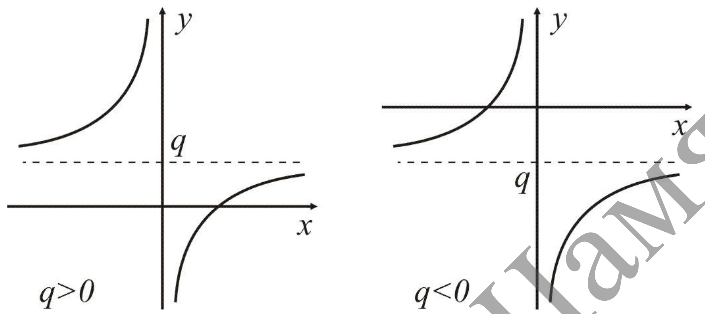
В. В. ШКУТ, С. М. БИРУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая работа посвящена качественному исследованию системы

$$\frac{dx}{dt} = x + \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv x + \sum_{k=2}^{3} P_k(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv \sum_{k=2}^{3} Q_k(x,y) \tag{1}$$

при следующих предположениях: 1) кривая $w(x,y) \equiv xy^2 + px + y + q = 0, \quad pq \neq 0$ является частным интегралом системы (1); 2) $b_{12} \neq 0$; 3) $\dfrac{\partial P_2}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_2}{\partial y} = 0$. Кривая $w(x,y) = 0$ имеет вид



Лемма. Для того чтобы для системы (1) выполнялись условия 1), 2), 3), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \frac{q}{3}x^2 - 2qb_{03}xy - \frac{4q^2}{3}x^3 + \left(\frac{5}{3} + 2q^2 b_{03}\right)x^2 y - b_{03}xy^2 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{2q}{3}xy + qb_{03}y^2 - \frac{2}{3}xy^2 + b_{03}y^3 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При доказательстве леммы используется равенство [1]: если кривая $w(x,y)$ является частным интегралом системы (1), то

$$\frac{\partial w}{\partial x}P(x,y) + \frac{\partial w}{\partial y}Q(x,y) = w(x,y)F(x,y), \tag{3}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – правые части уравнений системы, а $F(x,y)$ – многочлен второй степени относительно x и y.

Будем рассматривать случай $b_{03} \neq 0$, когда $x = 0$ не является особой линией системы (2).

Заметим, что $x = 0$ и $y = 0$ – частные интегралы системы (2).

Далее находим особые точки системы (2) в конечной части плоскости, решая систему уравнений

$$P(x,y) = 0, \qquad Q(x,y) = 0.$$

В результате получим возможные особые точки системы (2):

$$O(0,0),\ A_1\left(\frac{1}{q},0\right),\ A_2\left(-\frac{3}{4q},0\right),\ A_3(0,-q),\ A_4\left(\frac{1}{2q},-q\right),\ A_5\left(-3\frac{q^2 b_{03}+1}{2q},-q\right),$$

$$A_{6,7}\left(x_{1,2} = \frac{3qb_{03} \pm \sqrt{9q^2 b_{03}^2 - 24b_{03}}}{4}, \frac{2}{3b_{03}}x_{1,2}\right).$$

Чтобы найти особые точки в бесконечной части плоскости, к системе (2) применяем преобразования Пуанкаре [2]:

$$x=\frac{1}{z},\quad x=\frac{u}{z}\qquad \text{и}\qquad x=\frac{v}{z},\quad x=\frac{1}{z},\qquad \frac{dt}{z^2}\to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{4q^2}{3}u-\left(\frac{7}{3}+2q^2b_{03}\right)u^2-quz+2b_{03}u^3+3qb_{03}u^2z-uz^2\equiv\overline{P}(u,z),\\
\frac{dz}{dt}&=\frac{4q^2}{3}z-\left(\frac{5}{3}+2q^2b_{03}\right)uz-\frac{q}{3}z^2+b_{03}u^2z+2qb_{03}uz^2-z^3\equiv\overline{Q}(u,z),
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dt}&=-b_{03}v+\left(\frac{5}{3}+2q^2b_{03}\right)v^2+(1-2qb_{03})vz-\frac{4q}{3}v^3+\frac{q}{3}v^2z\equiv\overline{\overline{P}}(v,z),\\
\frac{dz}{dt}&=-b_{03}z+\frac{2}{3}vz-qb_{03}z^2+\frac{2q}{3}vz^2\equiv\overline{\overline{Q}}(u,z).
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Система (4) при $z=0$ имеет особые точки

$$O'(0{,}0)\ \text{ и }\ B_{1,2}\left(u_{1,2}=\frac{7+6q^2b_{03}\pm\sqrt{36q^4b_{03}^2-12q^2b_{03}+49}}{12b_{03}},0\right).$$

Это значит, что система (2) в бесконечной части плоскости имеет особые точки, лежащие на «концах» оси Ox и на «концах» прямых с угловыми коэффициентами $u_{1,2}$.

Начало координат $O''(0{,}0)$ является особой точкой системы (5). Это значит что «концы» оси Oy являются особой точкой системы (2).

Результаты исследования всех особых точек системы (2) представим в виде таблицы.

	O	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	O'	$B_{1,2}$	O''
$b_{03}<-\frac{4}{3q^2}$	с-у	у	чс	у	чс	у	чс	у	у	чс	у
$b_{03}=-\frac{4}{3q^2}$	с-у	у	чс	у	с-у	–	чс	у	у	чс	у
$-\frac{4}{3q^2}<b_{03}<-\frac{1}{q^2}$	с-у	у	чс	у	у	чс	чс	у	у	чс	у
$b_{03}=-\frac{1}{q^2}$	с-у	у	чс	с-у	у	–	чс	у	у	чс	у
$-\frac{1}{q^2}<b_{03}<-\frac{1}{3q^2}$	с-у	у	чс	чс	у	у	чс	у	у	чс	у
$b_{03}=-\frac{1}{3q^2}$	с-у	у	чс	чс	с-у	у	у	с-у	у	чс	у
$-\frac{1}{3q^2}<b_{03}<0$	с-у	у	чс	чс	чс	у	у	у	у	чс	у
$0<b_{03}<\frac{8}{3q^2}$	с-у	у	чс	у	чс	у	–	–	у	чс	у
$b_{03}=\frac{8}{3q^2}$	с-у	у	чс	у	чс	у	с-у	–	у	чс	у
$b_{03}>\frac{8}{3q^2}$	с-у	у	чс	у	чс	у	у	чс	у	чс	у

В таблице: с-у – седло-узел, чс – четырехсепаратрисное седло, у – узел.

Предельных циклов система (2) не имеет.

По результатам исследования строятся качественные картины поведения траекторий системы (2) в круге Пуанкаре.

Результаты данной работы могут быть использованы при чтении дисциплины по выбору «Качественная теория дифференциальных уравнений».

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1972. – 684 с.

2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.