

О. В. Старовойтова

Л. А. Иваненко

**ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
В СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОМ
И ПСИХОЛОГИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ**

ISBN 978-985-477-929-4



9 789854 779294

МГПУ им. И.П. Шамякина

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

О. В. Старовойтова, Л. А. Иваненко

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
В СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОМ
И ПСИХОЛОГИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ

Справочник для студентов,
получающих углубленное высшее образование (магистратура)
по специальности 7-06-0114-01 «Социально-педагогическое
и психологическое образование»

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2024

УДК 519.22(075.8)

ББК 22.172я73

С77

Авторы:

О. В. Старовойтова, старший преподаватель кафедры теоретической физики и прикладной информатики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»;

Л. А. Иваненко, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой педагогики УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Рецензенты:

кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и компьютерной безопасности УО «Полоцкий государственный университет им. Ефросинии Полоцкой» *А. П. Мателенок*;

кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики начального образования УО «Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова» *Т. В. Гостевич*

Печатается по решению редакционно-издательского совета учреждения образования «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина»

Старовойтова, О. В.

С77 Прикладная математическая статистика в социально-педагогическом и психологическом исследовании : справ. для студентов, получающих углубленное высшее образование (магистратура) по специальности 7-06-0114-01 «Социально-педагогическое и психологическое образование» / О. В. Старовойтова, Л. А. Иваненко. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2024. – 35 с.

ISBN 978-985-477-929-4.

В справочнике представлена информация, призванная помочь сформировать профессиональную компетентность студентов в области применения современных методов математической статистики для анализа эмпирических данных, получаемых в процессе проведения педагогического исследования.

УДК 519.22(075.8)

ББК 22.172я73

ISBN 978-985-477-929-4

© Старовойтова О. В., Иваненко Л. А., 2024

© УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник по дисциплине «Прикладная математическая статистика в социально-педагогическом и психологическом исследовании» разработаны для студентов, получающих углубленное высшее образование (магистратура) по специальности 7-06-0114-01 «Социально-педагогическое и психологическое образование», в соответствии с требованиями образовательного стандарта и учебного плана.

В настоящее время статистико-математические методы анализа данных широко используются в социально-педагогических и психологических исследованиях, поэтому овладение знаниями и умениями в области использования методов математической статистики является важным аспектом в процессе формирования профессиональной компетентности магистрантов.

Данный справочник необходим для ориентирования магистрантов в основных методах измерения, количественного описания, формулировании и проверки статистических гипотез и использовании их для проведения прикладных исследований; обобщения данных результатов исследования на основе статистической обработки. В них показывается как магистрантам правильно использовать статистические процедуры обработки и анализа данных в социально-педагогическом и психологическом исследовании.

Справочник поможет специалисту грамотно применять статистические методы для обработки полученных данных в социально-педагогических и психологических исследованиях.

Справочник «Прикладная математическая статистика в социально-педагогическом и психологическом исследовании» может быть также использован при изучении учебной дисциплины «Методы статистического анализа данных» студентами специальности 7-07-0114-1 «Специальное и инклюзивное образование профилизация. Логопедия».

1 ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

У истоков статистической науки стояли две школы:

- немецкая описательная школа;
- английская школа политических арифметиков.

Немецкая описательная школа

Представители данной школы своей задачей считали описание достопримечательностей государства: территории, населения, климата, политического устройства, вероисповедания, торговли и т. п. Описание осуществлялось без анализа закономерностей и связей между явлениями.

Английская школа политических арифметиков

Представители данной школы (Уильям Петти, Джон Граунт, Эдмунд Галлей) своей главной задачей считали выявление на основе большого числа наблюдений различных закономерностей и взаимосвязей в изучаемых явлениях.

Каждая школа развивалась своим путем, используя свои методы в исследованиях, но предмет изучения у них был общий – государство, общество и, в частности, массовые явления и процессы, происходящие в нем.

Математико-статистическое направление

Статистика сформировалась как наука в результате синтеза государственоведения и политической арифметики, причем от последней она взяла больше, поскольку статистика и в настоящее время призвана выявлять прежде всего различного рода закономерности в исследуемых явлениях. Представители этих двух школ не дошли до теоретического обобщения практики учетно-статистических работ, до создания теории статистики. Эта задача была решена позднее, в XIX веке, бельгийским ученым Адольфом Кетле, который дал определение предмета статистики, раскрыл суть ее методов. Под влиянием идей Кетле возникло третье направление статистической науки – математико-статистическое.

Статистикой называется отрасль знаний, объединяющая принципы и методы работы с числовыми данными, характеризующими массовые явления.

Статистика включает в себя несколько самостоятельных дисциплин:

- общую теорию статистики – изложение общих правил сбора и обработки массовых данных;
- теорию вероятностей – науку о свойствах генеральной совокупности бесконечно большого объема;
- математическую статистику, рассматривающую правила оценивания параметров и свойств генеральной совокупности по данным выборки;
- социально-экономическую статистику;
- статистику населения.

Предметом математической статистики является анализ результатов массовых, повторяющихся измерений.

Статистическое наблюдение – научно организованный сбор данных, характеризующих изучаемый объект.

Статистическое наблюдение удовлетворяет следующим требованиям:

- объекты наблюдения (испытуемые) должны быть одинаковыми с точки зрения их свойств (квалификация, специализация, возраст и др.);
- число объектов наблюдения должно быть достаточным, чтобы можно было выявить закономерности и обобщить их свойства.

Статистическая сводка и группировка – обработка собранных первичных данных, включающая их группировку, обобщение и оформление статистических таблиц.

В статистическом анализе на основе итоговых данных сводки рассчитываются различные обобщающие показатели в виде средних и относительных величин, выявляются определенные закономерности в распределениях, динамике показателей и т. п.

Этапы статистического исследования:

1. Формулировки его цели и задач, следовательно, и тех сведений, которые могут быть получены в процессе наблюдения.
2. Определяется объект и единица наблюдения.
3. Разрабатывается программа.
4. Выбирается вид и способ наблюдения.

Прикладная математическая статистика – это центр математической статистики, самостоятельная методическая дисциплина.

Прикладная математическая статистика:

- разрабатывает и систематизирует понятия, приемы, математические методы и модели, предназначенные для организации сбора, стандартной записи, систематизации и обработки статистических данных с целью их удобного представления, интерпретации и получения научных и практических выводов;
- нацелена на решение реальных задач;
- ставит задачи, какие предположения принять с целью дальнейшего математического изучения;

По типу решаемых задач прикладная статистика делится на разделы:

- описание данных;
- оценивание;
- проверка гипотез.

Статистические закономерности. Познание закономерностей возможно только в том случае, если изучаются не отдельные явления, а совокупности явлений – ведь закономерности социально-экономических и естественных процессов проявляются в полной мере лишь в массе явлений.

Свойство статистических закономерностей:

- проявляются лишь в массе явлений при обобщении данных по достаточно большому числу единиц, что получило название «закон больших чисел».

Например, при сравнении спортивных результатов двух групп легкоатлетов, тренировавшихся по разным методикам, заметить существенную разницу можно, только если в исследовании в каждой из групп будет участвовать достаточное количество испытуемых;

- обладают свойством устойчивости, т. е. стабильности и повторяемости при последующих наблюдениях.

Даже в случае повторения проведенных наблюдений другими исследователями с другими испытуемыми, обладающими такими же свойствами, как участники исходной группы, полученные результаты не должны существенно отличаться от исходных.

Совокупность – это объединение какого-либо множества испытуемых (учащихся) по одному или нескольким интересующим признакам.

Главное *требование* к выделению изучаемой совокупности – это ее качественная однородность, например, по уровню знаний, росту, весу и другим признакам. Члены совокупности могут сравниваться между собой в отношении только того качества, которое становится предметом исследования. При этом обычно абстрагируются от других неинтересующих качеств. Так, если педагога интересует успеваемость учащихся, то он не принимает во внимание, как правило, их рост, вес и другие параметры, не относящиеся непосредственно к изучаемому вопросу.

Статистическая совокупность состоит из единиц совокупности. Каждая единица совокупности представляет собой частный случай проявления изучаемой закономерности. Объединение единиц в совокупность объективно обоснованно. Решение вопроса о единице совокупности и границах изучаемой совокупности зависит от цели исследования и уровня исследования. Уровень исследования определяет круг выдвигаемых задач, и, наоборот, задачи исследования определяют уровень его организации.

Единица совокупности – это предел дробления объекта исследования, при котором сохраняются все свойства изучаемого процесса. Так, при исследовании физической подготовленности студентов учреждения высшего образования единицей совокупности является один студент.

Основания классификации				
по характеру выражения	по способу определения	по отношению к характеризующему объекту	по характеру вариации	по отношению ко времени
Описательные Количественные	Первичные (учитываемые) Вторичные (расчетные)	Прямые (непосредственные) Косвенные	Альтернативные Дискретные Непрерывные	Моментальные Интервальные

Описательные признаки выражаются словесно: национальность человека, специализация спортсмена, его амплуа, материал покрытия спортивной площадки. Описательные признаки подразделяются на *номинальные* и *порядковые*:

- **номинальные** – это описательные признаки, по которым нельзя ранжировать данные;
- **порядковые** – это признаки, по которым можно ранжировать, упорядочивать данные.

Например, пользуясь оценками экспертов, ранжируют фигуристов по технике и артистичности исполнения программы или работников по мастерству и т. д.

- **признаки человека:** возраст, образование, занятие, рост, вес, семейное положение и т. д.;

- признаки предприятия: форма собственности, специализация (отрасль), численность работников, величина уставного фонда, экономическая эффективность его деятельности и т. д.

Количественные признаки. Количественные признаки выражены числами. Они играют преобладающую роль в статистике. Таковы возраст человека, численность студентов в учебной группе, заработная плата работников, население города, доход турфирмы и т. д.

Первичные признаки. Первичные признаки характеризуют единицу совокупности в целом. Это абсолютные величины. Они могут быть измерены, сосчитаны, взвешены и существуют сами по себе, независимо от их статистического изучения.

Например, длина тела и масса тела спортсмена, площадь спортзала, количество различных наименований спортивного инвентаря, численность населения города.

Вторичные (расчетные) признаки. Вторичные, или расчетные, признаки не измеряются непосредственно, а рассчитываются. Они являются продуктами человеческого сознания, результатом познания изучаемого объекта.

Несмотря на расчетный характер признаков, они тоже имеют объективный характер.

Прямые (непосредственные) признаки – это свойства, непосредственно присущие тому объекту, который ими характеризуется. Таковы возраст человека, численность работников фирмы, объем продаж турпутевок фирмой, численность студентов, обучающихся в учреждении образования.

Косвенные признаки являются свойствами, присущими не самому объекту, а другим совокупностям, относящимся к объекту, входящим в него.

Например, успеваемость студентов как косвенный признак учебной группы. Хотя успеваемость не группы, а студентов – это их прямой признак, но ведь успеваемость характеризует и группу, которой принадлежат эти студенты (или даже целый факультет).

Такова и оплата труда работников по отношению к учреждению. Это косвенный признак учреждения, но очень важный для того, кто собирается поступать на работу и выбирает место работы. Практически деление признаков на прямые и косвенные совпадает с их делением на первичные и вторичные.

Моментные признаки характеризуют изучаемый объект в какой-то момент времени, установленный планом статистического исследования. Они существуют на любой момент времени и характеризуют наличие чего-либо: численность населения, количество очков и занятое место, завоеванное спортсменом или командой, количество студентов, обучающихся в учреждении образования, суммарная площадь учебных аудиторий и т. д. Единицы измерения моментных признаков относятся только к характеризующим ими свойствам объектов.

К *интервальным* относятся признаки, характеризующие результаты процессов. Поэтому их значения могут возникать только за интервал времени: год, месяц, сутки, но не на момент времени. Таково количество заданий, вы-

полненных студентом за 45 минут, учебная нагрузка, выполненная преподавателем за учебный год. Единицы измерения интервальных признаков содержат и указание того отрезка времени, за который определено значение признака. Так, стоимость основных фондов турфирмы на 1 января выражается в тысячах рублей, а прибыль, полученная за январь, – в тысячах рублей за месяц.

Генеральная и выборочная совокупности

Генеральная совокупность – это совокупность всех возможных наблюдений, относительно которых предполагается делать выводы при постановке гипотезы.

Но применение большинства статистических методов основано на идее использования небольшой случайной совокупности испытуемых из общего числа тех, на которых можно было бы распространить (генерализовать) выводы, полученные в результате изучения совокупности.

Выборочная совокупность – это часть объектов из генеральной совокупности, отобранных для изучения, с тем чтобы сделать заключение о всей генеральной совокупности.

Главный принцип формирования выборки – это случайный отбор испытуемых из мыслимого множества учащихся, называемого генеральной совокупностью или популяцией объектов, или явлений. Как по анализу элементов, содержащихся в капле крови, медики нередко судят о составе всей крови человека, так и по выборочной совокупности учащихся изучаются явления, характерные для всей генеральной совокупности.

Когда для каждого объекта в выборке измерено значение одной переменной, популяция и выборка называются одномерными. Если же для каждого объекта регистрируются значения двух или нескольких переменных, такие данные называются многомерными.

Требование к выборке: репрезентативность, то есть правильная представимость в ней пропорций генеральной совокупности. Достижению репрезентативности может способствовать такая организация эксперимента, при которой элементы выборки извлекаются из генеральной совокупности случайным образом.

Значения переменных в выборке

Значения количественных переменных являются числовыми, могут быть упорядочены и для них имеют смысл различные вычисления (например, среднее значение). На обработку количественных переменных ориентировано подавляющее большинство статистических методов.

Значения номинальных переменных (например: пол, вид, цвет) являются нечисловыми, они означают принадлежность к некоторым классам и не могут быть упорядочены или непосредственно использованы в вычислениях. Для анализа номинальных переменных специально предназначены лишь избранные разделы математической статистики, например, категориальный анализ.

Значения ранговых или порядковых переменных. Если номинальные значения предварительно заменить на числа, обозначающие их условные коды, которые занимают промежуточное положение, то их значения будут упорядочены, но не могут быть с уверенностью измерены и сопоставлены

количественно. К анализу ранговых переменных применимы так называемые ранговые методы.

Ранг наблюдения – это тот номер, который получит данное наблюдение в упорядоченной совокупности всех данных – после их упорядочивания по определенному правилу (например, от большего значения к меньшему).

Процедура перехода от совокупности наблюдений к последовательности их рангов называется **ранжированием**.

Ранговые и номинальные значения при вводе данных следует обозначать целыми числами.

Исходные данные

Качество любого исследования зависит, прежде всего, от качества исходных данных. Данные, которые собираются исследователем для дальнейшей статистической обработки и формулировки выводов по ее результатам, должны удовлетворять определенным требованиям.

Требования, предъявляемые к собираемым данным:

- достоверность;
- сопоставимость.

Условиями обеспечения достоверности являются:

- полнота охвата наблюдаемого объекта;
- полнота и точность регистрации данных по каждой единице наблюдения.

Источники получения данных:

- непосредственное наблюдение;
- документы;
- опрос: экспедиционный, корреспондентский, саморегистрация.

Например, измерение роста, массы тела человека, фиксация показателей техники и тактики спортсмена, причем как при непосредственном наблюдении за его тренировочной или соревновательной деятельностью, так и с помощью видеоаппаратуры. В некоторых случаях исследователь по тем или иным причинам не может осуществлять непосредственное наблюдение испытуемых. Тогда на помощь исследователю приходят документы, из которых можно почерпнуть необходимую информацию. Такими документами могут быть протоколы соревнований, журналы учета тренировочных занятий, справки о заработной плате работников, технические паспорта спортивного оборудования, инвентаря и т. д.

Подготовка статистического наблюдения:

- формулировка цели и основных гипотез;
- определение объекта и единицы наблюдения, составление программы наблюдения, сроков проведения, источников и способов сбора данных, подбор состава исполнителей.

Для определения границ объекта наблюдения устанавливается ценз – значение признака (или нескольких признаков), позволяющее отделить единицы наблюдения от других явлений.

Например, мы можем установить, что единицами наблюдения в нашем исследовании будут гандболисты 1-го разряда. Принадлежность к виду

спорта и спортивный разряд будут отличать наших испытуемых от других спортсменов. Время регистрации данных для всех единиц устанавливается единое. В зависимости от объема измерительных процедур в качестве времени регистрации данных может быть выбран один день, неделя или месяц.

Типы данных психолого-педагогического исследования:

- одна выборка – совокупность измерений одной количественной, номинальной или ранговой переменной, произведенных в ходе эксперимента, опроса или наблюдения.

Для одной выборки используются статистические методы описательной статистики. Выборка может быть неупорядоченная и структурированная (упорядоченная);

- несколько выборок – совокупность измерений нескольких количественных, номинальных или ранговых переменных, произведенных в ходе эксперимента.

Выборки могут быть:

- независимые – те, которые получены в эксперименте независимо друг от друга;

- зависимые – те, у которых значения данных переменных каким-то образом согласованы (связаны) друг с другом в имеющихся наблюдениях.

Для экспериментальной педагогики характерна постановка исследований, цель которых – выявления эффективности педагогических средств путем сравнения достижений или свойств одной и той же группы учащихся в разные периоды времени (такие группы получили название зависимых выборок) или разных групп учащихся (независимые выборки).

Типичные примеры зависимых переменных: рост человека связан с весом, потому что обычно высокие индивиды тяжелее низких; IQ (коэффициент интеллекта) связан с количеством ошибок в тесте, так как люди с высоким IQ, как правило, делают меньше ошибок, цена винчестера связана с его объемом и т. д.

Типы данных психолого-педагогического исследования:

- временной ряд или процесс представляет собой значение количественной переменной (отклика), измеренные через равные интервалы значений другой количественной переменной (параметра). Например, время измерения. В качестве исходных данных рассматриваются, как правило, значения переменной отклика;

- связанные временные ряды – синхронные по времени измерения одной переменной в разных точках (объектах) или же измерения нескольких переменных в одной точке (объекте).

Многомерные данные представляются для статистического анализа в виде прямоугольной матрицы. Это могут быть измерения значений переменных у нескольких объектов или в нескольких точках или же это могут быть измерения значений переменных у одного объекта в различные моменты времени или при различных состояниях.

2 ТАБУЛИРОВАНИЕ И НАГЛЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ

Формы учета результатов измерений

Таблица – это форма наиболее рационального изложения цифрового материала. Основа статистической таблицы – это ряд взаимопересекающихся горизонтальных и вертикальных линий, образующих по горизонтали строки, а по вертикали – столбцы. Каждая строка и каждый столбец имеют свое наименование, которое должно соответствовать содержанию таблицы. Таблица должна иметь указания, что это – таблица и название, определяющее ее содержание. В таблице есть подлежащее и сказуемое. *Подлежащим* в таблице называется объект, который в ней характеризуется цифрами, *сказуемое* таблицы образует система показателей, которыми характеризуется объект изучения, т. е. подлежащее таблицы.

Виды таблиц:

- простые таблицы – это те таблицы, в подлежащем которых нет группировок. Они бывают перечневые, хронологические и территориальные;
- групповые таблицы. В них объект разделен на группы по тому или иному признаку;
- комбинационные таблицы. В них объект разделен на группы по двум и более признакам, взятым в комбинации.

К простым относятся таблицы, применяемые при альтернативной группировке, когда одна группа испытуемых противопоставляется другой; например, здоровые – больным, высокие люди – низким и т. п.

Пример простой таблицы приведен ниже (таблица 1). В ней представлены результаты обследования мануальной асимметрии у учащихся 3–6-х классов.

Таблица 1 – Пример простой таблицы

Классы	Праворукие	Леворукие	Сумма
3 и 4	43	6	49
5 и 6	44	17	61
Сумма	87	23	110

Примером сложной таблицы служит таблица 2.

Таблица 2 – Пример сложной таблицы

Рост родителей	Рост детей								Всего
	160,7	162,7	164,7	166,7	168,7	170,7	172,7	174,7	
174							4		4

Продолжение таблицы 2

172			1	4	11	17	20	6	62
170	1	2	21	48	83	66	22	8	251
168	1	15	56	130	148	69	11		430
166	1	15	19	56	41	11	1		144
164	2	7	10	14	4				37
Всего	5	39	107	255	387	163	58	14	928

В ней представлены классические данные Ф. Гальтона, иллюстрирующие наличие положительной зависимости между ростом родителей и их детей. Таблица организована таким образом, что позволяет оценить частоту встречаемости в популяции однозначно фиксируемых соотношений роста родителей и роста ребенка.

Графиком называют наглядное изображение статистических величин при помощи геометрических линий и фигур или географических картосхем (картограмм). В каждом графике существуют основные элементы:

Графический образ (основа графика) – это геометрические знаки, совокупность точек, линий, фигур, с помощью которых изображаются статистические величины. В табличном процессоре Excel графический образ при вставке графика (диаграммы) выбирается как Тип и Вид диаграммы.

Поле графика – это то место, где расположены графические образы. В Excel это поле называется Область построения – это пространственные ориентиры, определяющие размещение геометрических знаков на поле. На диаграмме Excel – это оси: Горизонтальная ось (категорий) и Вертикальная ось (значений). Масштабные ориентиры, дающие этим знакам количественную определенность. К таким ориентирам относятся масштабные метки на осях и линии сетки (основные и вспомогательные).

Экспликация графика – это заголовок диаграммы, включающий в себя его название и соответствующие пояснения отдельных его частей (заголовки осей, подписи данных, легенда).

Виды статистических графиков:

- графики сравнения статистических показателей;
- графики структуры и структурных сдвигов;
- графики динамики;
- графики контроля выполнения плана;
- графики пространственного размещения и пространственной распространенности (картограммы и картодиаграммы);
- графики вариационных рядов (полигоны распределения);
- графики зависимости варьирующих признаков (например, корреляционное поле).

Статистический ряд – это вид группировки данных, где числовые значения признака расположены в определенном порядке. В зависимости от признака статистические ряды разделяются на атрибутивные; вариационные; ряды динамики; регрессии; ряды ранжированных значений признаков; ряды накопленных частот.

Вариационный ряд распределения – это двойной ряд чисел, который показывает, как числовые значения признака связаны с их повторяемостью в определенной выборке. Вариационным рядом распределения называют двойной ряд чисел, показывающий, каким образом числовые значения признака связаны с их повторяемостью в данной выборке.

Например, психолог провел тестирование интеллекта по тесту Векслера у 25 школьников, и баллы по второму субтесту оказались следующими: 6, 9, 5, 7, 10, 8, 9, 10, 8, 11, 9, 12, 9, 8, 10, 11, 9, 10, 8, 10, 7, 9, 10, 9, 11. Некоторые цифры попадают в данный ряд по несколько раз. Следовательно, учитывая число повторений, данный ряд можно представить в более удобной, компактной форме:

Варианты x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
Частоты вариант f_i	1	1	2	4	7	6	3	1

При использовании в эксперименте вариационного ряда распределения работают с таким понятием, как частота варианта.

Частота варианта – это понятие, показывающее сколько раз отдельные варианты могут встретиться в заданной совокупности.

Частоты обозначаются строчными буквами латинского алфавита и имеют индекс i , который соответствует номеру переменной в вариационном ряду.

Общая сумма частот вариационного ряда равна объему выборки:

$$n = \sum f_i$$

Частоты могут выражаться в процентах. Это полезно использовать при сравнении вариационных рядов, которые сильно отличаются по объемам.

Частоты, характеризующие ранжированный вариационный ряд, можно складывать или накапливать. Накопленные частоты получаются последовательным суммированием значений частот от первой частоты до последней.

Для предыдущего примера введем дополнительную строчку и назовем ее «кумуляты частот».

Варианты x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
Частоты вариант f_i	1	1	2	4	7	6	3	1
Кумуляты частот	1	2	4	8	15	21	24	25

В начале ряда частот стоит 1. В кумулятивном ряду на втором месте стоит 2, это сумма первой и второй частоты, т. е. $1 + 1$, на третьем месте стоит 4, это сумма второй (уже накопленной частоты) и третьей частоты, т. е. $2 + 2$, на четвертом – $8 = 4 + 4$ и т. д.

Графическое представление эмпирических данных (гистограмма, полигон, кумулята).

Полигоном частот (полигоном распределения) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; f_1), (x_2; f_2), \dots, (x_n; f_n)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты f_i .

Полученные точки $(x_i; f_i)$ соединяют отрезками.

Полигон частот позволяет в графическом виде представить варьирование исследуемого признака.

Пример 1. Построить полигон частот для следующего числового ряда: 1, 2, 4, 1, 2, 1, 3, 5, 3, 5, 6, 7, 6.

Решение. Воспользуемся распределением частот, полученным в примере 1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
f_i	3	2	2	1	2	2	1

Построим точки с координатами: $(1;3), (2;2), (3;2), (4;1), (5;2), (6;2), (7;1)$ и соединим их отрезками (рисунок 1).

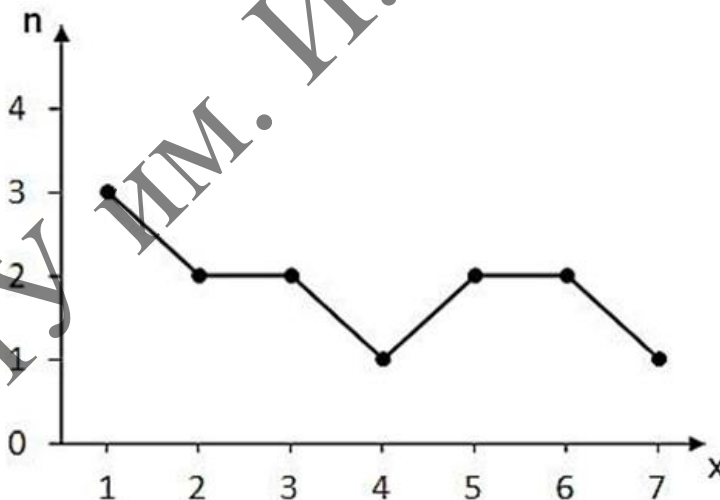


Рисунок 1 – Полигон частот

Гистограмма частот (гистограммой) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы шириной h , а высотой – частота f_i . Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними строят прямоугольники высотой f_i .

Пример 2. Построить гистограмму частот для следующего числового ряда: 90, 66, 106, 84, 105, 83, 104, 82, 97, 97, 59, 95, 78, 70, 47, 95, 100, 69, 44, 80, 75, 75, 51, 109, 89, 58, 59, 72, 74, 75, 81, 71, 68, 112, 62, 91, 93, 84.

Интервальное распределение частот.

Определим размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min} (112 - 44) = 68$. Определим ширину интервала группирования данных: $n=38$ (общее количество измерений); $k = \sqrt{n} = \sqrt{38} = 6,2$ приблизительно 7; $h = \frac{R}{k}$; $h = 68 : 7 = 9,7$ приблизительно 10.

Соответственно, левая граница интервала $x_{\min} = 44$, все последующие границы получаем из предыдущей прибавлением ширины интервала группирования $h = 10$.

Воспользуемся интервальным распределением.

Границы интервалов	[44–54]	[54–64]	[64–74]	[74–84]	[84–94]	[94–104]	[104–114]
Частота	3	4	6	9	6	5	5

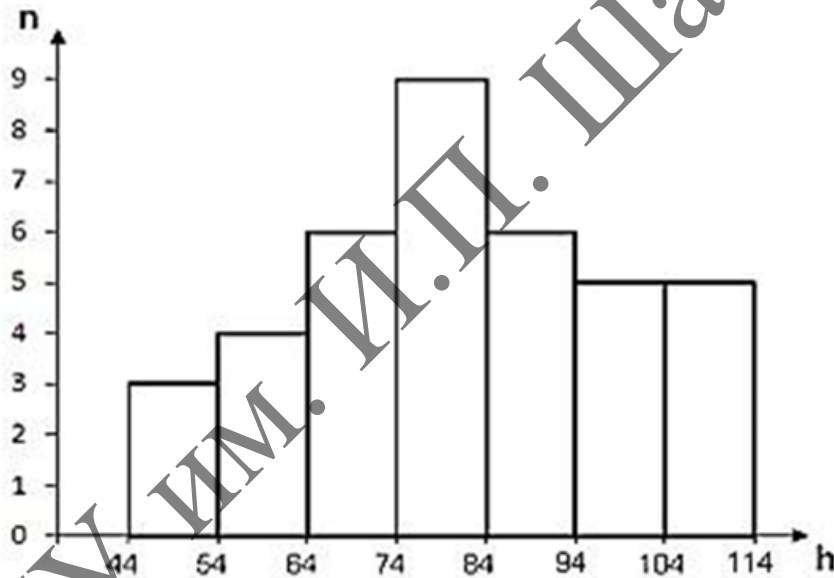


Рисунок 2 – Гистограмма частот

Нормальный закон распределения

Одним из наиболее часто встречающихся законов распределения случайной величины является нормальный закон (закон Гаусса). Он является доминирующим над другими законами распределения и играет особую роль в различных приложениях теории вероятностей.

Такие случайные величины, как ошибки измерений, отклонение точки попадания от центра цели, отклонение размеров детали от заданного номинала при массовом производстве, мгновенные значения шумового напряжения, подчиняются нормальному закону.

Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда на появление значений случайной величины влияет много различных факторов.

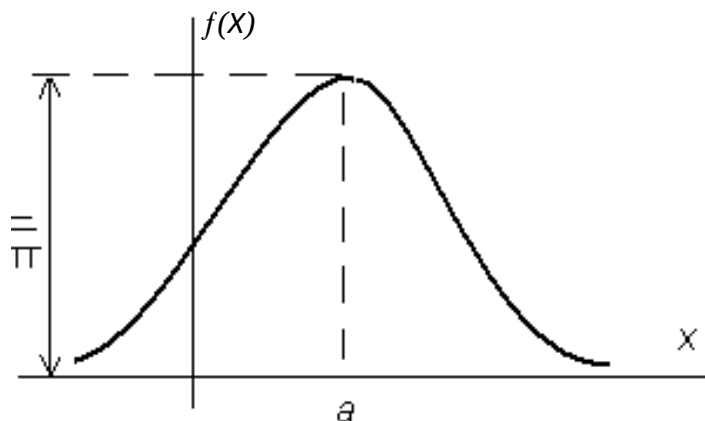


Рисунок 3 – График плотности нормального распределения

Из кривой нормального распределения (рисунок 3) следует, что значения случайной величины, которые располагаются ближе к величине a , будут появляться чаще.

Критерий Колмогорова-Смирнова – непараметрический критерий согласия, в классическом понимании предназначен для проверки простых гипотез о принадлежности анализируемой выборки некоторому известному закону распределения. Наиболее известно применение данного критерия для проверки исследуемых совокупностей на нормальность распределения.

3 ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА

Центральная тенденция – то количественное (численное) значение признака, к которому тяготеет переменная величина.

В психологических исследованиях в качестве мер центральной тенденции чаще всего используются *мода*, *медиана* и *среднее арифметическое значение*. Значительно реже используются такие меры как *среднее геометрическое*, *среднее гармоническое*, *обратное среднее гармоническое значение* и др.

Мода – наиболее часто встречающееся значение признака.

Пример. Количество чашек кофе, которое заказали 18 случайно выбранных посетителей кафе, составило: 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 5; 5. Модой распределения M_0 является значение 1, так как оно встречается наибольшее количество раз – шесть.

Пример. В ходе испытаний для 10 автомобилей определена величина тормозного пути (в метрах) со скорости 60 км/час до полной остановки: 15; 18; 18; 18; 20; 24; 24; 24; 26; 26. В данном распределении два значения – 18 и 24 имеют максимальную частоту, равную 3, поэтому распределение имеет две моды $M_{01} = 18$, $M_{02} = 24$. Такая мода называется **бимодальным**.

Пример. В ходе эксперимента исследователь-биолог измерил время выживания (в минутах) 6 бактерий: 2; 3; 5; 7; 8; 10. Все значения в распределении встречаются по одному разу, поэтому выбрать значение с максимальной частотой невозможно – у распределения **нет моды**.

В тех случаях, когда анализируются таблицы сгруппированных частот исследуемого признака, как правило, определяется **модальный класс**, т. е. тот класс распределения, в который попадает наибольшее количество частот (значений признака). Например (рисунок 4):

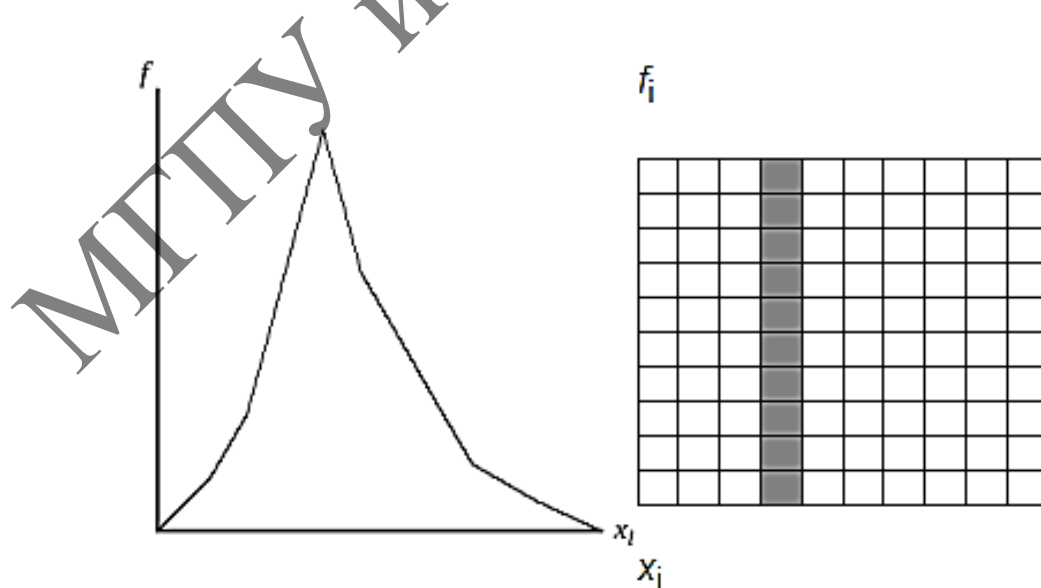


Рисунок 4 – Класс распределения

Мода не является достаточно строгой мерой центральной тенденции, поскольку она не учитывает характера распределения переменных и может использоваться лишь в предварительных выводах и прогнозах. Необходимо использовать моду только для больших объемов выборок, поскольку для малых она недостаточно информативна.

Статистические данные нужно структурировать. Демографические и экономические показатели, такие как зарплата и продолжительность жизни, оценки, баллы и многое другое, представляют собой беспорядочный массив чисел.

Чтобы привести их к порядку, можно использовать **среднее арифметическое** значение. Для этого надо сложить все числа и разделить на количество слагаемых.

Среднее арифметическое легко посчитать, но если один показатель сильно отличается от остальных, то он серьёзно искажает итоговый результат. Среднее арифметическое может не отражать действительности. Наприме, в ряду «1, 2, 1, 1, 3, 8, 10, 1, 587» оно окажется равным 68,2.

Среднее арифметическое является наиболее распространенным видом среднего.

Для несгруппированных данных применяется простое среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i.$$

Пример 1. Возраст 11 студентов института составляет 18; 24; 20; 35; 19; 23; 26; 23; 19; 21; 18 лет.

Тогда величина «среднее арифметическое» будет определяться:
 $m = (18 + 24 + 20 + 35 + 19 + 23 + 26 + 23 + 19 + 21 + 18) / 11 = 246 / 11 \approx 22,4$ года.

Для расчета среднего арифметического сгруппированных данных применяют формулу взвешенного среднего арифметического, в которой в качестве весов выступают частоты. Для дискретного частотного распределения формула имеет вид:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 f_1 + \bar{x}_2 f_2 + \dots + \bar{x}_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i f_i$$

Медиана – это числовое значение, которое делит упорядоченное множество данных пополам. Медиана определяется с помощью числового значения, показывающего номер медианы или место измерения в ранжированном вариационном ряду.

Медиана поможет найти показатель, который ближе всего к истинно среднему. На неё не влияют выбивающиеся из общей массы числа, поэтому она считается одним из самых надёжных и устойчивых показателей. Так, для

упомянутого выше ряда «1, 1, 1, 1, 2, 3, 8, 10, 587» медиана будет равна 2. Если вместо 587 поставить 87, она всё равно будет равна 2, если 7 – тоже 2. С помощью медианы можно получить более точные данные и правильнее интерпретировать статистику. Медианное значение рассчитывается из числа или пары чисел, которые больше одной половины показателей и меньше другой. Чтобы найти медиану, надо упорядочить набор чисел и просто найти в нём середину: «1, 1, 1, 1, 2, 3, 8, 10, 587».

Если в ряду чётное количество показателей, как например в «1, 1, 1, 1, 2, 3, 8, 10», надо взять два средних числа. Это 1 и 2. Их нужно сложить, а сумму разделить пополам: $(1 + 2) / 2 = 1,5$.

МГТУ им. И.П. Шамякина

4 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционный анализ: назначение и интерпретация. Понятие значимости корреляции. Диаграмма рассеяния. Виды корреляции.

Множественная и частная корреляции. Коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции Пирсона. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Интерпретация основных результатов. Алгоритм подсчета коэффициентов корреляции.

Корреляционная связь – это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого.

Корреляционные связи различаются по *форме, направлению и степени* (силе).

По форме корреляционная связь может быть *прямолинейной* или *криволинейной*.

Прямолинейной может быть, например, связь между количеством тренировок на тренажере и количеством правильно решаемых задач в контрольной сессии.

Криволинейной может быть, например, связь между уровнем мотивации и эффективностью выполнения задачи. При повышении мотивации эффективность выполнения задачи сначала возрастает, затем достигается оптимальный уровень мотивации, которому соответствует максимальная эффективность выполнения задачи; дальнейшему повышению мотивации сопутствует уже снижение эффективности.

По *направлению* корреляционная связь может быть *положительной (прямой)* и *отрицательной (обратной)*. При положительной прямолинейной корреляции более высоким значениям одного признака соответствуют более высокие значения другого, а более низким значениям одного признака – низкие значения другого. При отрицательной корреляции соотношения обратные. При положительной корреляции коэффициент корреляции имеет положительный знак, например, $r_{xy} = 0,207$, при отрицательной корреляции – отрицательный знак, например, $r_{xy} = -0,207$.

Степень, сила или теснота корреляционной связи определяется по величине коэффициента корреляции. Сила связи не зависит от её направленности и определяется по абсолютному значению коэффициента корреляции. Максимальное возможное абсолютное значение коэффициента корреляции $r_{xy} = 1$; минимальное – $r_{xy} = -1$.

Коэффициент Пирсона

Коэффициент Пирсона характеризует наличие только линейной связи между признаками, обозначаемыми, как правило, символами X и Y . Формула расчёта коэффициента корреляции построена таким образом, что, если связь между признаками имеет линейный характер, коэффициент Пирсона точно устанавливает тесноту этой связи. Поэтому он называется также *коэф-*

коэффициентом линейной корреляции Пирсона. Если же связь между переменными X и Y не линейна, то Пирсон предложил для оценки тесноты этой связи так называемое *корреляционное отношение*.

Величина коэффициента линейной корреляции Пирсона не может превышать $+1$ и быть меньше, чем -1 . Эти два числа $+1$ и -1 являются границами для коэффициента корреляции. Если при расчёте получается величина, большая $+1$ или меньшая -1 , то произошла ошибка в вычислениях.

Если знак коэффициента линейной корреляции положительный, то связь между коррелирующими признаками такова, что большей величине одного признака (переменной) соответствует большая величина другого признака (другой переменной). Иными словами, если один показатель (переменная) увеличивается, то, соответственно, увеличивается и другой показатель (переменная). Такая зависимость называется *прямой зависимостью*.

Если же коэффициент корреляции отрицателен, то большей величине одного признака соответствует меньшая величина другого. Такая зависимость носит название *обратной зависимости*.

Коэффициент корреляции Пирсона вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)},$$

где x_i – значения, принимаемые в выборке X , y_i – значения, принимаемые в выборке Y ; $\bar{x}$ – среднее значение по X , $\bar{y}$ – среднее значение по Y .

Расчёт коэффициента корреляции Пирсона предполагает, что переменные X и Y измеряются в шкале отношений, распределены нормально и число значений переменной X равно числу значений переменной Y .

5 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Статистическая гипотеза – это любое предположение о свойствах случайных величин или событий.

С помощью статистической гипотезы можно установить, насколько согласуются экспериментальные данные и выдвинутая гипотеза; определить расхождение между гипотезой и результатами статистического анализа.

Статистическая гипотеза – это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку.

Статистическая гипотеза – это предположение о свойствах случайных величин или событий, которое мы хотим проверить по имеющимся данным.

Типы статистических гипотез

Гипотезы *о типах вероятностных законов распределений случайных величин*, которые характеризуют изучаемое свойство явления или процесса. При проверке таких гипотез используют методы математической статистики, которые называют критериями согласия.

Гипотезы *о свойствах тех или других параметров* (мода, медиана, средних значений, дисперсий), которые характеризуют случайную величину. При проверке таких гипотез используют такие методы, как критерий Стьюдента, критерий Снедекора-Фишера. Данные методы опираются на количественные измерения.

Гипотезы *вероятностной зависимости двух и более признаков*, которые характеризуют различные стороны исследуемого процесса или явления. При проверке таких гипотез используют методы качественных измерений изучаемых признаков.

Гипотезы *о равенстве или различии законов распределения* случайных величин. При проверке таких гипотез используют критерии значимости.

Примеры статистических гипотез в педагогических исследованиях:

Гипотеза 1. Успеваемость класса стохастически (вероятностно) зависит от уровня обучаемости учащихся.

Гипотеза 2. Усвоение начального курса математики не имеет существенных различий у учащихся, начавших обучение с 6 или 7 лет.

Гипотеза 3. Проблемное обучение в первом классе эффективнее по сравнению с традиционной методикой обучения в отношении общего развития учащихся.

Нулевая гипотеза – это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияния фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик и т. п.

Примером нулевой гипотезы в педагогике является утверждение о том, что различие в результатах выполнения двумя группами учащихся одной и той же контрольной работы вызвано лишь случайными причинами.

Конкурирующей или альтернативной гипотезой называется другое проверяемое предположение (не всегда строго противоположное или обратное первому).

Для приведенного выше примера гипотезы H_0 одна из возможных альтернатив H_1 будет определена как: уровни выполнения работы в двух группах учащихся различны, и это различие определяется влиянием неслучайных факторов, например, тех или других методов обучения.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость проверить ее. Так как проверку производят статистическими методами, то данная проверка называется статистической.

При проверке статистических гипотез возможны **ошибки** (ошибочные суждения) двух видов:

- можно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она на самом деле верна (так называемая *ошибка первого рода*);
- можно принять нулевую гипотезу, когда она на самом деле не верна (так называемая *ошибка второго рода*).

Ошибка, состоящая в принятии нулевой гипотезы, когда она ложна, качественно отличается от ошибки, состоящей в отвержении гипотезы, когда она истинна. Эта разница очень существенна вследствие того, что различна значимость этих ошибок.

Уровень значимости – это вероятность ошибки первого рода при принятии решения (вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы).

Альтернативные гипотезы принимаются тогда и только тогда, когда опровергается нулевая гипотеза. Это бывает в случаях, когда различия экспериментальной и контрольной групп настолько значимы (статистически достоверны), что риск ошибки отвергнуть нулевую гипотезу и принять альтернативную не превышает одного из трех принятых уровней значимости статистического вывода:

- первый уровень – 5 %; где допускается риск ошибки в выводе в пяти случаях из ста теоретически возможных таких же экспериментов при строго случайном отборе испытуемых для каждого эксперимента;
- второй уровень – 1 %, т. е., соответственно, допускается риск ошибиться только в одном случае из ста;
- третий уровень – 0,1 %, т. е. допускается риск ошибиться только в одном случае из тысячи.

В педагогических исследованиях, не нуждающихся в очень высоком уровне достоверности, принимают 5 % уровень значимости.

Статистика критерия (T) – это некоторая функция от исходных данных, по значению которой проверяется нулевая гипотеза. Чаще всего статистика критерия является числовой функцией, но она может быть и любой другой функцией, например, многомерной функцией.

Всякое правило, на основе которого отклоняется или принимается нулевая гипотеза, называется **критерием для проверки данной гипотезы**.

Статистический критерий (критерий) – это случайная величина, которая служит для проверки статистических гипотез.

Критическая область – это совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу отвергают.

Область принятия нулевой гипотезы (область допустимых значений) – это совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу принимают. При справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что статистика критерия попадает в область принятия нулевой гипотезы, должна быть равна $1 - P_{кр}$.

Процедура проверки нулевой гипотезы в общем случае включает следующие этапы:

1. Задается допустимая вероятность ошибки первого рода ($P_{кр} = 0,05$).
2. Выбирается статистика критерия (T).
3. Ищется область допустимых значений.
4. По исходным данным вычисляется значение статистики T .

Если T (статистика критерия) принадлежит области принятия нулевой гипотезы, то нулевая гипотеза принимается (делается заключение, что исходные данные не противоречат нулевой гипотезе), а в противном случае нулевая гипотеза отвергается, и принимается альтернативная гипотеза.

При проверке статистических гипотез с помощью статистических пакетов программа выводит на экран вычисленное значение уровня значимости P и подсказку о возможности принятия или неприятия нулевой гипотезы. Если вычисленное значение P превосходит выбранный уровень $P_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза, а в противном случае – альтернативная гипотеза. Чем меньше вычисленное значение P , тем более исходные данные противоречат нулевой гипотезе.

Число степеней свободы у какого-либо параметра определяют как число опытов, по которым рассчитан данный параметр, минус количество одинаковых значений, найденных по этим опытам независимо друг от друга.

Величина Φ называется **мощностью критерия** и представляет собой вероятность отклонения неверной нулевой гипотезы, то есть вероятность правильного решения.

Мощность критерия – вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива альтернативная гипотеза. Чем больше Φ , тем вероятность ошибки 2-го рода меньше.

6 АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Дисперсионный анализ – это анализ, применимый для исследования влияния одной или нескольких качественных переменных (факторов) на одну зависимую количественную переменную.

Анализ временных рядов – это анализ, применимый к одиночным или связанным временным рядам, позволяющий выделять различные формы периодичности и взаимовлияния временных процессов, а также осуществлять прогнозирование будущего поведения временного ряда.

Регрессионные процедуры – это процедуры, позволяющие рассчитать модель, описываемую некоторым уравнением и отражающую функциональную зависимость между экспериментальными количественными переменными, а также проверить гипотезу об адекватности модели экспериментальным данным.

По полученным результатам можно оценить природу и степень зависимости переменных и предсказать новые значения зависимой переменной.

Методы контроля качества – это методы, предназначенные для контроля выпускаемой продукции с целью выявления нарушений и узких мест в организации производства и в технологических процессах, ведущих к снижению качества продукции.

Корреляционный анализ – это группа статистических методов, направленная на выявление и математическое представление структурных зависимостей между выборками.

Кластерный анализ – это анализ, осуществляющий разбиение объектов на заданное число удаленных друг от друга классов, а также построение дерева классификаций объектов посредством иерархического объединения их в группы (кластеры).

Факторный анализ – это анализ, осуществляющий нахождение в многомерном пространстве первичных переменных (значения которых регистрируются в эксперименте), сокращенной системы вторичных переменных (факторов).

Метод факторного анализа первоначально был разработан в психологии с целью выделения отдельных компонентов человеческого интеллекта из многомерных данных по измерению различных проявлений умственных способностей.

Дисперсионный анализ – это статистический метод, предназначенный для выявления влияния ряда отдельных факторов на результаты экспериментов.

Дисперсионный анализ был предложен Р. Фишером. В основе дисперсионного анализа лежит предположение о том, что одни переменные могут рассматриваться как причины (факторы, независимые переменные), а другие – как следствия (зависимые переменные). Независимые переменные называют иногда регулируемыми факторами именно потому, что в эксперименте исследователь имеет возможность варьировать ими и анализировать получающийся результат.

Сущность дисперсионного анализа заключается в расчленении общей дисперсии изучаемого признака на отдельные компоненты, обусловленные влиянием конкретных факторов, и проверке гипотез о значимости влияния этих факторов на исследуемый признак. Сравнивая компоненты дисперсии друг с другом посредством F – критерия Фишера, можно определить, какая доля общей вариативности результативного признака обусловлена действием регулируемых факторов.

Исходным материалом для дисперсионного анализа служат данные исследования трех и более выборок, которые могут быть как равными, так и неравными по численности, как связными, так и несвязными.

По количеству выявляемых регулируемых факторов дисперсионный анализ может быть однофакторным (при этом изучается влияние одного фактора на результаты эксперимента), двухфакторным (при изучении влияния двух факторов) и многофакторным (позволяет оценить не только влияние каждого из факторов в отдельности, но и их взаимодействие).

Дисперсионный анализ относится к группе параметрических методов, поэтому его следует применять только тогда, когда доказано, что распределение является нормальным.

Однофакторный дисперсионный анализ для несвязанных выборок

Изучается действие только одной переменной (фактора) на исследуемый признак. Исследователя интересует вопрос, как изменяется определенный признак в разных условиях действия переменной (фактора).

Например, как изменяется время решения задачи при разных условиях мотивации испытуемых (низкой, средней, высокой мотивации) или при разных способах предъявления задачи (устно, письменно или в виде текста с графиками и иллюстрациями), в разных условиях работы с задачей (в одиночестве, в комнате с преподавателем, в классе).

В первом случае фактором является мотивация, во втором – степень наглядности, в третьем – фактор публичности. В данном варианте метода влиянию каждой из градаций подвергаются разные выборки испытуемых. Градаций фактора должно быть не менее трех.

Пример 1. Три различные группы из шести испытуемых получили списки из десяти слов.

Первая группа – слова предъявлялись с низкой скоростью – 1 слово в 5 секунд. Вторая группа – слова предъявлялись со средней скоростью – 1 слово в 2 секунды, Третья группа – слова предъявлялись с большой скоростью – 1 слово в секунду.

Было предсказано, что показатели воспроизведения будут зависеть от скорости предъявления слов. Результаты представлены в таблице.

Таблица 1 – Результаты исследования

№ испытуемого	Группа 1 низкая скорость	Группа 2 средняя скорость	Группа 3 высокая скорость
1	8	7	4

Продолжение таблицы 1

2	7	8	5
3	9	5	3
4	5	4	6
5	6	6	2
6	8	7	4
сумма	43	37	24
средние	7,17	6,17	4,00
Общая сумма:104			

Дисперсионный однофакторный анализ позволяет проверить гипотезы:

H_0 : различия в объеме воспроизведения слов между группами являются не более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы

H_1 : Различия в объеме воспроизведения слов между группами являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы. Однофакторный дисперсионный анализ для несвязанных выборок

Подсчитаем $SS_{\text{факт}}$ – вариативность признака, обусловленная действием исследуемого фактора. Обозначение SS – сокращение от «суммы квадратов» (sum of squares):

$$SS_{\text{факт}} = \frac{\sum T_c^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{N},$$

где $\sum T_c^2$ – сумма индивидуальных значений по каждому из условий. Для рассматриваемого нами примера – это суммы по группам 43, 37, 24 (см таблицу 1);

n – количество условий (градаций) фактора (равно 3);

N – количество испытуемых в каждой группе (равно 6);

N – общее количество индивидуальных значений (равно 18);

$(\sum x_i)^2$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений (= 1042 = 10816).

Существует разница между $\sum T_c^2$, в которой все индивидуальные значения сначала возводятся в квадрат, а потом суммируются, и $(\sum x_i)^2$, где индивидуальные значения сначала суммируются для получения общей суммы, а потом уже эта сумма возводится в квадрат.

Рассчитав фактическую вариативность признака, получаем:

$$SS_{\text{факт}} = \frac{(43^2 + 37^2 + 24^2)}{6} - \frac{(104)^2}{18} = 31,44.$$

Подсчитаем:

$$\begin{aligned}
 SS_{\text{общ}} &= \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N} = \\
 &= \frac{8^2 + 7^2 + 9^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 7^2 + 8^2 \dots + 2^2 + 4^2 - 104^2}{18} = 63,11
 \end{aligned}$$

1. Общую вариативность признака:

$$SS_{\text{общ}} = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N} = \frac{8^2 + 7^2 + 9^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 7^2 + 8^2 + \dots + 2^2 + 4^2 - 104^2}{18} = 63.11.$$

2. Случайную остаточную величину, обусловленную неучтенными факторами:

$$SS_{\text{сл}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{факт}} = 63,11 - 31,44 = 31,67.$$

3. Число степеней свободы:

$$k_{\text{факт}} = k_1 = c - 1 = 3 - 1,$$

$$k_{\text{общ}} = N - 1 = 18 - 1 = 17,$$

$$k_{\text{случ}} = k_2 = k_{\text{общ}} - k_{\text{факт}} = 17 - 2 = 15.$$

4. «Средний квадрат» или математическое ожидание суммы квадратов, усредненная величина соответствующих сумм квадратов SS равна:

$$MS_{\text{факт}} = \frac{SS_{\text{факт}}}{k_{\text{факт}}} = \frac{31,44}{2} = 15,72,$$

$$MS_{\text{сл}} = \frac{SS_{\text{сл}}}{k_{\text{сл}}} = \frac{31,67}{15} = 2,11.$$

5. Значение статистики критерия $F_{\text{эмп}}$ рассчитаем по формуле:

$$F_{\text{эмп}} = \frac{MS_{\text{факт}}}{MS_{\text{случ}}} = \frac{15,72}{2,11} = 7,45.$$

6. Определим $F_{\text{крит}}$ по статистическим таблицам. Для $df_1 = k_1 = 2$ и $df_2 = k_2 = 15$ табличное значение статистики равно 3,68, если $F_{\text{эмп}} < F_{\text{крит}}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная гипотеза.

Для нашего примера $F_{\text{эмп}} > F_{\text{крит}}$ ($7.45 > 3.68$), следовательно, принимается альтернативная гипотеза.

Вывод: различия в объеме воспроизведения слов между группами являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы ($p < 0,05$). Таким образом, скорость предъявления слов влияет на объем их воспроизведения.

Однофакторный дисперсионный анализ для связанных выборок

Метод дисперсионного анализа для связанных выборок применяется в тех случаях, когда исследуется влияние разных градаций фактора или разных условий на одну и ту же выборку испытуемых. Градаций фактора должно быть не менее трех.

В данном случае различия между испытуемыми – возможный самостоятельный источник различий.

Однофакторный дисперсионный анализ для связанных выборок позволит определить, что перевешивает – тенденция, выраженная кривой изменения фактора, или индивидуальные различия между испытуемыми.

Фактор индивидуальных различий может оказаться более значимым, чем фактор изменения экспериментальных условий.

Пример 2. Группа из 5 испытуемых была обследована с помощью трех экспериментальных заданий, направленных на изучение интеллектуальной настойчивости. Каждому испытуемому индивидуально предъявлялись последовательно три одинаковые анаграммы: четырехбуквенная, пятибуквенная и шестибуквенная. Можно ли считать, что фактор длины анаграммы влияет на длительность попыток ее решения? Длительность решения анаграмм (с).

Таблица 2 – Длительность решения анаграмм

Код испытуемого	Условие 1. Четырехбуквенная анаграмма	Условие 2. Пятибуквенная анаграмма	Условие 3. Шестибуквенная анаграмма	Суммы по испытуемым
1	5	235	7	247
2	7	604	20	631
3	2	93	5	100
4	2	171	8	181
5	35	141	7	183
Суммы	51	1244	47	1342

Сформулируем гипотезы. Наборов гипотез в данном случае два.

Набор А.

$H_0(A)$: Различия в длительности попыток решения анаграмм разной длины являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

$H_1(A)$: Различия в длительности попыток решения анаграмм разной длины являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Набор Б.

$H_0(B)$: Индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

$H_1(B)$: Индивидуальные различия между испытуемыми являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Последовательность операций в однофакторном дисперсионном анализе для связанных выборок:

1. Подсчитаем $SS_{\text{факт}}$ – вариативность признака, обусловленную действием исследуемого фактора по формуле:

$$SS_{\text{факт}} = \frac{\sum T_c^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{N},$$

$$SS_{\text{факт}} = \frac{(51^2 + 1244^2 + 47^2)}{5} - \frac{(1342)^2}{15} = 190405,$$

где T_c – сумма индивидуальных значений по каждому из условий (столбцов). Для нашего примера 51, 1244, 47 (см. таблицу 2);

c – количество условий (градаций) фактора (=3);

n – количество испытуемых в каждой группе (=5);

N – общее количество индивидуальных значений (=15);

$(\sum x_i)^2$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений (=13422).

2. Подсчитаем $SS_{\text{исп}}$ – вариативность признака, обусловленную индивидуальными значениями испытуемых:

$$SS_{\text{исп}} = \frac{\sum T_c^2}{c} - \frac{(\sum x_i)^2}{N},$$

$$SS_{\text{исп}} = \frac{(247^2 + 631^2 + 100^2 + 181^2 + 183^2)}{3} - \frac{(1342)^2}{15} = 58409,$$

где T_c – сумма индивидуальных значений по каждому из условий (столбцов). Для нашего примера 247, 631, 100, 181, c – количество условий (градаций) фактора (=3);

N – общее количество индивидуальных значений (=15);

3. $SS_{\text{общ}}$ – общую вариативность признака по формуле:

$$SS_{\text{общ}} = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N} =$$

$$= \frac{5^2 + 7^2 + 2^2 + 2^2 + 35^2 + 235^2 + 604^2 + 93^2 + \dots + 8^2 + 7^2 - 1342^2}{15} = 359642.$$

4. Случайную (остаточную) величину $SS_{\text{сл}}$, обусловленную неучтенными факторами:

$$SS_{\text{сл}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{факт}} - SS_{\text{исп}} = 359642 - 190405 - 58409 = 110828.$$

5. Число степеней свободы:

$$k_{\text{факт}} = k_1 = c - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$k_{\text{исп}} = n - 1 = 5 - 1 = 4,$$

$$k_{\text{общ}} = N - 1 = 15 - 1 = 14,$$

$$k_{\text{случ}} = k_2 = k_{\text{общ}} - k_{\text{факт}} - k_{\text{исп}} = 14 - 2 - 4 = 8.$$

6. «Средний квадрат» или математическое ожидание суммы квадратов, усредненная величина соответствующих сумм квадратов SS равна:

$$MS_{\text{факт}} = \frac{SS_{\text{факт}}}{k_{\text{факт}}} = \frac{190405}{2} = 95202,2,$$

$$MS_{\text{исп}} = \frac{SS_{\text{исп}}}{k_{\text{исп}}} = \frac{58409}{2} = 14602,2,$$

$$MS_{\text{сл}} = \frac{SS_{\text{сл}}}{k_{\text{сл}}} = \frac{110827}{8} = 13853,4.$$

7. Значение статистики критерия Фэмп:

$$F_{\text{эмп_факт}} = \frac{MS_{\text{факт}}}{MS_{\text{случ}}} = \frac{95202,5}{13523,4} = 6,872,$$

$$F_{\text{эмп_исп}} = \frac{MS_{\text{исп}}}{MS_{\text{исп}}} = \frac{14602,5}{13853,4} = 1,054.$$

8. Определим $F_{\text{крит}}$ по статистическим таблицам Приложения 1. Для $df_1 = k_1 = 2$ и $df_2 = k_2 = 8$ табличное значение статистики $F_{\text{крит_факт}} = 4,46$ и для $df_3 = k_3 = 4$ и $df_2 = k_2 = 8$ $F_{\text{крит_исп}} = 3,84$.

$$F_{\text{эмп_факт}} > F_{\text{крит_факт}} (6,872 > 4,46),$$

следовательно, принимается альтернативная гипотеза.

$$F_{\text{эмп_исп}} < F_{\text{крит_исп}} (1,054 < 3,84),$$

следовательно, принимается нулевая гипотеза.

Вывод: различия в объеме воспроизведения слов в разных условиях являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами ($p < 0,05$). Индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ахмеджанова, Г. В. Применение методов математической статистики в психолого-педагогических исследованиях [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / Г. В. Ахмеджанова, И. В. Антонова // Репозиторий Тольяттинского государственного университета. – Режим доступа: <http://hdl.handle.net/123456789/3403>. – Дата доступа: 10.06.2024.

2. Белановская, М. Л. Статистические методы в психологии : учеб. пособие для студентов вузов / М. Л. Белановская. – Минск : Респ. ин-т высш. шк., 2022. – 296 с.

3. Булдык, Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика: пособие для студентов : в 2 т. / Г. М. Булдык ; Белорус. гос. пед. ун-т. – Минск : БГПУ, 2019. – Т. 2 : Математическая статистика. – 200 с.

4. Гордейко, В. В. Методы статистического анализа эмпирических данных [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / В. В. Гордейко. – Минск : Белорус. гос. пед. ун-т, 2022. – 1 электрон. опт. диск (DVD-R).

5. Ермолаев, О. Ю. Математическая статистика для психологов : учеб. пособие / О. Ю. Ермолаев ; Рос. акад. образования, Моск. психол.-соц. ун-т. – 7-е изд., стер. – М. : Флинта : МПСУ, 2014. – 335 с.

6. Новиков, А. И. Математические методы в психологии : учеб. пособие по дисциплине «Математические методы в психологии» для студентов вузов / А. И. Новиков, Н. В. Новикова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2016. – 287 с.

7. Сидоренко, Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. – СПб. : Речь, 2007. – 349 с.

8. Статистика : учеб. и практикум для вузов / под ред. И. И. Елисеевой. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2024. – 388 с.

9. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере : учеб. пособие / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – М. : Моск. центр непрерыв. мат. образования, 2016. – 367 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альтернативная гипотеза 23
Вариационный ряд распределения 13
Выборочная совокупность 8
Генеральная совокупность 8
Гистограмма частот 14
График 12
Единица совокупности 6
Исходные данные 9
Конкурирующая гипотеза 23
Корреляционный анализ 20
Коэффициент Пирсона 20
Критерий Колмагорова-Смирнова 16
Кумулята частот 13
Медиана 18
Многомерные данные 10
Мода 17
Нулевая гипотеза 22
Полигон частот 14
Прикладная математическая статистика 5
Ранг наблюдения 9
Совокупность 6
Среднее арифметическое 18
Статистика 4
Статистика критерия 23
Статистическая гипотеза 22
Статистическая сводка и группировка 5
Статистическая совокупность 6
Статистические закономерности 5
Статистический критерий 24
Статистический ряд 13
Статистическое наблюдение 4
Таблица 11
Уровень значимости 23
Центральная тенденция 17
Частота варианта 13
Экспликация графика 12
Критическая область 24
Область принятия нулевой гипотезы 24
Мощность критерия 24
Дисперсионный анализ 25
Регрессионные процедуры 25
Методы контроля качества 25
Корреляционный анализ 25
Кластерный анализ 25
Факторный анализ 25
Дисперсионный анализ 25

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1 Введение в статистический анализ	4
2 Табулирование и наглядное представление данных	11
3 Описательная статистика	17
4 Корреляционный анализ	20
5 Статистические гипотезы в психолого-педагогических исследованиях	22
6 Аналитическая статистика	25
Список использованных источников	32
Предметный указатель	33

МГПУ им. И.П. Шамякина

Справочное издание

**Старовойтова Олеся Владимировна,
Иваненко Лариса Анатольевна**

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
В СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОМ
И ПСИХОЛОГИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ**

Справочник для студентов,
получающих углубленное высшее образование (магистратура)
по специальности 7-06-0114-01 «Социально-педагогическое
и психологическое образование»

Корректор *Л. Н. Мазуркевич*
Оригинал-макет *М. В. Бобкова*

Иллюстративный материал на первой странице обложки заимствован
из общедоступных интернет-ресурсов, не содержащих ссылок на авторов
этих материалов и ограничения на их заимствование.

Подписано в печать 24.12.2024. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Цифровая печать. Усл. печ. л. 2,03. Уч.-изд. л. 1,89.
Тираж 40 экз. Заказ 37.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Мозырский государственный
педагогический университет имени И. П. Шамякина».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/306 от 22 апреля 2014 г.
Ул. Студенческая, 28, 247777, Мозырь, Гомельская обл.
Тел. (0236) 24-61-29.