

## Заключение

Таким образом, исследовано поведение резольвент вида

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x),$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Причем сходимость имеет место не только в смысле обобщенных функций, но и в  $L_2(R^3)$ .

### Список использованных источников

1. Антоневиц, А.Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А.Б. Антоневиц, Т.А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы / редкол.: Е.А. Ровба [и др.], – Гродно, 2008. – С. 11–28.
2. Антоневиц, А.Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А.Б. Антоневиц, Т.А. Романчук. – LAPLAMBERT, Германия, г. Саарбрюккен, 2012.
3. Романчук, Т.А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т.А. Романчук // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
4. Кащенко, И.С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод указания / И.С. Кащенко ; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

УДК 534.241:534

**Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, Л.А. Тозик**

*Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина*

### **ФОТОУПРУГИЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛОВ, ВОЗМУЩЕННЫХ СДВИГОВОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ**

Установлены фотоупругие параметры метаматериалов для несимметричных включений с использованием матрицы поворота частиц среды в поле сдвиговой ультразвуковой волны. Показано, что существуют оптимальные углы поворота эллипсоидальных частиц-включений, при которых фотоупругая постоянная достигает максимального значения. Найдены оптимальные углы поворота таких частиц, при которых фотоупругие постоянные  $p_{46}$ ,  $p_{26}$  и  $p_{36}$  достигают максимального значения. Показано, что для метасреды Si/SiO<sub>2</sub> величина  $p_{46}$  достигает максимального отрицательного значения, соответствующего включениям игольчатой формы  $\sim -0,1$ . Для включений чешуйчатой формы фотоупругая постоянная  $p_{46}$  принимает максимальные положительные значения  $\sim 0,7$ .

**Ключевые слова:** фотонный кристалл, метаматериал, фотоупругий эффект, сдвиговая ультразвуковая волна.

**Введение.** При распространении в упругой среде сдвиговой ультразвуковой (УЗ) волны возникают локальные изменения объемов среды, не приводящие к локальным изменениям концентрации наночастиц среды. При этом имеет место изменение диэлектрической проницаемости материала, то есть его показателя преломления. Данный эффект имеет место для включений в матрицу материала наночастиц, например, эллипсоидальной формы [1].

Рассмотрим композитную среду с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_c$ , в которую внедрены наночастицы с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + i\varepsilon''_\theta$ , где  $\varepsilon'_\theta$  ( $\varepsilon''_\theta$ ) – действительная (мнимая) части диэлектрической проницаемости. Предполагается (в общем случае), что металлические включения обладают поглощающими оптическими свойствами. Предполагается, что включения в виде эллипсоидов вращения имеют размеры, существенно меньшие длины световой волны  $\lambda$  ( $\lambda \ll a, b$ , где  $b$  и  $a$  – большая и малая оси эллипсоидов вращения). В такой модели оси эллипсоидов ориентированы определенным образом.

Для определения диэлектрических свойств метаматериалов используем статистическую модель Максвелла-Гарнета [2]. При использовании модели диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  удовлетворяет соотношению [1]:

$$(\varepsilon - \varepsilon_c) \left[ \varepsilon_\theta + l(\varepsilon_\theta - \varepsilon_c) \right] - \eta(\varepsilon_\theta - \varepsilon_c) \left[ (\varepsilon - \varepsilon_c) + \varepsilon_c \right] = 0, \quad (1)$$

где  $\eta(\vec{r}, t)$  – объемная доля включений материала. Для эллипсоидальных включений следует полагать

$$\eta(\vec{r}, t) = \frac{4}{3} \pi a^2 b N(\vec{r}, t), \quad (2)$$

где  $N(\vec{r}, t)$  – локальное число включений в единице объема вещества,  $l$  – коэффициент деполяризации, выражаемый через отношение полуосей эллипса  $\xi = a/b$ .

Очевидно, что в такой модели коэффициент деполяризации различен для различных поляризаций падающей на материал световой волны. Если световая волна имеет поляризацию вдоль (ортогонально) оси вращения эллипсоида, то она характеризуется коэффициентом деполяризации  $l_{//}$  ( $l_{\perp}$ ). Данные коэффициенты удовлетворяют соотношениям:

$$l_{//} = \left( 1 - \xi \arcsin \sqrt{1 - \xi^2} / \sqrt{1 - \xi^2} \right) / \sqrt{1 - \xi^2},$$

$$l_{\perp} = \left[ 1 - \left( 1 - \xi \arcsin \sqrt{1 - \xi^2} / \sqrt{1 - \xi^2} \right) / \sqrt{1 - \xi^2} \right] / 2. \quad (3)$$

Тогда коэффициенты  $\varepsilon_{//}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  имеют вид:

$$\varepsilon_{//, \perp} = \varepsilon \left[ (l_{//, \perp} - 1)(\eta - 1)\varepsilon_c + (l_{//, \perp} + \eta - l_{//, \perp}\eta)\varepsilon_e \right]$$

$$\left\{ [1 - l_{//, \perp}(\eta - 1)]\varepsilon_c - l_{//, \perp}(\eta - 1)\varepsilon_e \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Предположим, что сдвиговая УЗ волна с вектором смещений  $\vec{u}(x, t)$  распространяется вдоль оси X, то есть

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad (5)$$

где  $\vec{u}_0 \parallel OY (OZ)$  – амплитуда УЗ волны;  $K = \Omega/v_s$ , причем  $v_s$  – фазовая скорость сдвиговой УЗ волны,  $\Omega$  – круговая частота. В рассматриваемой модели упругой среды полагается, что модули упругости включений композитной среды таковы, что под действием УЗ волны их деформации не происходят.

Будем полагать в дальнейшем, что УЗ волна распространяется вдоль оси X и падающая световая волна также распространяется вдоль той же оси и поляризована вдоль осей Y или Z в системе координат XYZ. Тогда оси вращения эллипсоидальных включений ориентированы вдоль оси Y. Световая волна s-поляризации характеризуется компонентой тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\perp}$ , а волна p-поляризации компонентой  $\varepsilon_{//}$ . Тогда оптическая ось среды метаматериала с искусственной одноосной анизотропией направлена вдоль оси Z. Если  $\varepsilon_{//} > \varepsilon_{\perp}$  ( $\varepsilon_{//} < \varepsilon_{\perp}$ ), то композитная среда соответствует оптически положительному (отрицательному) кристаллу.

В рассмотренной модели упругого метаматериала сдвиговые деформации приводят к небольшому повороту наноэллипсоидов вращения вокруг оси OZ, когда смещение в УЗ волне происходит вдоль оси OY (см. рисунок 1).

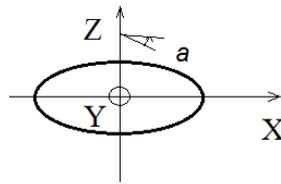


Рисунок 1 – Схема поворота эллипсоида вращения на угол  $\alpha$  вокруг оси OZ

В результате поворота частицы среды тензор диэлектрической проницаемости преобразуется следующим образом:

$$\varepsilon_{ik}(x \rightarrow \alpha) = M_{im} \varepsilon_{mp} \tilde{M}_{pk}, \quad (6)$$

где  $M_{im}(\tilde{M}_{pk})$  – матрица поворота (транспонированная к ней матрица). Тогда получаем следующее соотношение для тензора  $\varepsilon_{ik}(x \rightarrow \alpha)$

$$\varepsilon_{ik}(x \rightarrow \alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \alpha & \frac{1}{2}(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin 2\alpha \\ 0 & \frac{1}{2}(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin 2\alpha & \varepsilon_{\parallel} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ik}(x \rightarrow \alpha)$  содержит недиагональные компоненты, ответственные за взаимодействие световых волн, поляризованных вдоль оси OY и OZ, распространяющихся вдоль оси OX (коллинейрное анизотропное АО взаимодействие).

Отличные от нуля компоненты тензора обратной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^{-1}_{ik}(x \rightarrow \alpha)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^{-1} &= \frac{[\varepsilon_{\parallel} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha]}{[\varepsilon_{\parallel} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha][\varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha] - 0,25(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})^2 \sin^2 2\alpha}}, \\ \varepsilon_{23}^{-1} &= \frac{-0,5(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin 2\alpha}{[\varepsilon_{\parallel} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha][\varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha] - 0,25(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})^2 \sin^2 2\alpha}}, \\ \varepsilon_{33}^{-1} &= \frac{[\varepsilon_{\perp} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha]}{[\varepsilon_{\parallel} - (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha][\varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \alpha] - 0,25(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})^2 \sin^2 2\alpha}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, в выражениях (8), выполним замену:  $\alpha \rightarrow \alpha + \partial u_y / \partial x$ . Затем разложим полученные выражения в степенной ряд по малому параметру  $\partial u_y / \partial x$ . Тогда получим следующие выражения для компонент тензора фотоупругих постоянных:

$$p_{46} = \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}} \right) (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha), \quad p_{26} = \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}} \right) \sin 2\alpha, \quad p_{36} = \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}} \right) \cos 2\alpha. \quad (9)$$

Из выражений (20) следует, что существуют оптимальные углы поворота  $\alpha$ , при которых фотоупругая постоянная достигает максимального значения. Фотоупругая постоянная  $p_{46}$  достигает максимального значения при  $\alpha = [(2m+1)/4 - 1/8]\pi$ , где  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  [1]; постоянная  $p_{26}$  – при  $\alpha = [m/2 + 1/4]\pi$ ; постоянная  $p_{36}$  – при  $\alpha = \pi m/2$ .

На рисунке 2 представлена зависимость максимального значения фотоупругой постоянной  $p_{46}$  от величины параметра  $\xi$  при различных значениях концентрации включений  $N_0$ .

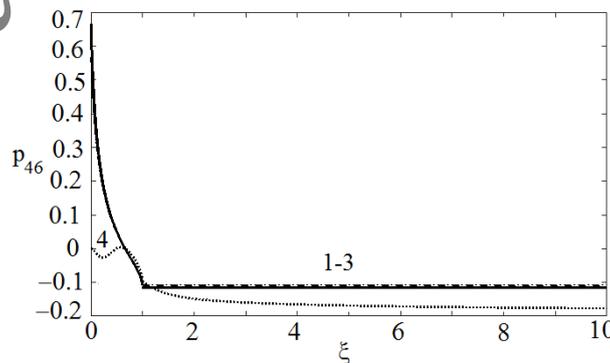


Рисунок 2 – Зависимость фотоупругой постоянной  $p_{46}$  от отношения полуосей эллипсоида  $\xi$  при различных концентрациях включений  $N_0$ : 1- $10^{16}$ , 2- $1,2 \cdot 10^{16}$ , 3- $1,3 \cdot 10^{16}$ , 4- $1,4 \cdot 10^{16}$   $\text{см}^{-3}$  ( $\text{Si}$  – матрица,  $\text{SiO}_2$  – включение,  $\varepsilon_c=12,7$ ,  $\varepsilon_b=3,57$ ,  $\alpha = [(2m+1)/4 - 1/8]\pi$ ,  $b=1\text{мкм}$ )

Из рисунка 2 следует, что при увеличении параметра  $\xi$  происходит уменьшение фотоупругой постоянной  $p_{46}$  для  $N_0 = 10^{16}$ ,  $N_0 = 1,2 \cdot 10^{16}$ ,  $N_0 = 1,3 \cdot 10^{16}$  вплоть до значения  $-0.1$ . Для  $N_0 = 1,4 \cdot 10^{16}$  величина  $p_{46}$  достигает минимального значения (нуль) при  $\xi \approx 0$  и  $\xi \approx 0.8$ . Величина  $p_{46}$  достигает максимального отрицательного значения соответствующего включениям игольчатой формы ( $\xi \gg 1$ ). Малым значениям  $\xi < 1$  соответствуют включения чешуйчатой формы, когда  $p_{46}$  принимает максимальные положительные значения  $\sim 0.7$  для  $N_0 = 10^{16}$ ,  $N_0 = 1,2 \cdot 10^{16}$ ,  $N_0 = 1,3 \cdot 10^{16}$ . Поведение фотоупругих постоянных  $p_{26}$  и  $p_{36}$ , в условиях оптимальных углов поворота  $\alpha$ , имеет аналогичный характер.

**Заключение.** Определены фотоупругие параметры фотонных кристаллов для несимметричных включений с использованием матрицы поворота частиц среды в поле сдвиговой ультразвуковой волны. Расчет несимметричной части тензора фотоупругих постоянных проведен на основе модели Нельсона-Лэкса и матрицы поворота частиц эллипсоидальной формы. Показано, что существуют оптимальные углы поворота  $\alpha$  эллипсоидальных частиц, при которых фотоупругая постоянная достигает максимального значения. Фотоупругая постоянная  $p_{46}$  достигает максимального значения при  $\alpha = [(2m+1)/4 - 1/8]\pi$ , где  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; постоянная  $p_{26}$  – при  $\alpha = [m/2 + 1/4]\pi$ ; постоянная  $p_{36}$  – при  $\alpha = \pi m/2$ . Показано, что величина  $p_{46}$  достигает максимального отрицательного значения ( $\sim -0,1$ ) соответствующего включениям игольчатой формы ( $\xi \gg 1$ ). Малым значениям  $\xi < 1$  соответствуют включения чешуйчатой формы, когда  $p_{46}$  принимает максимальные положительные значения  $\sim 0,7$ .

#### Список использованных источников

1. Пустовойт, В.И. Акустооптические свойства метаматериалов / В.И. Пустовойт // Физические основы приборостроения. – 2015. – Т. 4, № 2(15). – С. 76–85.
2. Ораевский, А.Н. Оптические свойства гетерогенных сред / А.Н. Ораевский, И.Е. Проценко // Квант. электрон. – 2001. – Т. 31, № 3. – С. 252–256.
3. Дьельсан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьельсан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
4. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1987. – 616 с.

УДК 534.241:534

Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, Л.А. Тозик

*Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина*

### ФОТОУПРУГИЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛОВ, ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОДОЛЬНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ

Выявлены фотоупругие параметры метаматериала, включающего матрицу и периодические включения инородного материала эллиптической формы с использованием модели Лорент-Лоренца и Максвелла-Гарнета. Для продольных ультразвуковых волн найдены отличные от нуля компоненты тензора фотоупругих постоянных  $p_{11}$ ,  $p_{21}$  и  $p_{31}$ . Показано, что для фотоупругой среды на основе матрицы из кристалла Si и эллипсоидальных включений из кристалла SiO<sub>2</sub> возможно значительное увеличение фотоупругих постоянных при переходе от включений чешуйчатой формы к включениям игольчатой формы. Увеличение фотоупругих постоянных с возрастанием концентрации включений имеет место, в основном, для включений игольчатой формы.

**Ключевые слова:** композитная среда, метаматериал, фотоупругий эффект, продольная ультразвуковая волна.

**Введение.** В настоящее время для конструирования акустооптических (АО) устройств с улучшенными или ранее недостижимыми характеристиками используют искусственные периодические или квазипериодические структуры: фотонные кристаллы и метаматериалы [1; 2]. Для применений таких сред в акустооптике необходимо, чтобы при распространении в них ультразвуковых (УЗ) волн, происходило изменение их диэлектрических свойств (диэлектрической проницаемости) [3; 4]. Во многих случаях внедрение инородных материалов (металлических или диэлектрических) в матрицу ранее слабо-фотоупругой среды приводит к значительному изменению (увеличению) их фотоупругих параметров [5]. При распространении в упругой среде продольной УЗ волны, сопровождающейся сжатием и разряжением локальных объемов среды, происходит локальное изменение концентрации наночастиц среды. При этом имеет место изменение диэлектрической проницаемости, то есть показателя преломления материала. Данный эффект имеет место для включений в матрицу материала любой формы, например, шарообразной или эллипсоидальной.