perp}, \qquad \Phi(a+1, 2a+2, y) \qquad \Rightarrow \qquad e^{RK_\perp},$$

и дальше

$$I \qquad f_1 \qquad \Rightarrow \qquad M_+\,(2RK_\perp e^z)^{1+iRp_0} \cdot e^{ix_3 p_0},$$

$$f_2 \qquad \Rightarrow \qquad (2RK_\perp e^z)^{2+iRp_0} \cdot e^{ix_3 p_0}. \tag{14}$$

Аналогично находим

$$II \qquad f_2 = e^{-y/2}\,y^{1-a}\,\Phi(-a, -2a, y) \cdot e^{-ix_3 p_0} \,,$$

$$f_1 = M_-\,e^{-y/2}\,y^{2-a}\,\Phi(1-a, 2-2a, y) \cdot e^{-ix_3 p_0} \,. \tag{15}$$

Таким образом, решения типа I в пространстве H_3 являются обобщением плоских волн плоского пространства вида $f = e^{+ikz}$, распространяющихся слева направо; решения типа II представляют обобщение плоских волн в пространстве Минковского $f = e^{-ikz}$, распространяющихся справа налево.

Авторы признательны В. М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shapiro, I.S. Expansion of the scattering amplitude in relativistic spherical functions / I.S. Shapiro // Phys. Lett. – 1962. – Vol. 1, № 7. – P. 253–255 .

2. Волобуев, И.П. Плоские волны на сфере и некоторые их применения / И.П. Волобуев // ТМФ. – Т. 45, № 3. – С. 421–426.

3. Ovsiyuk, E.M. Shapiro's plane waves in spaces of constant curvature and separation of variables in real and complex coordinates / E.M. Ovsiyuk, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // NPCS. – 2009. – Vol. 12, № 1. – P. 1–15.

4. Бычковская, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского / Е.М. Бычковская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 5. – С. 45–48.

5. Bogush, A.A. Analogue of the plane electromagnetic waves in the Lobachevsky space / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik, E.M. Bychkovskaya // Non-euclidean geometry in modern physics: Proceedings of the International Conference BGL-5, Minsk, October 10–13, 2006 / National Academy of Sciences of Belarus, B.I. Stepanov Institute of Physics; Eds.: Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2006. – P. 111–115.

6. Овсиюк, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.

7. Курочкин, Ю.А. Решения уравнения Дирака в пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 31–35.

8. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.