5. Ökcü, Ö. Joule-Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydıner // Eur. Phys. J. C. – 2017. – V. 77. – Art. N. 24. – P. 1–7.

6. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск : НГУ, 2000. – 608 с.

7. Скачёк, Т.В. Об эффекте Джоуля-Томсона в газах Бертло и Дитеричи-I / Т.В. Скачёк, С.В. Станкевич, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 4 (55). – Ч. 2. – С. 184–187.

8. Kastor, D. Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // Class. Quantum Gravity. – 2009. – V. 26. – P. 195011.

УДК 537.8

Е.М. Овсиюк[1], А.В. Ивашкевич[2], В.М. Редьков[2]

[1]Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

[2]Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

СПИНОРНЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

Изложен подход к электродинамике Максвелла на основе использования спинорного формализма.

Ключевые слова: спинорный формализм, электродинамика Максвелла, тетрадный формализм.

Цель работы – кратко изложить сущность подхода к электродинамике Максвелла на основе использования спинорного формализма [1], [2]. Введем необходимые спинорные обозначения, исходя из уравнения Дирака:

$$(i\gamma^a\partial_a - m)\Psi = 0, \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{vmatrix}, \quad \{\alpha, \dot{\alpha}\} = 1, 2;$$

$$\sigma^a = (I, \sigma^j), \quad \bar{\sigma}^a = (I, -\sigma^j).$$

В расщепленном виде имеем два уравнения

$$i\sigma^a\partial_a\xi = m\eta, \quad i\bar{\sigma}^a\partial_a\eta = m\xi. \tag{1}$$

Удобно приписать спинорные индексы элементам матриц Паули: $\sigma^a = (\sigma^a)_{\dot{\beta}\alpha}, \bar{\sigma}^a = (\bar{\sigma}^a)^{\beta\dot{\alpha}}$, тогда уравнения (1) записываются в спинорном ковариантном виде так:

$$i(\sigma^a\partial_a)_{\dot{\beta}\alpha}\xi^\alpha = m\eta_{\dot{\beta}}, \quad i(\bar{\sigma}^a\partial_a)^{\beta\dot{\alpha}}\eta_{\dot{\alpha}} = m\xi^\beta.$$

Электромагнитный тензор эквивалентен паре симметричных и комплексно-сопряженных друг другу спиноров: $F_{mn} \Leftrightarrow \{\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\}$; при этом 8 уравнений Максвелла записываются как

$$(\sigma^a \partial_a)_{\dot{\rho}\alpha} \xi^{\alpha\beta} = (\sigma^b)_{\dot{\rho}\alpha} \epsilon^{\alpha\beta} J_b, \quad (\bar{\sigma}^a \partial_a)^{\rho\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}^b)^{\rho\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} J_b; \tag{2}$$

второе уравнение является комплексно-сопряженным первому. В (2) использованы спинорные метрические матрицы:

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = i\sigma^2, \quad (\epsilon^{\alpha\beta}) = -i\sigma^2, \quad (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = i\sigma^2, \quad (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -i\sigma^2.$$

Чтобы показать эквивалентность этих спинорных уравнений обычным векторным уравнениям Максвелла, удобнее перейти к безындексным обозначениям. Для этого учтем равенства $(\xi^{\alpha\beta}) = \Sigma^{mn} F_{mn} \sigma^2$, $(\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -\bar{\Sigma}^{mn} F_{mn} \sigma^2$, где (см. [1])

$$\Sigma^{mn} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^m \sigma^n - \bar{\sigma}^n \sigma^m), \quad \bar{\Sigma}^{mn} = \frac{1}{4}(\sigma^m \bar{\sigma}^n - \sigma^n \bar{\sigma}^m).$$

Тогда уравнения (2) записываются таким образом:

$$\sigma^a \partial_a \Sigma^{mn} F_{mn} = -\sigma^b J_b, \quad \bar{\sigma}^a \partial_a \bar{\Sigma}^{mn} F_{mn} = -\bar{\sigma}^b J_b. \tag{3}$$

Будем учитывать тождества

$$\Sigma^{mn} F_{mn} = \sigma^1 (F_{01} - iF_{23}) + \sigma^2 (F_{02} - iF_{31}) + \sigma^3 (F_{03} - iF_{12}),$$
$$\bar{\Sigma}^{mn} F_{mn} = \sigma^1 (-F_{01} - iF_{23}) + \sigma^2 (-F_{02} - iF_{31}) + \sigma^3 (-F_{03} - iF_{12});$$

в обозначениях

$$F_{01} = -E^1, \; F_{02} = -E^2, \; F_{03} = -E^3, \; F_{23} = B^1, \; F_{31} = B^2, \; F_{12} = B^3$$

они записываются короче:

$$\begin{aligned} \Sigma^{mn} F_{mn} &= -\sigma^1 (E^1 + iB^1) - \sigma^1 (E^2 + iB^2) - \sigma^1 (E^3 + iB^3) = -\sigma^j a_j, \\ \bar{\Sigma}^{mn} F_{mn} &= \sigma^1 (E^1 - iB^1) + \sigma^1 (E^2 - iB^2) + \sigma^1 (E^3 - iB^3) = +\sigma^j b_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, имеем симметричные спиноры:

$$(\xi^{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} -i(a_1 - ia_2) & ia_3 \\ ia_3 & +i(a_1 + ia_2) \end{vmatrix}, (\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = \begin{vmatrix} -i(b_1 - ib_2) & ib_3 \\ ib_3 & i(b_1 + ib_2) \end{vmatrix}.$$

Учитывая (4), уравнения (3) можно представить в виде

$$(\partial_0 + \sigma^l \partial_l)(\sigma^k a_k) = J_0 + \sigma^j J_j, \quad (\partial_0 - \sigma^l \partial_l)(\sigma^k b_k) = -J_0 + \sigma^j J_j. \tag{5}$$

Из (5), воспользовавшись законом умножения матриц Паули, получим

$$\sigma^n \partial_0 a_n + (\delta_{lk} + i\epsilon_{nlk} \sigma^n) \partial_l a_k = J_0 + \sigma^n J_n,$$

$$\sigma^n \partial_0 b_n - (\delta_{lk} + i\epsilon_{nlk} \sigma^n) \partial_l b_k = -J_0 + \sigma^n J_n.$$

Отсюда следуют 4 уравнения:

$$\partial_l a_l = J_0, \quad \partial_0 a_n + i\epsilon_{nlk} \partial_l a_k = J_n,$$

$$\partial_l b_l = J_0, \quad \partial_0 b_n - i\epsilon_{nlk}\partial_l b_k = J_n,$$

или

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \partial_l(E^l + iB^l) = J_0, \\
(2) & \partial_0(E^l + iB^l) + i\epsilon_{nlk}\partial_l(E^k + iB^k) = J_n, \\
(1') & \partial_l(E^l - iB^l) = J_0, \\
(2') & \partial_0(E^l - iB^l) - i\epsilon_{nlk}\partial_l(E^k - iB^l) = J_n.
\end{array}
$$

Складывая и вычитая эти уравнения попарно, находим

$$1+1', \quad \partial_l E^l = J_0, \quad 1-1', \qquad \partial_l B^l = 0,$$

$$2+2', \quad \partial_0 E^n - \epsilon_{nlk}\partial_l B^k = J_k, \qquad 2-2', \quad \partial_0 B^n + \epsilon_{nlk}\partial_l E^k = 0,$$

что можно отождествить с векторной формой уравнений Максвелла:

$$div\, E = J^0, \quad div\, B = 0,$$
$$rot\, B = \partial_0 E + J, \quad rot\, E = -\partial_0 B,$$

где $E = (E^n),\ B = (B^n),\ J^0 = J_0,\ J = (J^n) = (-J_n)$.

Теперь кратко рассмотрим вопрос об обобщении этой спинорной формы уравнений Максвелла на случай использования криволинейных координат (либо в плоском пространстве Минковского, либо в моделях пространства с превдоримановой геометрией).

Такие общековариантные уравнения Максвелла в спинорном формализме можно получить, применив рецепт, используемый при обобщении уравнения Дирака (подробнее обозначения см. в [1]):

$$i\sigma^\alpha(x)\left[\partial_\alpha + \Sigma_\alpha(x)\right]\xi(x) = m\eta(x),$$
$$i\bar\sigma^\alpha(x)\left[\partial_\alpha + \bar\Sigma_\alpha(x)\right]\eta(x) = m\xi(x).$$

Уравнения Максвелла для двух спиноров 2-го ранга обобщаются таким образом (для общности учитываем возможные источники электромагнитного поля):

$$
\begin{array}{c}
i\sigma^\alpha(x)\left[\partial_\alpha + \Sigma_\alpha(x)\otimes I + I\otimes\Sigma_\alpha(x)\right]\xi(x) = \sigma^\beta(x)(-i\sigma^2)J_\beta(x), \\
i\bar\sigma^\alpha(x)\left[\partial_\alpha + \bar\Sigma_\alpha(x)\otimes I + I\otimes\bar\Sigma_\alpha(x)\right]\eta(x) = \sigma^\beta(x)(+i\sigma^2)J_\beta(x).
\end{array}
\tag{6}
$$

Как и в пространстве Минковского, второе уравнение в (6) является комплексно-сопряженным первому, поэтому достаточно анализировать только первое. Далее для простоты будем рассматривать уравнение без источников

$$\sigma^\alpha(x)\left[\partial_\alpha + \Sigma_\alpha(x)\otimes I + I\otimes\Sigma_\alpha(x)\right]\xi(x) = 0. \tag{7}$$

В (7) величина $\xi(x)$ представляет симметричный спинор 2-го ранга, ее можно рассматривать как симметричную комплексную (2×2)-матрицу. Уравнение (7) удобнее записывать с использованием коэффициентов вращения Риччи $\gamma_{abc}(x)$ так:

$$\left[\sigma^c e^\alpha_{(c)}(x)\partial_\alpha + \sigma^c\left(\frac{1}{2}\Sigma^{ab}\otimes I + I\otimes\frac{1}{2}\Sigma^{ab}\right)\gamma_{abc}(x)\right]\xi(x) = 0.$$

Рассмотрим простой пример сферических координат $x^\alpha = (t, \theta, \phi, r)$ в пространстве Минковского

$$dS^2 = dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - dr^2, \quad \varphi = (1 - r^2);$$

соответствующая этой метрике тетрада может быть выбрана такой:

$$e_{(0)\alpha} = (1,0,0,0), \quad e_{(3)\alpha} = (0,0,0,1), \quad e_{(1)\alpha} = (0,\frac{1}{r},0,0), \quad e_{(2)\alpha} = (0,0,\frac{1}{r\sin\theta},0),$$

тогда спинорное уравнение Максвелла примет вид

$$\{\frac{\partial}{\partial t} + \sigma^3\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}(-\sigma^1\frac{\sigma^2\otimes I + I\otimes\sigma^2}{2} + \sigma^2\frac{\sigma^1\otimes I + I\otimes\sigma^1}{2}) +$$
$$+\frac{1}{r}[\sigma^1\partial_\theta F - i\sigma^2\frac{i\partial_\phi + \cos\theta(\sigma^3\otimes I + I\otimes\sigma^3)/2}{\sin\theta}]\}\xi = 0.$$

Следует специально отметить, что в обычной схеме уравнения Максвелла содержат 8 дифференциальных уравнений для 6-ти вещественных функций; спинорная форма заменяет их на 4 уравнения для трех комплексно-значных функций; фактически они строятся как комбинация из двух 3-векторов $(E + icB)$ (при этом, как показывает анализ конкретных примеров, из 4-х уравнения только три являются независимыми).

Список использованных источников

1. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. − Минск : Белорусская наука, 2009. − 486 с.

2. Спинорные методы в квантовой механике частиц с высшими спинами / А.В. Ивашкевич, Я.А. Войнова, Н.Г. Крылова [и др.]. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 433 с.

УДК 537.8

Е.М. Овсиюк[1], А.В. Ивашкевич[2], В.М. Редьков[2]

[1]Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

[2]Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА, СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Развит метод построения решений спинорных уравнений Максвелла в пространствах с псевдоримановой геометрической структурой. Метод основан на использовании тетрадного формализма, при этом для определенности использована геометрия пространства де Ситтера. В качестве простого примера рассмотрено основное радиальное уравнение для электромагнитного поля в случае пространства Минковского.

Ключевые слова: спинорные уравнения Максвелла, тетрадный формализм, сферическая симметрия, разделение переменных, точные решения.