

**Рисунок 2 – Скриншот результата работы программного модуля, осуществляющего операции над графами, заданными случайным образом по количеству вершин**

В случае необходимости задания ориентированного графа в функции AdjacencyGraph присутствует опция DirectedEdges → True. Описанный программный модуль является рабочим и для ориентированных графов.

**Заключение.** В ходе проведения работы были изучены основные встроенные функции в рассматриваемой системе компьютерной алгебры Mathematica для работы с графами. Продемонстрированы некоторые возможности Mathematica для задания графов, проведении над ними операций и их визуализации.

#### Список использованных источников

1. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.]. – М. : Наука, 1990.
2. Wolfram Demonstrations Project [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://demonstrations.wolfram.com>.
3. Зашук, Е.Н. Использование методов компьютерной алгебры в лекциях «Предел числовой последовательности и функции» / Е.Н. Зашук, А.И. Жук, Л.П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2023. – № 1 (130). – С. 125–128.
4. Чичурин, А.В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» : в 3 ч. / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина. – Брест : Белорус. гос. ун-т, 2016. – Ч. 1. – 62 с.
5. Зашук, Е.Н. Вычислительная визуализация определения эллипса / Е.Н. Зашук, А.И. Жук // XII республиканская научно-практическая конференция «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» : материалы конф., Брест, 20 окт. 2023 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Д.В. Грицука. – Брест, 2023. – С. 45–46.
6. Вычислительная визуализация определений кривых второго порядка / Е.Н. Зашук, А.И. Жук // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 25–27 апр. 2024 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. А.И. Басика. – Брест, 2024. – С. 145–148.

УДК (539.26+539.533):669.71

**Д.А. Зерница**

*Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина*

#### **ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ПАЯНОГО СОЕДИНЕНИЯ В СИСТЕМЕ (Cu-Zn) – (Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al) – (Cu-Zn)**

В работе представлены результаты исследования контактной зоны «подложка – припой» для многокомпонентных сплавов Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al, полученных методом высокоскоростной кристаллизации из расплава. Методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (ЭДС) изучалось картирование элементного состава и характер распределения легирующих элементов.

**Ключевые слова:** фольга; припой; Sn-Zn-Al; элементное картирование; состав; интерметаллид; подложка; паяное соединение.

**Введение.** Технологии кристаллизации при сверхвысоких скоростях (охлаждение со скоростью  $10^5$  К/с и выше) способны значительно изменить микроструктуру сплавов. Структуры материалов, образующиеся в таких сильно неравновесных охлажденных системах, оказывают значительное влияние на свойства получаемого материала [1]. Метод сверхбыстрого охлаждения позволяет установить технологические режимы, обеспечивающие массовое производство сплавов для нужд промышленной электроники с относительно низкими энергетическими и временными затратами. Разработка этой методики является актуальной, поскольку она сможет существенно снизить себестоимость продукции и улучшить эксплуатационные характеристики изделий.

Несмотря на значительный комплекс исследований, направленный на изучение структур и свойств сплавов, полученных методом сверхбыстрого охлаждения, остаётся актуальным вопрос о влиянии различных структурных перестроек в жидкой фазе на структуру и свойства аморфных сплавов, а также о роли структурной микронеоднородности в формировании свойств получаемого материала [2; 3]. Проводимые нами ранее исследования структуры и свойств быстрозатвердевшего сплава Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al показали наличие уникальных свойств и формирование дисперсной структуры за счёт модифицирования бинарного сплава Sn-Zn легирующим алюминием. Тем не менее, анализ паяных соединений, полученных пайкой быстрозатвердевшими припоями вышеуказанного состава на латунную подложку, с определением структуры слоёв и фаз, является весьма важным, что определяет актуальность нашей работы.

Как отмечалось нами ранее, к достоинствам метода сверхбыстрой кристаллизации можно отнести его низкую энергоёмкость, простоту технологического процесса и возможность получения материалов в виде тонких фольг без необходимости дополнительной механической обработки [1]. В этом случае быстрозатвердевшие фольги могут быть размещены между соединяемыми изделиями, полностью заполняя область пайки, после чего осуществляется нагрев этой зоны. Это обеспечивает растекание припоя во все труднодоступные места и зазоры без избыточного перегрева элементов микросхем, что значительно снижает энергетические затраты и улучшает качество паяного шва.

Исходные материалы были изготовлены согласно методике, описанной нами в работе [1]. Процесс пайки припоями в виде тонких фольг проходил спустя 14 дней их выдержки при комнатной температуре.

На рисунке 1 представлено изображение поперечного сечения слая (Cu-Zn) – (Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al) – (Cu-Zn) вблизи подложки и график распределения элементов фаз от расстояния.

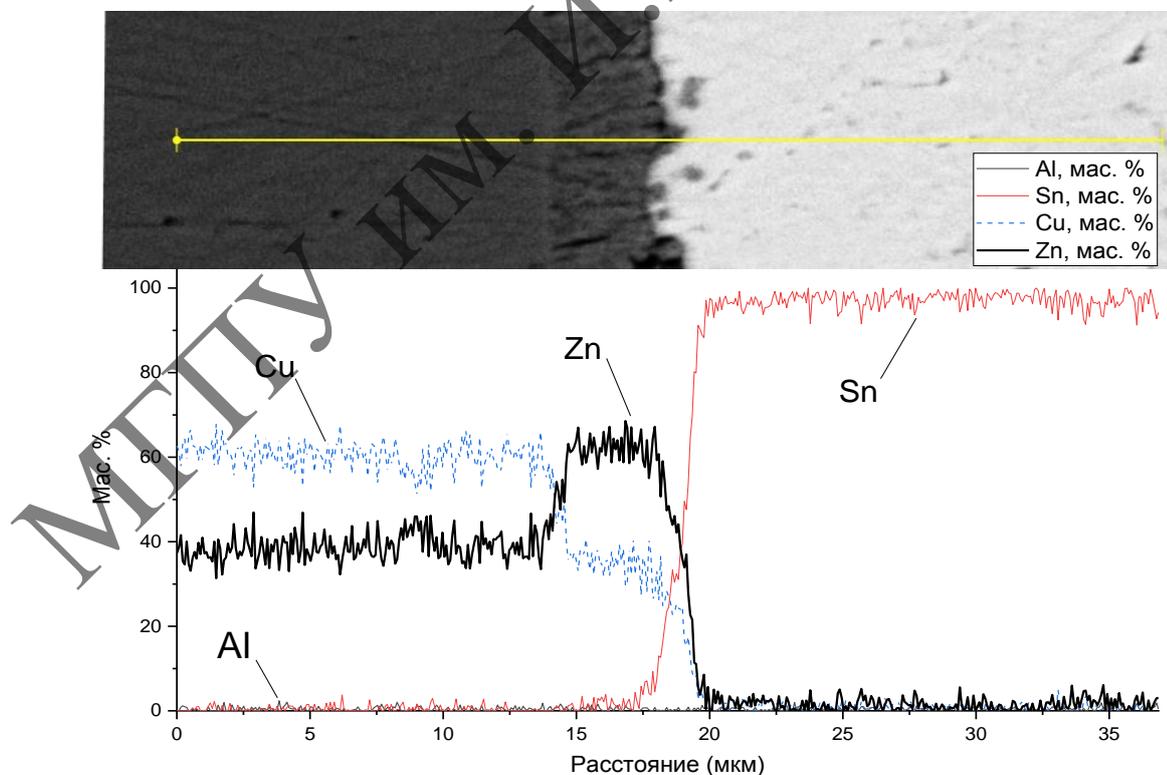
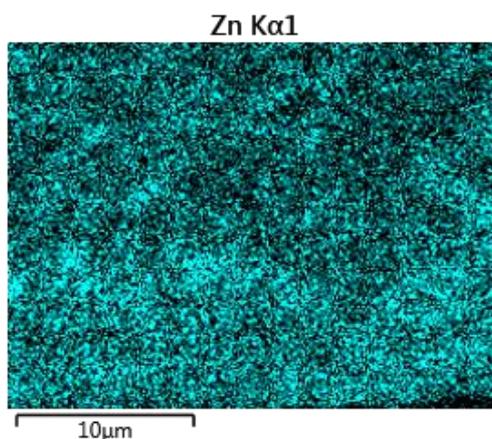
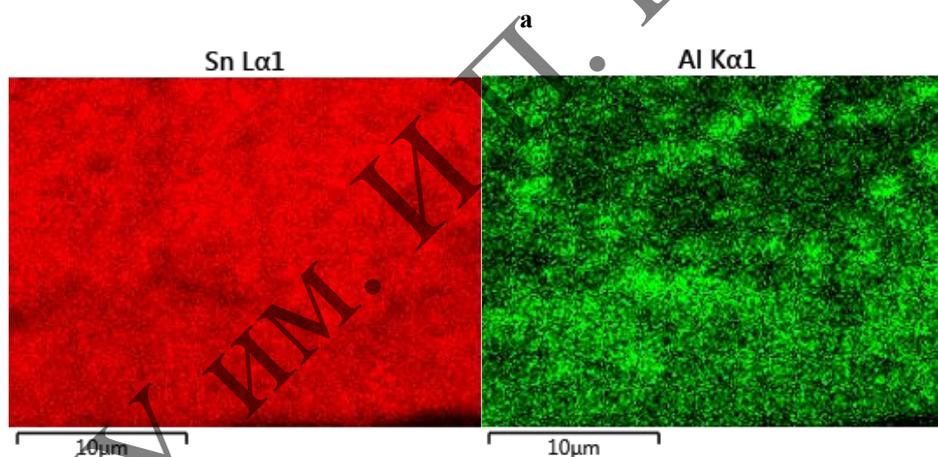
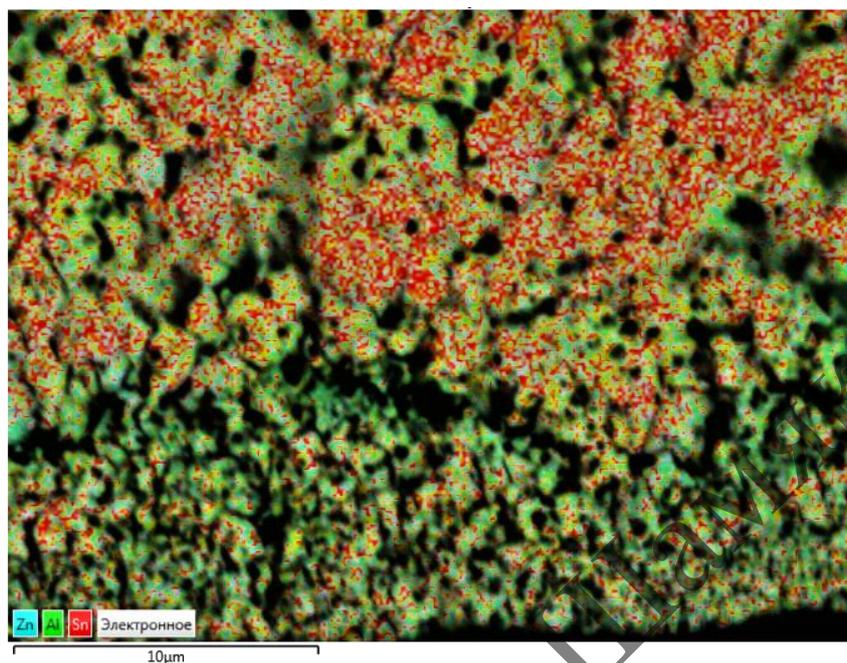


Рисунок 1 – Структура поперечного слоя (Cu-Zn) – (Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al) – (Cu-Zn) и распределение элементов фаз

В переходной зоне между припоем и подложкой наблюдается концентрационный скачок фазы цинка.

Для определения состава использовался метод энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии. На ЭДС-картах (рисунок 2, а, б) для спая (Cu-Zn) – (Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al) – (Cu-Zn) отмечается однородное распределение компонентов припоя между латунной пластиной.



а – многослойная карта ЭДС; б – карты распределения фаз Sn, Al, Zn  
Рисунок 2 – ЭДС-карты структур в поперечном сечении спая системы  
(Cu-Zn) – (Sn – 5 мас. % Zn – 0,5 мас. % Al) – (Cu-Zn)

Установлено, что в области между припоем и подложкой образуется переходный слой шириной около 5 микрон. Такой слой в быстрозатвердевшем сплаве фольги имеет компоненты как припой, так и материала подложки. По мере приближения к зоне припоя от подложки образуется ступенька (рисунок 1), соответствующая скачку концентрации цинка. По результатам анализа слоя ЭДС-методом отмечалась повышенная концентрация цинка в переходной зоне (рисунок 1), т. е. цинк диффундирует к границам в области подложки. В этой области, согласно результатам ЭДС-метода образованию соединения интерметаллида  $\gamma\text{-Cu}_5\text{Zn}_8$ , ранее описанного в работах J.W. Yoon, C.M. Chen [4; 5]. Интерметаллическое соединение  $\text{Cu}_5\text{Zn}_8$  имеет сложную кубическую решётку с 52 атомами в ячейке, параметром ячейки  $a = 0,8888$  нм.

Таким образом, паяный шов характеризуется однородным распределением компонентов припоя с наличием в паяном соединении диффузионной зоны между припоем и подложкой толщиной около 5 мкм, состоящей из интерметаллического дисперсного двухкомпонентного соединения фазы  $\text{Cu}_5\text{Zn}_8$ .

#### Список использованных источников

1. Zernitsa, D.A. Study of the Structure and Properties of Rapidly Solidified Tin–Zinc Eutectic Alloys Doped with Antimony / D.A. Zernitsa, V.G. Shepelevich // *Inorganic Materials : Applied Research.* – 2023. – Vol. 14, № 1. – P. 86–95.
2. Васильев, В.А. Высокоскоростное затвердевание расплава (теория, технология и материалы) / В.А. Васильев, Б.С. Митин, И.Н. Пашков. – М. : Интермет инжиниринг, 1998. – 400 с.
3. Судзуки, К. Аморфные металлы / К. Судзуки, Х. Дудзимори, К. Хасимото. – М. : Металлургия, 1987. – 328 с.
4. Yoon, J.W. Interfacial reaction and mechanical characterization of eutectic Sn–Zn / ENIG solder joints during reflow and aging / J.W. Yoon, H.S. Chun, S.B. Jung // *Materials Transactions.* – 2005. – Vol. 46, iss. 11. – P. 2386–2393.
5. Morphological evolution of the reaction product at the Sn–9wt.% Zn thin-film Cu interface / C.M. Chen [et al.] // *Journal of Electronic Materials.* – 2008. – Vol. 37, iss. 10. – P. 1605–1610.

УДК 517.9

М.Г. Кот

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

#### СХОДИМОСТЬ СЕМЕЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТ

Уравнения вида  $L_\varepsilon u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$  активно изучаются и рассматриваются в разных приложениях. Произведение  $\delta u$ , входящее в данное уравнение, не определено в классической теории обобщенных функций, и одной из основных задач является придание смысла выражению, находящемуся в левой части уравнения.

Для исследования уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами были построены аппроксимации рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; найдены резольвенты аппроксимирующего семейства в явном виде. Одной из основных задач является исследование поведения построенных резольвент при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Ключевые слова:** обобщенная функция, асимптотика, резольвента, сходимость.

#### Введение.

Уравнения вида

$$L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где  $\delta$  есть  $\delta$ -функция Дирака, рассматриваются в разных приложениях [1] и активно изучаются.

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов  $L_\varepsilon$  и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция  $R(\lambda)$  оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения.