С. М. БИРУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

P_1BP_1-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АВТОНОМНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим обыкновенную автономную дифференциальную систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{n} X_i(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{n} Y_i(x, y), \tag{1}$$

где $X_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ и $Y_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ – однородные полиномы i-й степени с коэффициентами из поля $\mathbf{R}$. При этом $|X_n(x,y)| + |Y_n(x,y)| \neq 0$ на $\mathbf{R}^2$, что соответствует тому, что хотя бы одна из производных представляется полиномом n-й степени.

В [1−3] рассмотрены вопросы взаимосвязи между поведением траекторий системы (1) и её первой и второй приведённых систем Пуанкаре, а также вопросы топологической эквивалентности дифференциальных систем на сфере Пуанкаре. В [4] установлена взаимосвязь между поведением траекторий системы (1) на сфере Пуанкаре и сфере Бендиксона.

Предложение. *В результате суперпозиции первого преобразования Пуанкаре* $x = y_1^{-1},\ y = x_1 y_1^{-1}$, *преобразования Бендиксона* $x_1 = 4y_2(x_2^2 + y_2^2)^{-1}, \quad y_1 = 4x_2(x_2^2 + y_2^2)^{-1}$ *и первого преобразования Пуанкаре* $x_2 = y_3^{-1},\ y_2 = x_3 y_3^{-1}$, *или преобразования*

$$x = (1 + x_3^2)(4y_3)^{-1}, \qquad y = x_3, \tag{2}$$

система (1) *приводится к полиномиальной системе*

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= (1 + x_3^2) \sum_{i=0}^{n} (4y_3)^{n-i} X_i(1 + x_3^2, 4x_3y_3), \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= -4y_3^2 \sum_{i=0}^{n} (4y_3)^{n-i} X_i(1 + x_3^2, 4x_3y_3) + 2x_3y_3 \sum_{i=0}^{n} (4y_3)^{n-i} Y_i(1 + x_3^2, 4x_3y_3), \end{aligned} \tag{3}$$

где $(1 + x_3^2)(4y_3)^n d\tau = dt$.

Преобразование (2) назовём P_1BP_1*-преобразованием*. Дифференциальную систему (3) назовём P_1BP_1*-приведённой системой*, индуцированной системой (1).

Свойство 1. *Если точка* $M(x, y)$ *является состоянием равновесия системы* (1), *расположенным в конечной части фазовой плоскости* (x, y), *и не лежит на оси ординат* Oy, *то точка* $M'\left(y, (1 + y^2)(4x)^{-1}\right)$ *является состоянием равновесия* P_1BP_1*-приведённой системы* (3), *не лежащим на оси* $O'x_3$. *При этом вид состояний равновесия* M *и* M' *одинаков.*

Свойство 2. *Если точка* $N'(x_3, y_3)$ *является состоянием равновесия* P_1BP_1*-приведённой системы* (3), *расположенным в конечной части фазовой плоскости* (x_3, y_3), *и не лежит на оси абсцисс* $O'x_3$, *то точка* $N\left((1 + x_3^2)(4y_3)^{-1}, x_3\right)$, *не лежащая на оси* Oy, *является состоянием равновесия системы* (1) *того же вида что и состояние равновесия* N'.

Свойство 3. *Поведение траекторий системы* (3), *расположенных в полуплоскости* $y_3 > 0$, *биективно соответствует поведению траекторий системы* (1), *расположенных в полуплоскости* $x > 0$, *с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы* (3), *расположенных в полуплоскости* $y_3 < 0$, *биективно, с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы* (1), *расположенных в полуплоскости* $x < 0$.

Свойство 4. *Поведение траекторий системы* (1) *в окрестности бесконечно удалённой точки лежащей на «концах» оси* Ox *проективной фазовой плоскости* (y_1, x, y) *определяется поведением траекторий системы* (3) *в окрестности оси абсцисс* $O'x_3$ *проективной фазовой плоскости* (x_2, x_3, y_3).

Если точка $A'(a,0)$ лежит на конечной части фазовой плоскости (x_3, y_3), то A'-траекториям системы (3) соответствуют траектории системы (1), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси Ox, в направлении прямой $y = a$.

Траекториям системы (3), примыкающим к «концам» оси $O'x_3$, соответствуют траектории системы (1), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси Ox, в направлении бесконечно удалённой прямой $y_1 = 0$ проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) системы (1).

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (3), лежащих на оси $O'x_3$, и секторами Бендиксона состояния равновесия системы (1), лежащего на «концах» оси Ox, определяется принципами, описанными в [4].

Свойство 5. *Поведение траекторий системы* (3) *в окрестности бесконечно удалённой прямой* $x_2 = 0$ *проективной фазовой плоскости* (x_2, x_3, y_3), *из которой удалены точки, соответствующие «концам» координатных осей* $O'x_3$ *и* $O'y_3$, *с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы* (1) *в окрестности бесконечно удалённой прямой* $y_1 = 0$ *проективной фазовой плоскости* (y_1, x, y), *из которой удалены точки соответствующие «концам» координатных осей* Ox *и* Oy.

При этом бесконечно удалённой точке лежащей на «концах» прямой $y_3 = bx_3$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) системы (3) соответствует бесконечно удалённая точка проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) системы (1), размещённая на «концах» прямой $y = 4bx$.

Свойство 6. *Поведение траекторий системы* (3) *в окрестности бесконечно удалённой точки, лежащей на «концах» оси* $O'y_3$ *проективной фазовой плоскости* (x_2, x_3, y_3), *определяется поведением траекторий системы* (1) *в окрестности оси ординат* Oy *проективной фазовой плоскости* (y_1, x, y).

Если точка $A(0,a)$ лежит на конечной части фазовой плоскости (x, y), то A-траекториям системы (1) соответствуют траектории системы (3), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси $O'y_3$, в направлении прямой $x_3 = a$.

Траекториям системы (1), примыкающим к «концам» оси Oy, соответствуют траектории системы (3), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси $O'y_3$, в направлении бесконечно удалённой прямой $x_3 = 0$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) системы (3).

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (1), лежащих на оси Oy, и секторами Бендиксона состояния равновесия системы (3), лежащего на «концах» оси $O'y_3$, определяется принципами, описанными в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.
2. Горбузов, В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2011. – № 2 (111). – С. 15–26.
3. Горбузов, В.Н. Траектории проективно приведенных дифференциальных систем / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2012. – № 1 (126). – С. 39–52.
4. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.