РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

Дриневская Наталья (УО МГПУ им. И. П. Шамякина, Беларусь)
Научный руководитель – М. И. Ефремова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Разрешимость уравнений в радикалах является одной из важнейших задач в математике, которая имеет широкое применение в различных областях науки и техники, включая физику, инженерию, экономику, компьютерные науки и другие. Разрешимость уравнений в радикалах означает, что существует алгоритмический способ выразить корни уравнения с помощью арифметических операций и извлечения корней. Однако не все уравнения могут быть решены в радикалах. Это было доказано в 19 веке Абелем и Галуа [1], которые показали, что некоторые уравнения выше четвертой степени не могут быть решены в радикалах. Несмотря на это, разрешимость уравнений в радикалах все еще остается важной проблемой в математике и имеет большое значение для различных областей науки.

Целью данной работы является разработка методических рекомендаций для проведения факультативных занятий по разрешимости уравнений в радикалах для учащихся 10–11 классов учреждений общего среднего образования.

С разрешимостью уравнений в радикалах учащиеся учреждений среднего общего образования знакомятся в 8 классе при изучении квадратных уравнений. На факультативных занятиях в старших классах обычно ученикам представляют примеры кубических уравнений, которые можно разрешить в радикалах. В рамках этого обучения они изучают формулы корней для кубических уравнений, а также учатся решать уравнения, которые можно свести к кубическим. Также в старших классах ученики решают системы уравнений, содержащие как разрешимые в радикалах уравнения, так и неразрешимые.

При решении уравнений третьей степени показываем учащимся, что любое уравнение $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, используя подстановку $y = x - \frac{a}{3}$, сводится к виду

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Для решения данного уравнения существует формула [2]

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (2)$$

Если выражение $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3 \geq 0$ (оно называется дискриминантом), то по формуле (2) находится один действительный корень уравнения (1). При этом оказывается, что в случае $D > 0$ других действительных корней оно не имеет. Если же $D < 0$, то извлечь корень квадратный из отрицательного числа нельзя, но кубическое уравнение (1) может иметь действительные корни. Чтобы убедиться в этом, решим следующую задачу.

Найти ребро куба, объем которого на четыре единицы меньше полусуммы всех его ребер.

Решение. Пусть *x* – ребро искомого куба, тогда, согласно условию задачи, для нахождения неизвестной величины составим уравнение.

$$x^3 - 6x + 4 = 0, \text{ где } p = -6; q = 4$$

Тогда, используя формулу (2), получим

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2 - 2\sqrt{-1}}.$$

Итак, применив формулу (2) для решения уравнения $x^3 - 6x + 4 = 0$, мы пришли к тому, что найти *x* невозможно, так как корень квадратный из отрицательного числа не существует. Но в отличие от квадратных уравнений, когда в подобной ситуации оно не имеет действительных корней, кубическое уравнение $x^3 - 6x + 4 = 0$ имеет три действительных корня. В самом деле,

$$x^3 - 6x + 4 = (x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} x-2=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1=2 \\ x_1=-1-\sqrt{3},\ x_3=-1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Причем $x = 2$ и $x = -1 + \sqrt{3}$ удовлетворяют условию задачи.

Приведем примеры задач, предлагаемых учащимся на факультативных занятиях по разрешимости уравнений в радикалах.

1. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + a - 2)x^2 + +(a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, так что $x_1 < 1 < x_2$?

2. Решить неравенство с параметром $(a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 1 > 0.$

3. Найти корни многочлена $2x^3 + x^2 + 4x - 15.$

4. Определить границы вещественных корней многочлена $x^3 - 3x^2 - 3x^2 - 4.$

5. Найти корни многочлена $4x^4 + 80x^3 + 540x^2 + 1946x + 1465.$

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 48 \end{cases}$

Решение уравнений третьей степени является важным элементом обучения математике в старших классах и может подготовить учащихся к изучению более сложных областей математики, таких как теория групп, геометрия и алгебраическая топология. Эти предметы имеют множество приложений в различных областях науки и техники, поэтому умение работать с уравнениями высших степеней может оказаться полезным в будущем профессиональном пути учащихся.

Список использованной литературы

1. Винберг, Э. Б. Алгебра многочленов / Э. Б. Винберг. – М. : МГЗПИ, 1980. – 176 с.
2. Теория многочленов : пособие для студ. / сост. Э. Ф. Шмигерев, С. В. Игнатович. – Мозырь : МГПУ, 2002. – 81 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ВЯЗКИХ СРЕДАХ

Дроздов Ростислав (УО МГПУ им. И. П. Шамякина, Беларусь)
Научный руководитель – А. В. Макаревич, канд. физ.-мат. наук, доцент

Компьютерное моделирование движения тел в вязких средах в наиболее общем случае заключается в разработке математической модели, позволяющей описать движение объектов в жидкостях или газах с учетом их вязкости. Подобные модели могут быть полезны, например, при проектировании различных транспортных средств или исследовании баллистических характеристик снарядов.

В рамках данной работы с использованием системы Matlab было выполнено моделирование движения тела шарообразной формы в различных вязких средах. Для математического описания движения была получена следующая система дифференциальных уравнений, которая связывает физические параметры рассматриваемого объекта (плотность ρ и радиус r) с характеристиками среды, в которой он находится (плотностью ρ_0 и динамической вязкостью μ).

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right) - \dfrac{9\mu v}{2r^2\rho}, \\ \dfrac{dy}{dt} = v. \end{cases}$$

Фрагмент реализации разработанной компьютерной программы для моделирования падения ртутного шарика в воде, масле и глицерине представлен на рисунке 1.