А. В. МАКАРЕВИЧ
УО МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННО СВЯЗАННЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Как известно, классической задачей небесной механики является задача двух тел, которая в настоящее время считается аналитически решенной в наиболее общем виде. Однако задача n тел ($n > 2$) не является таковой, и ее решение за исключением отдельных частных случаев может быть получено только с использованием численных методов [1; 2]. В связи с этим на примере тройной звездной системы приведем методику вывода уравнений для описания относительного движения трех и более гравитационно связанных объектов с возможностью последующего решения полученных уравнений численными методами.

Пусть компоненты тройной звезды массами M_1, M_2 и M_3 располагаются относительно рабочей системой координат *Oxy* так, как это показано на рисунке 1.

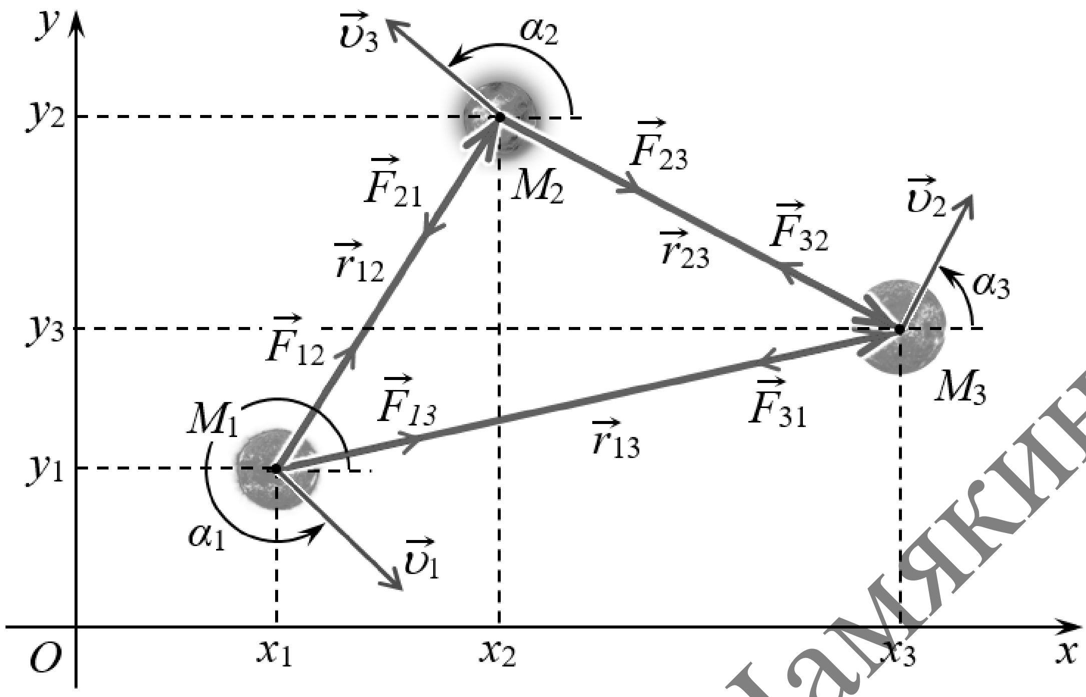

Рисунок 1. – Рабочая система координат для моделирования движения компонент тройной звезды

Здесь

$\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{31}$ и $\vec{F}_{32}$ – силы притяжения, действующие на рассматриваемые объекты, причем первый индекс при векторе $\vec{F}$ показывает на какую компоненту действует сила притяжения, а второй – со стороны какой компоненты (например, $\vec{F}_{12}$ – сила притяжения, действующая на «первую» компоненту со стороны «второй»);

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$ – вспомогательные векторы, введенные для дальнейшего получения уравнений движения рассматриваемых объектов, где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ – радиус-векторы каждой из компонент (не отображены на рисунке 1 во избежание на нем дополнительных нагромождений);

α_1, α_2 и α_3 – углы, определяющие соответственно направления векторов скоростей $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ и $\vec{\upsilon}_3$ компонент.

Будем считать рассматриваемую систему замкнутой, а ее компоненты материальными точками. Второй закон Ньютона в векторном виде для каждого объекта может быть записан как:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = M_1\vec{a}_1, \qquad (1)$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = M_2\vec{a}_2, \qquad (2)$$

$$\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = M_3\vec{a}_3, \qquad (3)$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ – векторы ускорений компонент.

С учетом того, что

$$\vec{F}_{12}=\frac{GM_1M_2\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec{F}_{13}=\frac{GM_1M_3\vec{r}_{13}}{r_{13}^3},\quad \vec{F}_{21}=-\frac{GM_1M_2\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\vec{F}_{23}=\frac{GM_2M_3\vec{r}_{23}}{r_{23}^3},\quad \vec{F}_{31}=-\frac{GM_1M_3\vec{r}_{13}}{r_{13}^3},\quad \vec{F}_{32}=-\frac{GM_2M_3\vec{r}_{23}}{r_{23}^3},$$

и, проецируя (1)–(3) на координатные оси, будем иметь

$$Ox:\ \frac{GM_2r_{12x}}{r_{12}^3}+\frac{GM_3r_{13x}}{r_{13}^3}=a_{1x},\quad Oy:\ \frac{GM_2r_{12y}}{r_{12}^3}+\frac{GM_3r_{13y}}{r_{13}^3}=a_{1y},$$

$$Ox:\ -\frac{GM_1r_{12x}}{r_{12}^3}+\frac{GM_3r_{23x}}{r_{23}^3}=a_{2x},\quad Oy:\ -\frac{GM_1r_{12y}}{r_{12}^3}+\frac{GM_3r_{23y}}{r_{23}^3}=a_{2y},$$

$$Ox:\ -\frac{GM_1r_{13x}}{r_{13}^3}-\frac{GM_2r_{23x}}{r_{23}^3}=a_{3x},\quad Oy:\ -\frac{GM_1r_{13y}}{r_{13}^3}-\frac{GM_2r_{23y}}{r_{23}^3}=a_{3y}.$$

Принимая во внимание, что

$$r_{12x}=x_2-x_1,\quad r_{12y}=y_2-y_1,\quad r_{12}=\sqrt{r_{12x}^2+r_{12y}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$r_{13x}=x_3-x_1,\quad r_{13y}=y_3-y_1,\quad r_{13}=\sqrt{r_{13x}^2+r_{13y}^2}=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2},$$

$$r_{23x}=x_3-x_2,\quad r_{23y}=y_3-y_2,\quad r_{23}=\sqrt{r_{23x}^2+r_{23y}^2}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2},$$

и выполнив несложные математические преобразования, запишем рабочую систему дифференциальных уравнений для описания относительного движения трех гравитационно связанных объектов

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\dfrac{GM_2(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}}+\dfrac{GM_3(x_3-x_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]^{3/2}},\\
\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\dfrac{GM_2(y_2-y_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}}+\dfrac{GM_3(y_3-y_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]^{3/2}},\\
\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=-\dfrac{GM_1(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}}+\dfrac{GM_3(x_3-x_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]^{3/2}},\\
\dfrac{d^2y_2}{dt^2}=-\dfrac{GM_1(y_2-y_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}}+\dfrac{GM_3(y_3-y_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]^{3/2}},\\
\dfrac{d^2x_3}{dt^2}=-\dfrac{GM_1(x_3-x_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]^{3/2}}-\dfrac{GM_3(x_3-x_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]^{3/2}},\\
\dfrac{d^2y_3}{dt^2}=-\dfrac{GM_1(y_3-y_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]^{3/2}}-\dfrac{GM_3(y_3-y_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]^{3/2}}.
\end{cases}$$

Начальные условия будут иметь вид:

$$\upsilon_{1x}(0)=\upsilon_{01}\cos\alpha_1,\ \upsilon_{1y}(0)=\upsilon_{01}\sin\alpha_1,\ \upsilon_{2x}(0)=\upsilon_{02}\cos\alpha_2,\ \upsilon_{2y}(0)=\upsilon_{02}\sin\alpha_2,$$
$$\upsilon_{3x}(0)=\upsilon_{03}\cos\alpha_3,\ \upsilon_{3y}(0)=\upsilon_{03}\sin\alpha_3,\ x_1(0)=x_{01},\ y_1(0)=y_{01},$$
$$x_2(0)=x_{02},\ y_2(0)=y_{02},\ x_3(0)=x_{03},\ y_3(0)=y_{03}.$$

Здесь x_{0i}, y_{0i} и υ_{0i} – соответственно начальные значения координат и модулей скоростей рассматриваемых тел, где $i=\overline{1,3}$.

Аналогичный подход может быть использован и для вывода уравнений относительного движения компонент системы, состоящей и более чем из трех тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев, А. П. Задача трех тел и ее точные решения / А. П. Маркеев // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 9. – С. 112–117.

2. Поршнев, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете Matlab / С. В. Поршнев. – СПб. : Издательство «Лань», 2011. – 736 с.